数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 174-193

Symbolic Rees 環の Noether 性の幾何的判定法
（Cutkosky の方法）

東海大・理・渡辺敬一 (Kei-ichi Watanabe)

序

任意の体 k に対して，環準同型

$$\varphi: S = k[X, Y, Z] \longrightarrow k[t^a, t^b, t^c] \subset k[t]$$

を、$\varphi(X) = t^a$, $\varphi(Y) = t^b$, $\varphi(Z) = t^c$ とし，（$(a, b, c) = 1$）

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a, b, c) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ とする．このとき，

$$R := R_s(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} u^n$$

が Noether 環になる（$\Leftrightarrow$ S 上有限生成である）ための条件を求めようというのが我々の問題である．

この問題に対してのこれまでの環論的方法は、ある種の条件をみたすえを $\mathfrak{p}$ の symbolic power から探して来るという方法が主で，計算に重点がおかれていたように思う。

本稿の目的は，この問題を幾何的にとらえた，Cutkosky の方法［3］の紹介である．（この論文には，本質的ではないが，若干のミスや理解し難い点があり，このような点を私なりに解釈してみた。なお、余り代数幾何を仮定したくないので，若干記述が冗長になるのをお許し頂きたい．）

幾何的な視点をとる事のメリットとして次のようなものが考えられる。

(1)　a, b, c がある条件をみたすとき、extremal ray の理論から，有限性が保證される。(cf. (3.1)(I), (4.1))

(2)　Huneke の判定法が、図形的な意味付けをもつ。(cf. §5.)

(3)　次数の比較的小さいえが存在するとき，(これは曲面 X 上に $C^2<0$ なる curve C が存在する事のいいかえ) R の Noether 性と C の contraction が projective である事が同値になる。逆に見ると，R が Noether でない例は、projective morphism で contract できない曲線の例を与える。

以下に書く事は、いささか楽観的にすぎる予想かもしれないが、

(4)　高次元の場合(S が 4 変数以上)にも、ある程度同じ手法が使えないか？

(5)　effective curves の cone を見る事によって，「標数 $p>0$ なら R は常に Noetherian」位は示せないか？

(6)　上記の (3) の場合に、R が Noether かどうか判定するアルゴリズムが作れないか？(これは $char(k)=0$ のときのみ意味がある。)

§1. Geometric Formulation.

$S = k[X, Y, Z]$ に，$\deg(X)=a$, $\deg(Y)=b$, $\deg(Z)=c$ として grading を入れる。($\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(a,b,c)$ が homogeneous になるようにしている。) このとき，

$\mathbb{P} := \mathbb{P}(a,b,c) = \mathrm{Proj}(S)$ とおく．定義により，

$\mathbb{P} = D_+(X) \cup D_+(Y) \cup D_+(Z)$ で，$D_+(X) = \mathrm{Spec}((S_X)_0)$, $D_+(Y) = \mathrm{Spec}((S_Y)_0)$, $D_+(Z) = \mathrm{Spec}((S_Z)_0)$ である。(( )$_0$ は degree 0 の subring を表す。) 例えば，$(a,b,c) = (7,9,10)$ のとき，$(S_X)_0 = k\left[\frac{Y^7}{X^9}, \frac{Y^2Z}{X^4}, \frac{YZ^4}{X^7}, \frac{Z^7}{X^{10}}\right]$ であり，$D_+(X)$ は order 7 の "cyclic quotient singularity" ($k[y^iz^j \mid i+5j \equiv 0\ (7)] \subset k[y,z]$ と $(S_X)_0$ は同型) を $(1:0:0)$ に於てもつ，normal affine variety である。(a,b,c) が 2つずつ互いに素であるとき，$\mathbb{P}$ は丁度3点の "quotient singularity" をもち，それらの位数は a, b, c である。

仮定．我々の問題に於て，(a,b,c) を 2つずつ互いに素としても一般性を失わない事は容易にわかるので，以下，この条件を常に仮定する事にする。

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a,b,c)$ は ht 2 の素イデアルだから，$V_+(\mathfrak{p}) \in \mathbb{P}$ は点になる。この点は上記の3点の特異点とは異るから，smooth point である。$P = P(a,b,c) = V_+(\mathfrak{p})$ とおく。

$\mathfrak{p}^{(n)}$ と $\mathfrak{p}^n$ の差は (X,Y,Z)-primary ideal のみだから,

$$\mathfrak{p}^n = \bigoplus_{i\geq 0} H^0(\mathbb{P}, \tilde{\mathfrak{p}}^n(i)) = \bigoplus_{i\geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{I}_{\mathbb{P}}^n(i))$$

と書ける。なお、$\mathcal{O}_X(n) = S(n)^\sim$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$ のとき, $\mathcal{F}(n) = M(n)^\sim$,
graded S-module M に対し,
$\tilde{M}$ は $H^0(D_+(x), \tilde{M}) = (M_x)_0$ etc. で決る $\mathbb{P}$ 上の sheaf,

$M(n)$ は $M(n)_i = M_{n+i}$ で定まる graded S-module.

