数理解析研究所講究録
第 802 巻 1992 年 68-82

一部実施 2^m 要因計画の Profile

山本純恭[(1)], 藤井淑夫[(1,2)], 兵頭義史[(1,2)], 弓場　弘[(2)]
(Sumiyasu Yamamoto, Toshio Fujii, Yoshifumi Hyodo, Hiroshi Yumiba)
(国際自然科学研究所[(1)], 岡山理科大学[(2)])

0. はじめに

一部実施 2^m 要因計画では, 高次交互作用が無視可能という先験的仮定のもとで, 直交配列や均斉配列が用いられている.

大きさ n, 制約数 m, 強さ $t=2p$, 指標 λ の 2 水準直交配列 2-OA$(2p,m,\lambda)$ T $(n\times m)$ を一部実施 2^m 要因計画として用いると, $p+1$ 因子以上の交互作用が無視可能という仮定のもとで, p 因子交互作用までの要因効果の互いに相関のない BLUE が得られ, ある意味で最適であるとされている. しかし, 上記の先験的仮定が疑われるとき, いわゆる別名構造の問題となることも知られ, 多くの研究がある.

近年, われわれは, 直交配列の構成, 数え上げ, 分類などの研究を続けている. あるパラメータをもつ可能なすべての直交配列を, 因子の水準 (シンボル) の置換や, 因子 (計画 (配列) T の列) の置換に対する同値関係で分類し, その同値類の個数や代表元を求めているが, そのような場合の例としては 2-OA$(t=2,m=5,\lambda=4)$ がある. 2-OA$(t=2,m=5,\lambda=4)$ の総数は 1932 個であり, これらは上記の同値関係で 11 個の類に分類される (Namikawa, Fujii and Yamamoto (1989)). 表 1 はこの 11 個の類の代表元を示したものである.

ここで以下に述べる問題が発生する. その 1 つは, (a) シンボルの置換や列の置換すなわち水準の変換や, 因子の置換の統計的な意味の問題である. すなわち一般の一部実施 2^m 要因計画の構造に与える影響, 特にこの変換が情報行列に働くとき, 不変性をもつ意味で同値類を特徴付けるものは何であろうか? 従来考察されてきた種々の最適性の基準との関係はいかがであろうか? などの問題である.

いま 1 つは, (b) 例えば上記 11 種類の同値類は, 2 因子交互作用以上の要因効果が無視可能という先験的仮定のもとで主効果の推定が同等の精度でかつ無相関に可能であるという点 (計画のもつ **Frontage** (正面の顔) というか?) で全く同等であるが, この仮定が疑われる条件のもとでも依然として同等であろうか? 同等でないとすれば, (すなわち **Profile** (横顔か後ろ姿) の違いというか?) どの類が最適であろうか? などの問題である.

(a) については, 情報行列に働くシンボルおよび列の置換に対する最大不変量とそれに関連する不変量について述べる. また (b) については, 計画の **Profile** に関する不変量である **Spot** 行列について述べ, その L_1-norm, L_2-norm に基づく最適性の比較検討を行う.

表 1 . 2-OA($t=2, m=5, \lambda=4$) のシンボルおよび列の置換に対する代表元

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
00101	00101	00100	00011	00011	00011	00011	00011	00011	00010	00001
00101	00101	00101	00101	00101	00101	00100	00100	00100	00011	00010
00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00110	00101	00100	00100
00110	00110	00111	00111	00110	00110	00111	00111	00110	00101	00111
01001	01000	01000	01000	01001	01000	01000	01000	01000	01000	01000
01001	01001	01001	01001	01001	01001	01001	01001	01001	01001	01011
01010	01010	01010	01010	01010	01011	01011	01010	01010	01110	01101
01010	01011	01011	01100	01100	01100	01100	01101	01111	01111	01110
10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
10000	10001	10001	10001	10000	10001	10001	10001	10001	10001	10011
10011	10010	10010	10010	10011	10010	10010	10010	10010	10110	10101
10011	10011	10011	10100	10101	10101	10101	10101	10111	10111	10110
11100	11100	11100	11011	11010	11010	11010	11011	11011	11010	11001
11100	11100	11101	11101	11100	11100	11101	11100	11100	11011	11010
11111	11111	11110	11110	11111	11111	11110	11110	11101	11100	11100
11111	11111	11111	11111	11111	11111	11111	11111	11110	11101	11111

(注) 表1は光岡元弘君の作成したプログラムによって求められたものである.

