

木の k 段以内平面描画法

城西大(理) 岩村 覚三(K. Iwamura)

城西大(理) 中村 玄(G. Nakamura)

アブストラクト

木の最長パス長を m としたとき $k = \lfloor (m + 1) / 2 \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$

は切り上げをしめす) 段以内に 平面描画可能であることをしめす

。ここで、この上界 k を実現する最長パス長 m の木が存在する。

次に k 段以内に平面描画する多項式アルゴリズムを二つ提案する

。最後に平面グラフの k 段以内平面描画問題 が多項式時間問題

であることを主張する。

1. はじめに

1990年2月、梶谷ら[4]は「 k 段に平面描画できるグラフの構造に関する研究」において、そのような木をマイナーにより特徴付けようとして $m = 4$ の時に反例に出会った。著者らは与えられた木が k 段に平面描画できた状態は最下段に描かれたノードのうち、適当なノードを根としてみると、この木は shelling structure [5] に

なるので、shelling structureとしての構造を利用したヒューリスティックなアルゴリズムを提案したが、「丁度 k 段に描画可能な木」を shelling structure から特徴付けることができなかった。ところが 1990 年 11 月、著者らは「 k 段以内で描画可能な木、平面グラフ」としてアルゴリズムと共に完全に特徴付けることに成功したので報告する。

2・木 k 段以内平面描画可能性のアルゴリズム

与えられた木 T は隣接点リスト [1] で表現されてるものとする。また k 本の線分は上から k 段目、 $(k-1)$ 段目、 \dots 、1 段目と呼ぶ。 T の最長パス長を m とする。この木 $T = T_1$ は $k = \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ 段に描画可能であることが次の様にして解る。先ず全ての葉を最上段においた後これらを全て刈取る。刈り取った後の木を T_2 と呼ぶ。次に T_2 の全ての葉を上から 2 段目においた後これらの葉を刈り取る。刈り取った後の木を T_3 とよぶ。以下同様にして T_k がパスになることが解る。途中 T_i ($1 \leq i < k$) がパスになったら操作をやめる。このときは $(i+1)$ 段に描画可能ということがわかる。このアルゴリズムを刈り取り法とよぶなお、この刈り取り法が多項式時間であることは明か。

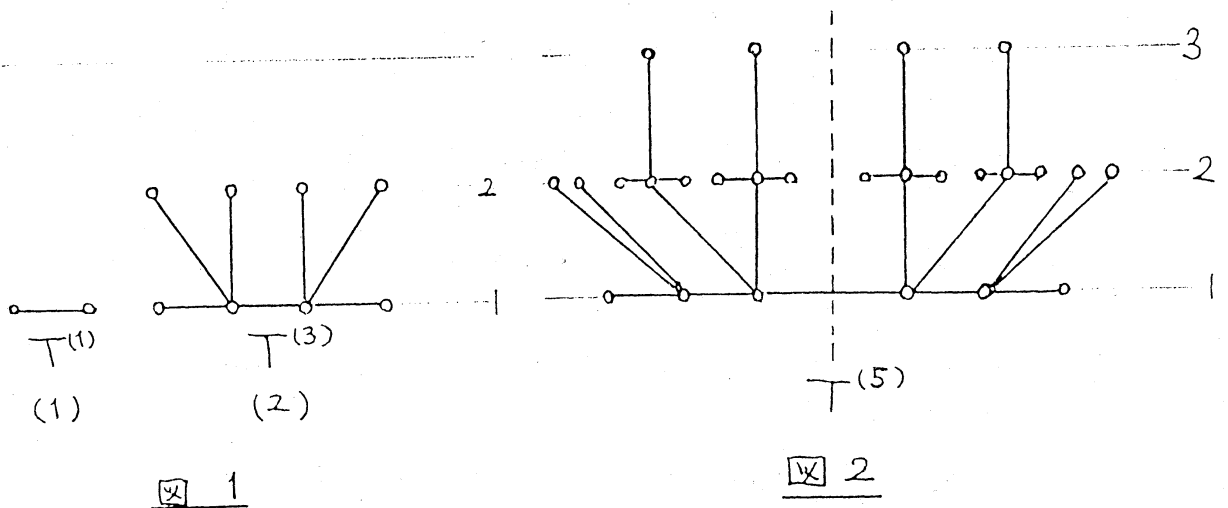
次に極小法とよぶアルゴリズムをしめす。先ず与えられた木 $T = T_1$ に刈り取り法を適用して最長ハズ P_1 を求め、 P_1 を 1 段目におく。 T_1 より P_1 を除去して得られる各部分木を $T_{2,j}$ (j は P_1 上の node で 1 段目に描画した際、左から右に自然についた順序に従って考える) とする。空でない各 $T_{2,j}$ に対し j に隣接している $T_{2,j}$ の node を $n_{2,j}$ とする。 $n_{2,j}$ を通る $T_{2,j}$ の最長ハズ $P_{2,j}$ を求め、 $P_{2,j}$ を第 2 段目に置き $T_{2,j}$ より $P_{2,j}$ を除いてできる部分木を $T_{3,j,1}$ とする。 $n_{2,j}$ と j を隣接させる。以下同様の操作を行う。このようにして段描画された木はどの node もこれ以上、下の段に置けないという意味で極小である。また極小法で用いる段数は刈り取り法の段数以下であることも自明である。極小法は多項式時間アルゴリズムである。

最後に $\lfloor (m+1)/2 \rfloor$ 段必要な木が存在することを見ていこう。 m が奇数の場合を考える。偶数の場合も同様。 $m=1$ の時の木 $T(1)$ は図 1 (1) の通り。 $m=3$ の時は 2 つの $K_{1,3}$ の中心を結んでできた木、図 1 (2)、が $T(3)$ である。 $m=5$ の時は 2 つの $T_{1,32}$ の中心を結んで出来た木を $T(5)$ とする。以下同様に $T(2k-1)$

) ($k = 4, 5, \dots$) を定義する。さて $T(5)$ を極少法により段描画すれば図 2 の様になる。この木はどの node も低い段へ移すことが出来ず、中央縦線にたいして線対称である。この木は段数最小な 3 段に描画された木である。この木の葉を刈り取ると $T(3)$ の段数最小な段描画を得る。同様な事が一般の $T(2k-1)$ にたいして成立しているから $\lceil (m+1)/2 \rceil$ 段必要な最長 n 長さ m (m は奇数) の木が存在することがわかった。

3. 平面グラフ k 段以内平面描画問題

既に [2] において平面グラフの描画が多項式時間で可能なことが示されているので、あたえられた平面グラフから $n-7'$ をなくす様に枝を除いて出来た木に対し本法のいずれかを適用した後、除いた枝を追加すればよいから、原理上多項式時間でとける。



参考文献

- [1] E. Hopcroft, J. Ulman (野崎ら訳); アルゴリズムの設計と解析I, サイエンス社 1977.
- [2] R.E. Bixby & D.K. Wagner; An almost linear-time algorithm for graph realization, WP84348-OR, Institute for econometrics and operations research, University of Bonn, 1984.
- [3] P. Eades & R. Tamassia; Algorithms for drawing graphs: An annotated bibliography, October 1989.
- [4] 梶谷洋三、上野修一、福原 近; k 段に平面描画できるグラフの構造に関する研究、1990年2月東京工業大学大学院電気電子工学専攻.
- [5] B. Korte & L. Lovasz; Greedoids, a structural framework for the greedy algorithm. in: Pulleyblank, W.R. (ed.): Progress in combinatorial optimization, 221-243 (1984) Academic Press.