次に,

$X := X(a,b,c) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(a,b,c)$ を点 $P = V_+(\mathfrak{p}(a,b,c))$ での blowing-up とし, $\pi^{-1}(P) = E$ とおく. P は smooth point だから, $E \cong \mathbb{P}^1$, $E^2 = -1$ on X である. また,

$\tilde{\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-E)$, $\pi_*(\mathcal{O}_X(-nE)) = \tilde{\mathfrak{p}}^n$ である. 従って,

$$R_s(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{p}^{(i)} u^i \cong \bigoplus_{i,j\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE)(j))\, u^i.$$

と $\mathbb{Z}^2$-graded ring の構造をもつ。更に, X 上の divisor A を, $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = \mathcal{O}_X(nA)$ となるように定めると ($\mathcal{O}_X(nA)$ は X の 3 つの特異点 ($=\mathbb{P}$ の 3 つの特異点) で free でないので, invertible ではない。$\mathcal{O}_X((m+n)A) = (\mathcal{O}_X(mA) \cdot \mathcal{O}_X(nA))^{**}$

$\mathcal{O}_X(nA)$ が invertible $\Longleftrightarrow$ $abc \mid n$). この A を使うと

$$\boxed{R = \mathcal{R}_s(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{i,j\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE+jA)) \cdot u^i T^j}$$

(u, T は不定元) と書ける。(なお,

$$R' := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}, j\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(-iE+jA)) \cdot u^i T^j = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}^{(i)} u^i$$

は "extended Rees 環" である. なお, $A' := \pi_*(A) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P})$,

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(nA')$ とおくと,

$S = R(\mathbb{P}, A') = \bigoplus_{j\geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(jA'))$. である だから、normal graded ring の一般論より，([11]，参照.)，

$Cl(\mathbb{P}) = \mathbb{Z}.A' \cong \mathbb{Z}$.

S が Gorenstein ring，$a(S) = -a-b-c$ であるから，

$\omega_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-(a+b+c)A') = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-(a+b+c))$，

(但し，$Div(Y)$，$Cl(Y)$ はそれぞれ，normal algebraic variety Y の divisor group，divisor class group．ω_Y は Y の dualizing sheaf を表わす。$\omega_Y = \mathcal{O}_Y(K_Y)$，$K_Y$ は Y の canonical divisor.)　π は smooth point での blowing-up より，

$\omega_X \cong \pi^*(\omega_{\mathbb{P}})(E) = \mathcal{O}_X(-(a+b+c)A+E)$, $K_X = -(a+b+c)A+E$.

また，$Cl(\mathbb{P}) = \mathbb{Z}.A$ より，

$Cl(X) = \mathbb{Z}.A \oplus \mathbb{Z}.E \cong \mathbb{Z}^2$ である。

§2. $X = X(a,b,c)$ 上の Intersection Theory と "Extremal ray".

$X = X(a,b,c)$ は，位数がそれぞれ a, b, c の "cyclic quotient singularity" のみをもつ normal variety なので，すべての divisor は $\mathbb{Q}$-Cartier ($\forall D \in Div(X)$, $abcD$ は Cartier divisor) であるので，intersection pairing

$$Cl(X) \times Cl(X) \longrightarrow \frac{1}{abc}\cdot\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

が定義される。以下に於て必要となる性質をまとめると，

(2.1) ① C が curve，$D \in \mathrm{Div}(X)$，nD が Cartier divisor のとき，$C \cdot D \overset{\mathrm{dfn}}{=} \frac{1}{n} \deg(\mathcal{O}_X(nD)|_C)$．更に $D \geqq 0$ で，C と D が共通成分をもたないとき，

$$C \cdot D = \frac{1}{n} [\ \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{nD} \text{ の長さ}\ ] \geqq 0.$$

② $A^2 = A'^2 \ (\text{in } \mathbb{P}) = \frac{1}{abc}$，$E^2 = -1$，$A \cdot E = 0$

[一般に，$R = R(X, D)$: normal graded ring，($\exists N > 0$, ND : ample Cartier divisor)，$\dim X = d$ のとき，$P(R, t) = \sum_{n \geq 0} \dim R_n \cdot t^n$ を R の Poincaré series とすると，

$$D^d = \lim_{t \to 1} (1-t)^{d+1} P(R, t)$$

が成立する，([10] 参照)．$S = R(\mathbb{P}, A') = k[x, y, z]$，

$P(S, t) = \dfrac{1}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)}$ より，$A'^2 = \dfrac{1}{abc}$ を得る．