1. 計画の Frontage と Profile

m 個の因子に関する n 個の アッセンブリからなる計画 T を考える. その観測値ベクトル $\boldsymbol{y}(T)$ は線形模型:

$$\boldsymbol{y}(T) = E(T)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}$$

で表されるものとする. ここに, $E(T)$ は既知の計画行列, $\boldsymbol{\theta}$ は母数ベクトル, $\boldsymbol{e}$ は誤差ベクトルである. 通常 $\boldsymbol{\theta}$ は, $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$, $\boldsymbol{\theta}_3$ の 3 つの部分に分けられ, $\boldsymbol{\theta}_1$ は推定の対象となる未知の母数ベクトル, $\boldsymbol{\theta}_2$ は関心の対象でない未知の母数ベクトル, $\boldsymbol{\theta}_3$ は既知のベクトルで一般性を失うことなく, ゼロと仮定出来る部分である.

このとき, 観測値ベクトル $\boldsymbol{y}(T)$ は,

$$\boldsymbol{y}(T) = E_1(T)\boldsymbol{\theta}_1 + E_2(T)\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{e}$$

となり, 情報行列 $M(T)$ は,

$$M(T) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

のように分割される．ここに，$M_{ij} = E_i(T)^t E_j(T)$ ，$i, j = 1, 2$ である．

定義 1．1. 部分行列 M_{11} を $\boldsymbol{\theta}_1$ の推定における計画 T の **Frontage** という．それは，$\boldsymbol{\theta}_1$ の推定に直接関係する情報行列 $M(T)$ の部分行列である．

定義 1．2. 情報行列 $M(T)$ の残りの部分 $\begin{bmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{\theta}_1$ の推定における計画 T の **Profile** という．

M_{11} が正則であり，$\boldsymbol{\theta}_2$ の存在が無視可能ならば，$\boldsymbol{\theta}_1$ の BLUE は $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = M_{11}^{-1} E_1(T)^t\, \boldsymbol{y}(T)$ で与えられる．$\boldsymbol{\theta}_2$ の存在が無視可能でないとき，$\mathrm{Exp}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_1] = \ \boldsymbol{\theta}_1 + M_{11}^{-1} M_{12}\, \boldsymbol{\theta}_2$ となり，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ は不偏でない．そのとき係数行列 $A = M_{11}^{-1} M_{12}$ は計画 T の $\boldsymbol{\theta}_1$ と$\boldsymbol{\theta}_2$ に関する Alias 行列と呼ばれている．

従来の研究は主として，強さ偶数の直交配列および均斉配列から導かれる直交計画，均衡型計画などのように，計画の **Frontage** の構成問題に重点を置いたものが多い．

$\boldsymbol{\theta}_1$ を推定する場合，計画 T の **Frontage** M_{11} は $M(T)$ の重要な部分を構成するが，$\boldsymbol{\theta}_2$ が無視可能でないとき，その計画の **Profile** を無視することは出来ない。

例えば，一部実施 2^m 要因計画 T において，$\boldsymbol{\theta}_1$ は q 因子交互作用までの要因効果のベクトル，$\boldsymbol{\theta}_2$ は $(q+1)$ 因子から p 因子交互作用 $(q < p \leq m)$ までの要因効果のベクトルとする．情報行列を $M(p, T)$ とすると，この計画の **Frontage** はその部分行列 $M(q, T)$ であり，$M(q, T)$ を除いた $M(p, T)$ の残りの部分が **Profile** である．