A' は $\mathbb{P}(a, b, c)$ を通らない "座標軸" で表されるから，

$A^2 = A'^2$，$A \cdot E = 0$]．

この「幾何的考察」に於て，最も重要となるのは，"effective cone" と思われる，

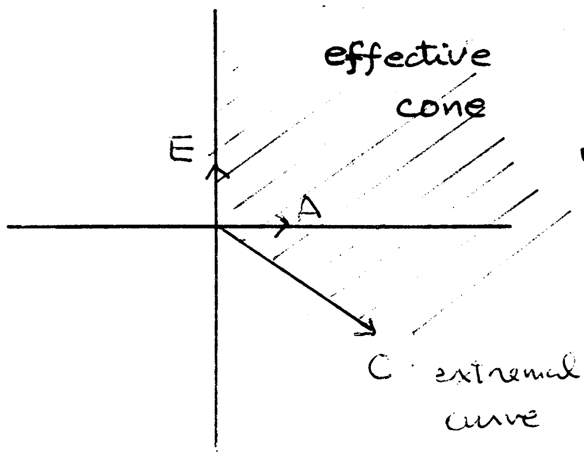
$\sum n_i C_i \in \mathrm{Div}(X)$ (C_i : irred. curve) に対し，

$\sum n_i C_i \geqq 0$ ($\Leftrightarrow \forall n_i \geqq 0$) なるものを effective divisor というが，

$\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z} \cdot E \oplus \mathbb{Z} \cdot A$ で effective divisors をもつ

class の生成する cone $\subset Cl(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2$ を考える。任意の irred. curve $C\subset X$ に対し、$C\cdot A\geq 0$ かつ $C.A=0 \iff C=E$ であるから、E がこの cone の一つの境界上にあるのはあきらかであるが、問題は、他の境界である。

irreducible curve C が他の境界上にあるとき、C を "extremal curve" 更に、$(-K_X)\cdot C>0$ であるとき、半直線 $\mathbb{R}_+\cdot[C]$ を "extremal ray" と呼ぶ。（下図）



但し、"extremal curve" C が存在するかどうかはわからない。「ある半直線にいくらでも近いものが存在するが、その半直線上にのるものはない」という可能性も、現在は排除できない。

但し、次の事は云える。

(2.2) (1) $C\subset X$ が irred. curve, $C\neq E$, $C^2<0$
$\Rightarrow$ C は extremal curve.

(∵) C' が C より「左に」あると、$C'\sim -\alpha E+\beta C$ (α, $\beta>0$)（$\sim$ は linear equivalence を表す）。すると、$C\cdot C' = -\alpha\cdot C\cdot E+\beta\cdot C^2<0$ となり矛盾。

(2) 逆に、C が extremal curve なら $C^2\leqq 0$ である。

(∵) $C^2>0$ とすると、中井 criterion により、C は

ample で，$\exists N>0$，$H^0(X, \mathcal{O}_X(NC-E)) \neq 0$ となり，C より "左に" effective divisor が存在する。

さて，symbolic power と effective divisor はどう関係するだろうか？

$f \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_n$ （下の n は degree を表す．） は $\overline{C} = V_+(f) \subset \mathbb{P}$ を定める。$f \notin \mathfrak{p}^{(r+1)}$ とすると，$\pi^*(\overline{C}) = C + rE$ となる。$\overline{C} \sim nA'$ より，$C \sim nA - rE$ となり，$nA - rE$ の class が effective member をもつ。$H^0(X, \mathcal{O}_X(nA - rE)) \cong [\mathfrak{p}^{(r)}]_n$ であるから，

$[\mathfrak{p}^{(r)}]_n \neq 0 \Rightarrow nA - rE$ が effective cone に属する．

(2.3)

例 1. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(11, 25, 21) \ni c = Y^3 - X^3Z^2 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(75A - E))$.

$C \subset X$ を $V_+(c) \subset \mathbb{P}$ の proper transform とすると，$C \sim 75A - E$ で，$C^2 = \dfrac{75^2}{11 \cdot 25 \cdot 21} - 1 = -\dfrac{2}{77} < 0$．ゆえに C は extremal curve である．この例では，

$-K_X = (11+25+21)A - E = 57A - E$ だから，$-K_X$ は C より "左に" あり，$[-K_X].C < 0$ である。

例 2. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(7, 9, 10)$ を考える．

(i) $\mathrm{ch}(k) \neq 2$ のとき，$\exists c_4 = Z^{10} + \cdots \in [\mathfrak{p}^{(4)}]_{100}$，c は既約で，$C \subset X$，$C \sim 100A - 4E$ を定めるが，このとき，

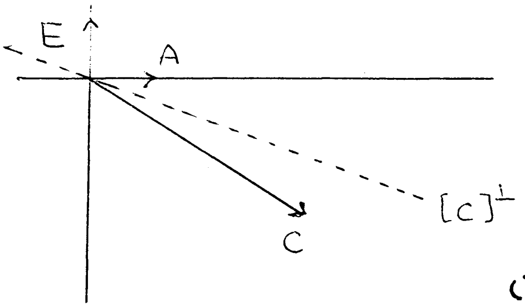
$C^2 = \dfrac{100^2}{7 \cdot 9 \cdot 10} - 4^2 = -\dfrac{8}{63} < 0$ で，C は extremal curve.

(ii) $\mathrm{ch}(k) = 2$ のとき，$\exists e = X^{10} + \cdots \in [\mathfrak{p}^{(3)}]_{70}$，より，

$\exists C\subset X;\ C\sim 70A-3E.$ もちろん, $C^2<0$ である。

$ch(k)=2$ と $\neq 2$ では extremal curve のある半直線が異っている。この事実は, $R_s(\mathfrak{p})$ が「$ch(k)\neq 2$ で Cohen-Macaulay, $ch(k)=2$ で not Cohen-Macaulay」という事と、どういう関係をもつのだろうか? ([4]参照)

(2.4)
Remark. (1) $C\subset X$ irred. curve, $\underbrace{C\neq E}_{C^2<0,}$ のとき, $[C]^{\perp}$ を $C\cdot D=0$ となる D の作る直線とする。このとき, $[C]^{\perp}$ と $\mathbb{R}_+[C]$ の間には irreducible curve は存在しない。特に



(i) $\forall C'\neq C,E$ irred. curve, $C'^2>0$.

(ii) $D\geqq 0$, $D\in \mathrm{Div}(X)$, $C.D<0$ のとき, D は必ず C を成分に含む.

環論的な formulation では, $f\in[\mathfrak{p}^{(r)}\setminus\mathfrak{p}^{(r+1)}]\cap S_n$ が既約, $(\frac{n}{r})^2<abc$, $g\in[\mathfrak{p}^{(s)}]_m$, $\frac{mn}{abc}-rs<0\ \Rightarrow\ f\mid g$.

(2) $\exists \overset{\neq 0}{D}\in \mathrm{Div}(X)$, $D^2=0\ \Rightarrow\ a,b,c$ はすべて平方数.
(C が irred. curve, $C^2=0$ なら C は extremal curve だが, このような事は特殊な場合にしか起らない。)

実際, $C\sim\alpha A-\beta E$ とすると. $0=C^2=\frac{\alpha^2}{abc}-\beta^2$ で, a,b,c は二つずつ互いに素だから, a,b,c すべて平方になる。

§3. $R_s(\mathfrak{p})$ の Noether 性の numerical criteria

Cutkosky の与えた有限性の判定法をまとめると，

定理 (3.1). 次の3つの条件のいずれかがみたされるとき，$R = R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である．

(I) $K_X^2 = \dfrac{(a+b+c)^2}{abc} - 1 > 0$

(II) $\exists f \neq 0 \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_n$, $\dfrac{n}{r} \leqq a+b+c$

(III) $\mathrm{char}(k) = p > 0$, $\exists f \neq 0 \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_n$, $\dfrac{n}{r} < \sqrt{abc}$

証明に入る前にいくつかの応用を見てみよう．

例1. $a \leqq 4$ とすると，$\dfrac{(a+b+c)^2}{abc} > 1$ が示され，R は Noether 環。しかし，a, b, c がどれも十分大きくなると，当然 (I) はみたされなくなる。

例2. $a = 6 < b < c$, $(6, b) = 1 = (6, c)$, $c \notin 6\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ ⇒ どちらかが $\equiv 1$ (6), 他が $\equiv -1$ (6) より，$YZ - X^{\frac{b+c}{6}} \in \mathfrak{p}_{b+c}$. (II) がみたされる。従って，

$a = 6$ のとき，$R_s(\mathfrak{p})$ は Noetherian.

例3. $a = 7m-3$, $b = 5mn - m - n$, $c = 8n-3$ とすると，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a,b,c) \ni Y^3 - X^n Z^m = f$, degree $f = N = 3(5mn - m - n)$ である。このとき，$abc - N^2 = (5mn-m-n)(6m(n-2)+5n(m-3)+9)$ > 0 if $n \geqq 2, m \geqq 3$ or $m = 2, n \geqq 3$. このとき (III) によ

り、$\mathrm{char}(k)=p>0$ なら $R_s(\mathfrak{p})$ は Noetherian である。しかし、$\mathrm{char}(k)=0$ のとき、$n\geqq 4$, $2m>n+1$ なら、$R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環でない事が示されている。[この例は、後藤一西田による。[5], [6] 参照].