表 1 に示す 2 シンボル直交配列 2-OA$(t = 2, m = 5, \lambda = 4)$ の 11 個の代表元は，一般平均と 5 個の因子の主効果を推定するための直交計画としては，その **Frontage** は全く同一である．しかし，どのような場合に，どの計画が最良となるかを決定するためには，それらの **Profile** の構造に注意を払わなくてはならない．

これら 11 個の代表元の **Frontage** および **Profile** (情報行列) は Appendix を参照．

2. 2^m 要因計画

2 水準 (0 または 1) の m 個の因子 $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ に関する 2^m 要因計画を考える．$\theta\{\phi\}$ を一般平均，$\theta\{t_1\}$ を因子 $F(t_1)$ の主効果，一般に，$\theta\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ $(2 \leq k \leq p \leq m)$ を k 個の因子 $F(t_1), F(t_2), \ldots, F(t_k)$ の k 因子交互作用とする．

n 個のアッセンブリ ((0,1)-ベクトル) からなる 2^m 要因計画 T およびそれに関する観測値ベクトル $\boldsymbol{y}(T)$ をそれぞれ

$$T = \begin{bmatrix} j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_m^{(1)} \\ \vdots \\ j_1^{(\alpha)}, j_2^{(\alpha)}, \ldots, j_m^{(\alpha)} \\ \vdots \\ j_1^{(n)}, j_2^{(n)}, \ldots, j_m^{(n)} \end{bmatrix}, \text{および } \boldsymbol{y}(T) = \begin{bmatrix} y(j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_m^{(1)}) \\ \vdots \\ y(j_1^{(\alpha)}, j_2^{(\alpha)}, \ldots, j_m^{(\alpha)}) \\ \vdots \\ y(j_1^{(n)}, j_2^{(n)}, \ldots, j_m^{(n)}) \end{bmatrix}$$

とする. このとき, 観測値ベクトル $\boldsymbol{y}(T)$ は, 計画行列 $E(p,T)$ を用いて

$$\boldsymbol{y}(T) = E(p,T)\boldsymbol{\theta}(p) + \boldsymbol{e}$$

と表される. ここに,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(p)^t = \Big(&\theta\{\phi\}, \theta\{1\}, \ldots, \theta\{m\}, \theta\{1,2\}, \ldots, \theta\{m-1, m\}, \\ &\ldots, \theta\{1,2,\ldots,p\}, \ldots, \theta\{m-p+1, m-p+2, \ldots, m\}\Big) \end{aligned}$$

は p 因子交互作用までの要因効果のベクトルであり, $\boldsymbol{e}$ は誤差ベクトルである. また α 番目のアッセンブリに対応する計画行列 $E(p,T)$ の α 行は,

$$\begin{aligned} &\Big(1, d(j_1^{(\alpha)}), \ldots, d(j_m^{(\alpha)}), d(j_1^{(\alpha)})d(j_2^{(\alpha)}), \ldots, d(j_{m-1}^{(\alpha)})d(j_m^{(\alpha)}), \\ &, \ldots, d(j_1^{(\alpha)})d(j_2^{(\alpha)}) \cdots d(j_p^{(\alpha)}), \ldots, d(j_{m-p+1}^{(\alpha)})d(j_{m-p+2}^{(\alpha)}) \cdots d(j_m^{(\alpha)})\Big) \end{aligned}$$

である. ここに $d(0) = -1, d(1) = 1$ である.

$\boldsymbol{\theta}(p)$ を推定するための正規方程式は,

$$M(p,T)\hat{\boldsymbol{\theta}}(p) = E(p,T)^t \, \boldsymbol{y}(T)$$

で与えられ, $M(p,T) = E(p,T)^t E(p,T)$ は $\boldsymbol{\theta}(p)$ に関する計画 T の情報行列と呼ばれる.

$\varepsilon(U,V)$ を 情報行列 $M(p,T)$ における $\theta\{U\}$ と $\theta\{V\}$ に対応する行と列にある要素とする. このとき,

$$\varepsilon(U,V) = \sum_{\alpha} \prod_{t \in U} d(j_t^{(\alpha)}) \prod_{t' \in V} d(j_{t'}^{(\alpha)})$$

であり, $d(j) = \pm 1$ であるから $\varepsilon(U,V)$ は, 2 つの集合 U と V の対称差 $K = U \Delta V$ に対応する T の列のみの関数:

$$\varepsilon(U,V) = \sum_{\alpha} \prod_{i \in K} d(j_i^{(\alpha)}) = \gamma\{K\}$$

で与えられる.

3. 情報行列の特性ベクトル

$\boldsymbol{\gamma}(T)$ を情報行列 $M(m,T)$ の第 1 列からなるベクトルとする. すなわち

$$\boldsymbol{\gamma}(T)^t = \left(\boldsymbol{\gamma}_\phi(T)^t, \boldsymbol{\gamma}_1(T)^t, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_m(T)^t\right)$$

ここに, $\boldsymbol{\gamma}_k(T)^t = \left(\gamma\{1,2,\ldots,k\}, \gamma\{1,2,\ldots,k+1\}, \ldots, \gamma\{m-k+1, m-k+2, \ldots, m\}\right)$.

$\boldsymbol{\gamma}(T)$ は $M(m,T)$ を完全に決定することから,

定義 3. 1. $\boldsymbol{\gamma}(T)$ を情報行列 $M(m,T)$ の**特性ベクトル**という.

濃度 k の $\Omega = \{1,2,\ldots,m\}$ の部分集合 K に対応する $\gamma\{K\}$ の $M(m,T)$, $M(m,T)$ の u 因子と v 因子交互作用に対応する (u,v) ブロック, および $M(p,T)$ の内部全体における頻度はそれぞれ次のように与えられる:

補題 3. 1. (a) $M(m,T)$ における $\gamma\{K\}$ の頻度はすべて 2^m 個であって, Ω の 部分集合 K に関係しない.

(b) $M(m,T)$ の (u,v) ブロックにおける $\gamma\{K\}$ の頻度は,

$$\begin{aligned}\psi(k:u,v) &= \binom{m-k}{\frac{u+v-k}{2}}\binom{k}{\frac{k-|v-u|}{2}}, \quad u+v-k \text{ が偶数のとき}, \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad u+v-k \text{ が奇数のとき}\end{aligned}$$

である. この頻度は, u,v,k の関数であり, 濃度 $|K|=k$ を通じてのみ, 集合 K に関係していることを意味する. また $\psi(k:u,v) = \psi(k:m-u,m-v)$ が成り立つ.

(c) $M(p,T)$ における $\gamma\{K\}$ の頻度は,

$$\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=0}^{p}\psi(k:u,v), \ 0 \le k \le \min(2p,m)$$

によって与えられる. ここに $\binom{n}{r}$ は通常の制約を満たす 2 項係数である.

$\boldsymbol{\gamma}^*(T)$ を集合 $K \in 2^\Omega$ の 2 進の順に $\boldsymbol{\gamma}(T)$ の成分を並べ変えたベクトルとし, $\boldsymbol{\nu}(T)$ を配列（計画）T のいわゆるモジュラーベクトルとする. 2 進の順に並べられた $\boldsymbol{\nu}(T)$ の各要素 $\nu(j_1,j_2,\ldots,j_m)$ は T におけるアッセンブリ $(j_1,j_2,\ldots,j_m)$ の出現頻度（もちろん 0 も含む）を表す. $\boldsymbol{\nu}(T)$ は配列（計画） T と同値である.

補題 3. 2. $\boldsymbol{\gamma}^*(T)$ と $\boldsymbol{\nu}(T)$ は次の関係式で結ばれる:

$$\boldsymbol{\gamma}^*(T) = D_{(m)}\boldsymbol{\nu}(T), \quad \boldsymbol{\nu}(T) = \frac{1}{2^m}D_{(m)}^t\boldsymbol{\gamma}^*(T)$$

ここに, $D_{(m)}$ は行列 $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ の m 重クロネッカー積 $D \otimes D \otimes \cdots \otimes D$ である. (Yamamoto, Shirakura and Kuwada (1975) の定理 3. 2 を参照).