さて、定理 (3.1) の証明に入るわけだが、当然いくらかの代数幾何の予備知識が必要になる。

(3.2). Base point free divisors.

Noether 性の最初の基礎になるのは次の Zariski の定理である。

定理 (Zariski [12]) X が体 k 上の normal projective variety, $D_1,\dots,D_n\in \mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, $\exists N>0$, ND_i $(i=1,\dots,n)$ は base pt. free Cartier divisor とすると,

$$R:=R(X;D_1,\dots,D_n):=\bigoplus_{k_1,\dots,k_n\geq 0} H^0(X,\mathcal{O}_X(k_1D_1+\cdots+k_nD_n)).T_1^{k_1}\cdots T_n^{k_n}$$

は k 上有限生成.

但し, Cartier divisor D が base point free $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in X$, closed pt., $\exists f\in k(X)$, $D+\mathrm{div}_X(f)\geqq 0$, かつ $D+\mathrm{div}_X(f)\not\ni x$.

(この定理の証明は, X が normal projective より, valuative criterion によって, R が $k[H^0(X,\mathcal{O}_X(ND_1))T_1^N,\dots,H^0(X,\mathcal{O}_X(ND_n))T_n^N]$ 上 integral である事が示せる。)

(3.3) X上の curve の contraction — rational singularity. および positive characteristic.

C が X 上の irreducible curve で, $C^2<0$ のとき, C はある "normal surface" Y の一点 q に contract できる。但し, このとき Y は $k=\mathbb{C}$ のとき normal complex analytic space 又は, scheme の概念を拡張して作られた, normal algebraic space である。即ち, $\exists \varphi : X \to Y$, $\varphi(C)=q$, $\varphi : X-C \cong Y-q$. (Grauert [6a], F. Sakai [9]).

このとき, Y も k上 projective であるかどうかが問題になるが, これに関して, 次の結果がある。(本質的には X が smooth のとき, M. Artin [1] によって示されているが, X が normal のときに, L. Breuton [2], Cutkosky [3] によって一般化されている。)

<u>定理</u> 我々の $X=X(a,b,c)$ 上の irreducible curve C, $C^2<0$ が $q\in Y$ に contract されるとき,

(1) (Y,q) が rational singularity ($\overset{\mathrm{dfn}}{\Longleftrightarrow} (R^1\varphi_*\mathcal{O}_X)_q=0$)

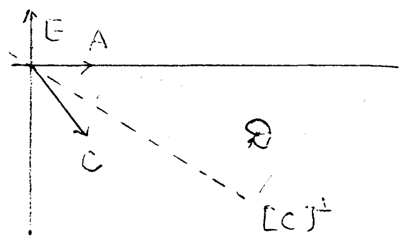
又は (2) char $k=p>0$, $k\subset$ (有限体の alg. closure) のとき,

Y も k上 projective である。

Noether 性を示すために, 次の定理を用意しておこう。

定理 (3.4) C を irred. curve $\subset X$, $C^2<0$ で, $\varphi: X \to Y$ を C の contraction とする。このとき, Y が k 上 projective なら, $R = R_s(\mathfrak{p})$ は Noetherian.

(証明) 1°. まず, $Cl(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ の中で, $\mathbb{R}_+[A]$ と $C^{\perp}$ (の第4象限の部分) で囲まれた範囲を $\mathfrak{D}$ とおく:



($\mathfrak{D}$ は $[C]^{\perp}$ (の半分) を含む.)

$$R' := \bigoplus_{[iA-jE]\in\mathfrak{D}} H^0(X, \mathcal{O}_X(iA-jE))\, T^i u^j$$

とおくと, (2.4) (1) により, $R = R'[fu^x]$ ($f\in\mathfrak{p}^{(x)}$ は (2.4) の記号) と書けるから, R' が Noetherian なら十分。(逆に, R' は R 上の多項式環の pure subring なので, R が Noetherian $\Rightarrow$ R' も Noetherian.)

2°. 次に,
$$R'^{(N)} := \bigoplus_{\substack{[iA-jE]\in\mathfrak{D}\\ i,j\,\in N\mathbb{Z}}} H^0(X, \mathcal{O}_X(iA-jE))\, T^i u^j$$

とおくと, R' が Noetherian $\Leftrightarrow$ $R'^{(N)}$ が Noetherian は容易にわかる.