4. シンボル(水準)の置換群

$\boldsymbol{\sigma}$ を計画 T のシンボルの置換群であるとし, σ_i を第 i 因子におけるシンボルの置換とする.

このとき, 変換された計画 $\sigma_i T$ のモジュラーベクトルは,

$$\boldsymbol{\nu}(\sigma_i T) = (I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes I_2)\boldsymbol{\nu}(T)$$

で与えられる. そのとき, 変換された情報行列の**特性ベクトル** $\boldsymbol{\gamma}^*(\sigma_i T)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^*(\sigma_i T) &= (D \otimes D \otimes \cdots \otimes D)(I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes I_2)\boldsymbol{\nu}(T) \\ &= (I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes I_2)(D \otimes D \otimes \cdots \otimes D)\boldsymbol{\nu}(T) \\ &= (I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes I_2)\boldsymbol{\gamma}^*(T) \end{aligned}$$

このことは, シンボルの置換 σ_i によって i を含む Ω のすべての部分集合 K に対応する $\gamma\{K\}$ の符号が変わることを意味する.

$|\boldsymbol{\gamma}(T)|$ を $\boldsymbol{\gamma}(T)$ の成分の絶対値からなるベクトルとする. このとき,

補題 4. 1. ベクトル $|\boldsymbol{\gamma}(T)|$ は計画 T のシンボル（水準）の置換群 $\boldsymbol{\sigma}$ に対して不変である.

補題 4. 2. 情報行列 $M(m,T)$ の**特性ベクトル**に関係するベクトルの集合 $[\boldsymbol{\gamma}(T)] = \{\boldsymbol{\gamma}(\sigma T) | {}^\forall\sigma \in \boldsymbol{\sigma}\}$ は計画 T のシンボル（水準）の置換群 $\boldsymbol{\sigma}$ に対する最大不変量である.

5. 列(因子)の置換群

$\boldsymbol{\tau} \ni \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(m) \end{pmatrix}$ を計画の因子（列）の集合 Ω に施される列の置換群とする.

置換 τ は $\boldsymbol{\gamma}(T)$ を $\boldsymbol{\gamma}(\tau T)$ に移し, その成分ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_k(T)$ を $\boldsymbol{\gamma}_k(\tau T) = P_k(\tau)\boldsymbol{\gamma}_k(T)$ に移す. ここに, $P_k(\tau)$ は濃度 k の Ω の部分集合全体の族 Ω_k 上に τ によって誘導された $\binom{m}{k} \times \binom{m}{k}$ の置換行列である. 明らかに次の 3 つの補題が成り立つ.

補題 5. 1. すべての u, v, k に対して, 情報行列 $M(m,T)$ の (u,v) ブロック における $\gamma\{K\}$, $K \in \Omega_k$ の頻度の分布は, 計画 T の列の置換群 $\boldsymbol{\tau}$ に対して不変である.

補題 5. 2. すべての u, v, k に対して, 情報行列 $M(m,T)$ の (u,v) ブロック における非零の $\gamma\{K\}$ の頻度の分布は, 計画 T の列の置換群 $\boldsymbol{\tau}$ に対して不変である.

補題 5. 3. 計画 T の情報行列 $M(m,T)$ の**特性ベクトル** $\boldsymbol{\gamma}(T)$ に関する集合 $\left[\boldsymbol{\gamma}(T)\right] = \{\boldsymbol{\gamma}(\tau T) | {}^\forall\tau \in \boldsymbol{\tau}\}$ は列の置換群 $\boldsymbol{\tau}$ に対する最大不変量である.

6. SC-置換群に対する不変量

一部実施 2^m 要因計画 T 上に施されたシンボルと列の置換群 (SC-置換群) $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\tau}$ は情報行列 $M(m,T)$ や**特性ベクトル** $\boldsymbol{\gamma}(T)$ の上に変換群をもたらす. すなわち,

定理 6. 1. すべての u, v, k に対して, 情報行列 $M(m,T)$ の (u,v) ブロック における $|\gamma\{K\}|$, $K \in \Omega_k$ の頻度の分布は, 計画 T の SC-置換群 $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\tau}$ に対して不変である.

定理 6. 2. すべての u, v, k に対して, 情報行列 $M(m,T)$ の (u,v) ブロック における非零の $\gamma\{K\}$ の頻度の分布は, 計画 T の SC-置換群 $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\tau}$ に対して不変である.

定理 6. 3. 計画 T の情報行列 $M(m,T)$ の特性ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(T)$ の集合 $\left[\!\left[\boldsymbol{\gamma}(T)\right]\!\right] = \{\boldsymbol{\gamma}(\sigma\tau T) | {}^\forall\sigma \in \boldsymbol{\sigma}, {}^\forall\tau \in \boldsymbol{\tau}\}$ は SC-置換群 $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\tau}$ に対する最大不変量である.

7. 2^m 要因計画の Profile に関する不変量

2^m 要因計画 T の情報行列 $M(p,T)$ の (u,v) ブロックに散在する非零の $\gamma\{K\}$ の頻度を z_{uv} とする. このとき, $(p+1) \times (p+1)$ 行列

$$Z(p,T) = ||z_{uv}||,\ 0 \le u, v \le p\ (\le m)$$

は配列 (計画) T の SC-置換群に対する不変量である (定理 6. 2).

$M(m,T)$ の対角成分は計画 T に関係なく常に $\gamma\{\phi\} = n$ で, 非零である. したがって, $M(p,T)$ の対角線外の非零要素に関係する **Spot** 行列と呼ぶ行列を次のように定義する.

$$S(p,T) = ||s_{uv}||,\ s_{uv} = z_{uv} - \delta_{uv}\binom{m}{u},\ 0 \le u, v \le p\ (1 \le p \le m)$$

$S(p,T)$ は SC-置換群に対する不変量であり, ある意味で理想的な直交計画からのズレを表す量と言える.

表 2 は 2-OA$(t=2, m=5, \lambda=4)$ の 11 個の代表元のすべての $S(p,T)$ を含む **Spot** 行列 $S(m,T)$ である.

表 2. 2-OA($\boldsymbol{t}$=2, $\boldsymbol{m}$=5, $\boldsymbol{\lambda}$=4) の 11 個の同値類の $\boldsymbol{S(m,T)}$

	[1]						[2]						[3]						[4]				
0	0	0	2	1	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	1
0	0	6	4	4	1	0	0	9	8	6	2	0	0	3	0	2	0	0	0	9	0	11	0
0	6	6	12	4	2	0	9	12	18	8	3	0	3	0	6	0	1	0	9	0	28	0	3
2	4	12	6	6	0	3	8	18	12	9	0	1	0	6	0	3	0	3	0	28	0	9	0
1	4	4	6	0	0	2	6	8	9	0	0	0	2	0	3	0	0	0	11	0	9	0	0
0	1	2	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	3	0	0	0

[5]						[6]						[7]						[8]					
0	0	0	4	1	0	0	0	0	4	2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	2	2	0
0	0	12	4	8	1	0	0	12	8	8	2	0	0	12	0	8	0	0	0	6	8	4	2
0	12	6	24	4	4	0	12	12	24	8	4	0	12	0	24	0	4	0	6	12	12	8	2
4	4	24	6	12	0	4	8	24	12	12	0	4	0	24	0	12	0	2	8	12	12	6	0
1	8	4	12	0	0	2	8	8	12	0	0	0	8	0	12	0	0	2	4	8	6	0	0
0	1	4	0	0	0	0	2	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	2	2	0	0	0