3°. Y が projective のとき, Y 上の ample divisor G' を $G' \not\ni q = \varphi(C)$ にとり, $G = \varphi^*(G')$ とおくと, $G\cap C = \phi$ だから $[G]\in[C]^{\perp}$, G は base point free で, N を適当に選ぶと $R'^{(N)} = \bigoplus_{i,j\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(iNA+jG)).T^{iN}u^{jN}$ とおけるので, 定理 (3.2) より, R は Noetherian である。

§4. Noether 性の証明

定理(3.1)の証明に移ろう。

(4.1) (3.1) (I) $K_X^2>0$ を仮定する。

このとき,$(-K_X)\cdot A = a+b+c>0$ だから,$Cl(X)\cong \mathbb{Z}^2$ より,任意の curve C に対し,$(-K_X)\cdot C>0$ である事が容易にわかる。ゆえに,$-K_X$ は ample で,$\underbrace{\text{Cone Theorem}}_{}$ (char(k)=0 のとき) (森脇 [8],(3.1))により,X 上に extremal ray R 及びその contraction $f_R: X\to Y$ が存在し,Y は projective である。このとき $\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は (3.4) により Noetherian.
((3.4) では $C^2<0$ としたが,$[C]\in R$ が $C^2=0$ のとき,$[C]^\perp = \mathbb{R}\cdot[C]$ で,$\exists N>0$, NC が base-pt free となる。)

char(k)$=p>0$ のとき,char $=0$ で,$C\neq E$,irred. curve で,$C^2\leqq 0$ が存在するので,この条件を「$\exists f\in[\mathfrak{p}^{(r)}]_n$, $\frac{n}{r}\leqq\sqrt{abc}$」と云いかえると,char. $p>0$ でも「$\exists f\in[\mathfrak{p}^{(r)}]_n$, $\frac{n}{r}\leqq\sqrt{abc}$」は示せる。ゆえに Noether 性の証明は (4.3) 又は Huneke の判定法の homog. version (5.2) に帰着する。

(4.2). (3.1) の (II) を仮定すると,$\mathbb{R}_+[-K_X]$ は2つの半直線 $\mathbb{R}_+[C]$ と $\mathbb{R}_+[A]$ の間にはさまれる。(C は $V_+(f)\subset\mathbb{P}$ の proper transform). このとき,$C^2\geqq 0$ とすると,$-K_X\cdot C>0$

また $(-K_X)^2>0$ となるので，(4.1) に帰着する。($K_X^2=0$ $\Longleftrightarrow$ $(a+b+c)^2=abc$ が起り得ない事は，$a=a_1^2$, $b=b_1^2$, $c=c_1^2$ とおいたあと mod 3 で考えるとわかる。筆者は森本貴志氏に教えてもらった。[3] のここの証明は誤りである。)

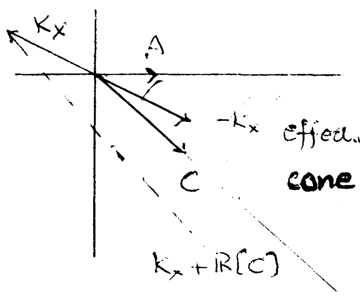
C を extremal curve とし，$C^2<0$ なら，C の contraction $\varphi: X\to Y$ に於て，$q=\varphi(C)$ が rational singularity である事を示そう。($\Rightarrow$ (3.3), (3.4) より，$R_s(q)$ は Noetherian.)

さて，$(R^1\varphi_*\mathcal{O}_X)_q=\varprojlim H^1(\mathcal{O}_{nC})$ $(\mathcal{O}_{nC}=\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-nC))$ より，$\forall n>0$, $H^1(\mathcal{O}_{nC})=0$ を示せば良い。

$H^1(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))=0$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$, $H^2(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}})=0$ より，$H^1(X,\mathcal{O}_X)=H^2(X,\mathcal{O}_X)=0$ である。さて，exact sequence

$$0\to\mathcal{O}_X(-nC)\to\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_{nC}\to 0$$

と上記の事実より，$H^1(\mathcal{O}_{nC})\cong H^2(\mathcal{O}_X(-nC))\xleftrightarrow{\text{dual}}H^0(K_X+nC)$



ところで，$-K_X$ は effective cone の内点にあるから，左図よりわかるように，$[K_X+nC]$ は effective member をもたず，従って，$H^0(X,\mathcal{O}_X(K_X+nC))=0$.

(4.3) 例. $q=q(11,25,21)\ni Y^3-X^3Z^2$ より，$\exists C\subset X(11,25,21)$, $C\sim 75A-E$. このとき，$-K_X\sim 57A-E$, $C^2=-\frac{2}{77}$ であった (§1 (2.3) 例 1).

$H^1(\mathcal{O}_{nC})$ は $H^0(\mathcal{O}_X(K_X+nC))$ と dual である。

$H^0(\mathcal{O}_X(K_X+C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(18A)) = S_{18} = 0$,

$H^0(\mathcal{O}_X(K_X+2C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(93A-E)) = [\mathfrak{g}]_{93} = 0$ だが,

$H^0(\mathcal{O}_X(K_X+3C)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(168A-2E)) = [\mathfrak{g}^{(2)}]_{168} \ni d_2 = Y^8 + \cdots$ で

この C の contraction は rational singularity でない事がわかる。$H^1(\mathcal{O}_C) = 0$ を上で示したから, $C \cong \mathbb{P}^1$ である。

$R_s(\mathfrak{g})$ は char(k) = 0 のとき Noetherian でないと予想しているのだが、もしそれが正しければ, (3.4) より, この C の contraction は non-projective という事になる。(*)

$K_X + nC$ は、この例の場合だと, $K_X + 9C \in [C]^\perp$ となるので, $\dim R^1\varphi_*(\mathcal{O}_X)_{\mathfrak{g}}$ を計算するためには, (2.4) より $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X+9C))$ まで計算すれば十分である。

(4.4). (3.1) (III) の条件は, $\exists C$: curve on X, $C \sim nA - rE$, $C^2 < 0$ と同値である。我々の場合, k は素体にとれるから, (3.3) (2) と (3.4) により, $R_s(\mathfrak{g})$ は Noetherian である。

Remark. irreducible curve $C \subset X$, $C \neq E$, $C^2 < 0$ に対し, $H \in \mathrm{Div}(X)$, $[H] \in [C]^\perp$ なる Cartier divisor とする。理論的には, $H^1(\mathcal{O}^*_{nC})$ での H の像を計算する事により, $[C]^\perp$ が effective member をもつかどうか ($\exists N > 0$, NH が base pt. free かどうか) がわかる筈なのだが……。

(*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(18, 53, 29)$ で同様な計算をすると, $C \cong \mathbb{P}^1$ の contraction は non-projective である。

§ 5. Huneke の判定法に関する Remark.

今迄の $R_S(\mathfrak{p})$ の研究に於て，次の Huneke の判定法が基本的役割を果して来たが，この判定法も当然幾何的に見る事が可能で，またそれによって，我々の議論を "homogeneous" な範囲でする事が可能になる．（一般に，graded ring の homog. ideal の minimal reduction は homog. element ではとれないので，以下の元 f, g を homog. element でとれるかどうかは自明ではない。

定理 (5.1) (Huneke の判定法；[7]) $B = k[X,Y,Z]_{(X,Y,Z)}$ または，$k[[X,Y,Z]]$ とする ($B \supset S$)．もし $\exists [f \in \mathfrak{p}^{(k)}B,\ g \in \mathfrak{p}^{(l)}B,\ x \notin \mathfrak{p}B,\ x \in \mathfrak{m}_B,\ \ell_B(B/(f,g,x)) = k \cdot l \cdot \ell_B(B/(\mathfrak{p}B, x))]$
$\Rightarrow$ $R_B(\mathfrak{p}B)$ は Noetherian．k が無限体のとき逆が成立する。

この命題は "homogeneous version" が成立する。

<u>定理</u> (5.2) (Homogeneous Huneke's criterion)

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a,b,c) \subset S$ に対して，次は同値．

(1) $R_S(\mathfrak{p})$ は Noetherian．

(2) $\exists [f \in \mathfrak{p}^{(r)},\ g \in \mathfrak{p}^{(s)},\ x \in (X,Y,Z) \setminus \mathfrak{p}$, <u>homogeneous</u> elements of S, s.t. $\ell_S(S/(f,g,x)) = r \cdot s \cdot \ell_S(S/(\mathfrak{p},(x)))]$

(3) X 上に，異なる irreducible curves C, D (どちらも $\neq E$) で，$C.D = 0$ となるものが存在する。

また，この同値な条件が成立するとき，(3) に於て，

(i) $C^2<0$, $D^2>0$　　または

(ii) $C^2=0=D^2$ (但し，a, b, c がすべて平方数のときに限る)

が成立し，(i) の curve C は unique である。

（証明） (2) の f, g, x をそれぞれ d_1, d_2, e とすると，$l_S(S/(f,g,x))<\infty$ なら，(f,g,x) は regular sequence をなすから，Artin 環 $S/(f,g,x)$ の Poincaré series を計算すると，

$$P(S/(f,g,x),t)=\frac{(1-t^{d_1})(1-t^{d_2})\cdot(1-t^{e})}{(1-t^{a})(1-t^{b})(1-t^{c})}$$ だから，

$$l_S(S/(f,g,x))=\lim_{t\to1}P(S/(f,g,x),t)=\frac{d_1d_2e}{abc}.$$ 一方，

$l(S/\mathfrak{g}+(x))=e$ だから $(x\to t^e\in k[t])$,

$$l_S(S/(f,g,x))=r\cdot s\ l_S(S/\mathfrak{g}+(x))\iff\frac{d_1d_2}{abc}=rs.\quad\text{—}(*)$$