[9]						[10]						[11]					
0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	3	8	7	2	0	0	0	4	0	1	0	0	0	0	5	0
0	3	12	16	8	1	0	0	6	0	4	0	0	0	0	10	0	0
1	8	16	12	3	0	0	4	0	6	0	0	0	0	10	0	0	0
2	7	8	3	0	0	1	0	4	0	0	0	0	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

任意の $p\ (2 \le p \le 5)$ に対して **Profile** に関係する $S(p,T)$ が一致する計画が全く存在しないことがわかる. 従って後者の不変量が SC-置換群に対する最大不変量である. 少なくとも 2-OA$(t=2, m=5, \lambda=4)$ に関する限り SC-置換に対して同値な強さ 2 の直交配列の類を特徴付ける最大不変量と言える. この最大不変量 $S(p,T)$ を用いて 11 個の類の優劣を比較するには, 例えば以下のようなノルム

$$||S(p,T)||_1 = \sum_{u=0}^{p}\sum_{v=0}^{p} |s_{uv}|, \text{ または } ||S(p,T)||_2 = \left\{\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=0}^{p} s_{uv}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

などが有用であろう. これら 2-OA$(t=2, m=5, \lambda=4)$ の 11 個の同値類に関するそれらのノルムを 表 3 に示す.

表 3. 2-OA$(t=2, m=5, \lambda=4)$ の 11 個の同値類のノルム

$||S(p,T)||_1$

p	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
2	18	30	6	18	30	36	24	24	18	6	**0**
3	60	100	**20**	80	100	120	80	80	80	**20**	**20**
4	90	150	**30**	120	150	180	120	120	120	**30**	**30**
5	96	160	**32**	128	160	192	128	128	128	**32**	**32**

$||S(p,T)||_2$

p	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
2	10.39	17.49	4.24	12.73	18.00	20.78	16.97	14.70	12.73	6.00	**0.00**
3	21.73	35.27	**9.59**	41.81	39.70	43.45	38.37	28.00	30.79	10.20	14.14
4	24.70	40.17	**10.86**	46.39	45.01	49.40	43.45	32.00	34.64	11.75	15.81
5	24.90	40.50	**10.95**	46.60	45.39	49.80	43.82	32.25	34.81	11.83	15.87

(注) 太文字はそれぞれの場合の最小ノルムを表す.

参考文献

[1] Namikawa, T., Y. Fujii and S. Yamamoto (1989). Computational study on the classification of two-symbol orthogonal arrays of strenght t, $m = t + e$ constraints for $e \leq 3$. SUT J. Math., 25, 179-195.

[2] Yamamoto, S., T. Shirakura and M. Kuwada (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math., 27, 143-157.

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs

[1]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
2	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
3	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
4	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·
12	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
13	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
14	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·
15	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·
23	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
24	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
45	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
123	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
124	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
135	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
145	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
234	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·
235	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·
245	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
345	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
1234	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
2345	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

[2]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8
2	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8
3	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·
4	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·
12	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·
13	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8
14	·	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	·	·
15	·	·	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	·
23	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8
24	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	8	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·
25	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	8	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	16	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	16	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·
45	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
123	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·
124	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	16	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	16	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	8	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·
135	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	8	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·
145	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
234	·	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	·	·
235	·	·	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	·
245	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
345	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
1234	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·
1245	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·
1345	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·
2345	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs - continued

[3]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	16	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	.	.	.	16	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.
12	.	.	.	16	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	16	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16
123	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
124	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
125	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
134	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
135	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
145	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.
234	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.
235	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.
245	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	16	.	.
345	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	16	.	.	.
1234	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.
1235	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.
1245	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	16	.	.	.
1345	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	16	.	.
2345	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.
12345	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16