さて，$V_+(f)$, $V_+(g)\subset\mathbb{P}^2$ の proper transform を C, D とすると，$C\sim d_1A-rE$, $D\sim d_2A-sE$ より，

$C\cdot D=\dfrac{d_1d_2}{abc}-rs$. 従って，$(*)\iff CD=0$ となる。

また，$Cl(X)$ の交点理論から，(i), (ii) が成立する事も良いだろう。ゆえに，(5.1) を考えると，(2)$\iff$(3)$\Rightarrow$(1) が成立する。残るは (1)$\Rightarrow$(3) を示すのみである。

(3) が成立しないときは，次のいづれかが成立する。

(a) $^\forall C\subset X$, irred. curve, $C^2>0$.

(b) $\exists C \subset X$, irred. curve, $C^2 \leqq 0$ だが, $\forall D \neq C$, irred. curve, $C.D > 0$.

(a) が成立するとき, $R_s(\mathfrak{g})$ が Noetherian, $R_s[\mathfrak{g}) = S[f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}]$, $\sqrt{abc} < \frac{d_1}{r_1} \leq \frac{d_2}{r_2} \leq \cdots \leq \frac{d_n}{r_n}$ とする ($f_i \in S_{d_i}$). C を $V_+(f_1)$ の proper transform, $C \sim d_1 A - r_1 E$ とすると, 中井判定法より, C は ample. $\therefore \exists N > 0$, $H^0(X, \mathcal{O}_X(NC-E)) \neq 0$. $g \neq 0 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(NC-E))$, $g \in [\mathfrak{g}^{(s)}]_m$ とすると, $\frac{m}{s} < \frac{d_1}{r_1}$ だから, $g \cdot u^s \notin S[f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}]$ となり $f_1 u^{r_1}, \dots, f_n u^{r_n}$ のとり方に矛盾する.

(b) が成立するとき, C を $V_+(f)$ の proper transform, $R_s(\mathfrak{g}) = S[f u^r, g_1 u^{s_1}, \dots, g_n u^{s_n}]$ とおく. $f \in S_d$, $g_i \in S_{e_i}$, $\frac{d}{r} < \frac{e_1}{s_1} \leqq \cdots \leqq \frac{e_n}{s_n}$ としよう. $V_+(g_1)$ の proper transform を D とすると, 中井判定法より, D は ample. $H^1(X, \mathcal{O}_X(ND)) = 0$ となる $N > 0$ をとると, $0 \to \mathcal{O}_X(ND) \to \mathcal{O}_X(ND+C) \to \mathcal{O}_C(ND+C) \to 0$ より, $0 \to H^0(\mathcal{O}_X(ND)) \to H^0(\mathcal{O}_X(ND+C)) \to \underset{\#}{H^0(\mathcal{O}_C(ND+C))} \to \underset{\|}{H^1(\mathcal{O}_X(ND))}$ より, $\exists H \sim ND+C$, $H > 0$, H は C を成分に含まない.

$H \longleftrightarrow h \in [\mathfrak{g}^{(t)}]_\ell$ とすると, $\frac{\ell}{t} < \frac{e_1}{s_1}$, $f \nmid h$ より, $h \notin S[f u^r, g_1 u^{s_1}, \dots, g_n u^{s_n}]$ となり矛盾が生ずる. よって (1) $\Rightarrow$ (3) が証明された.

REFERENCES

[1] M. Artin, Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math. 84 (1962), 485-496.

[2] L. Brenton, Some Algebraicity Criteria for Singular Surfaces, Invent. Math. 41 (1977), 129-147.

[3] S. D. Cutkosky, Symbolic algebras of monomial primes, J. reine angew. Math. 416 (1991), 71-89.

[4] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves, J. Math. Soc. Japan, 43 (1991), 465-481.

[5] S. Goto, K. Nishida and K.-i. Watanabe, Non-Noetherian symbolic blow-ups for space monomial curves, preprint.

[6] 後藤 四郎, Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexample to Cowsik's question, 本報告集

[6a] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[7] C. Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, Mich. Math. J. 34, (1987), 293-318.

[8] 森脇 淳, Extremal Ray と Canonical ring, 本報告集

[9] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, Duke Math. J. 51 (1984), 877-887.

[10] 泊 昌孝, Multiplicity of filtered rings II, 第 11 回可換環論シンポジウム報告集 (1990), 59-70.

[11] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.

[12] O. Zariski, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. 76 (1962), 560-615.