[4]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8
1	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	.
2	.	.	16	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	.	.
3	.	.	.	16	.	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	.	.	.
4	.	.	.	.	16	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	.	.
5	.	.	.	.	.	16	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	.
12	.	.	.	8	8	8	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	.	.	.	.	.	.
13	.	.	8	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	8	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.
15	.	.	8	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.
23	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	.	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8
35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8
45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8
123	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
124	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
125	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
134	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
135	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
145	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
234	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	8	.	.
235	.	.	.	.	.	.	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	8	.	.
245	.	.	.	.	.	.	.	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	8	.	.
345	.	.	.	.	.	.	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	8	8	8	.	.	.
1234	.	.	.	8	8	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	16	.	.	.	.	.
1235	.	.	.	8	-8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	16	.	.	.	.
1245	.	.	.	-8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	16	.	.	.
1345	.	.	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	16	.	.
2345	.	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.
12345	-8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs - continued

[5]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
2	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·
3	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·
4	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·
12	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·
13	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·
14	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·
15	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·
23	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
24	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
45	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
123	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
124	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
135	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
145	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
234	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·
235	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·
245	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·
345	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·
1234	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·
2345	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

[6]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8
2	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	8	·	·	·	8
3	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	8	·	·	·	8	·
4	·	·	·	·	16	·	8	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	8	·	·	8	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·	·	·
12	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	8	·	·	·	·	·	8	8	·
13	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	8	·	·	8
14	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	8	·	8	·	·	·	·
15	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	8	8	·	8	·	·	·	·	·
23	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·
24	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8
25	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	8	·	·	8	·	·	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	16	·	·	8	8	·	·	·	8	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	8	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	8
45	·	·	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
123	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	8	·	·
124	8	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	8	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	8	·	·	·	8	8	·	·	16	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	8	8	·	·	·	8	·	·	8	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·
135	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·
145	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
234	·	·	·	·	·	8	·	8	8	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·	·
235	·	·	·	·	8	·	8	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·
245	8	·	·	8	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·
345	·	8	8	·	·	·	·	·	8	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·
1234	·	·	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	8	·	·	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	8	·	16	·	·	·	·
1245	·	8	·	·	·	8	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·
1345	8	·	·	·	8	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·
2345	8	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	8	8	·	·	·	·	8	·	·	·	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs - continued

[7]

θ{U} \ θ{V}	ϕ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
ϕ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·
3	·	·	·	16	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	-8	·	·
4	·	·	·	·	16	·	8	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·
12	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·
13	·	·	8	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	-8	·	·	·	·	·	·
14	·	·	8	·	·	-8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·
15	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·
23	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8
24	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	-8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
45	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
123	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·
124	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	-8	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
135	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
145	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·
234	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	-8	8	·	·	·
235	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	-8	·	·	8	·	·
245	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	8	·	·
345	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·
1234	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	8	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	-8	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	8	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·
2345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

[8]

θ{U} \ θ{V}	ϕ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
ϕ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·
2	·	·	16	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	8
4	·	·	·	·	16	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	-8
5	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·
12	·	·	·	8	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
13	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·
14	·	·	8	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	-8	·
15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·
23	·	8	·	·	·	·	·	·	·	-8	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·
24	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·
25	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	8
45	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	8
123	8	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·
124	8	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·
135	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·
145	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	-8	·	·	·	·	·	·	·	8	·
234	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
235	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	8	·	·
245	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·
345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	8	8	·	·	·
1234	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	-8	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	16	·	·	·	·
1245	8	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	16	·	·
2345	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs - continued

[9]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	-8
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	-8	·
2	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·
3	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·
4	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	-8
5	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	-8
12	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·
13	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·
14	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	-8	·
15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	-8	·
23	·	8	·	·	·	·	·	·	-8	-8	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
24	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·
25	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·
34	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·
45	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	8
123	8	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
124	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·
134	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·
135	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·
145	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	-8	-8	·	·	·	·	·	·	8	·
234	·	-8	·	·	·	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
235	·	-8	·	·	·	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·
245	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	16	·	·	·	·	8	·	·
345	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	16	·	·	8	·	·	·
1234	-8	·	·	·	8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	-8	·	·	·	-8	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	16	·	·
2345	·	-8	·	·	·	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	-8	·	·	·	-8	-8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

[10]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16
12	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
13	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
14	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·
23	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
24	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·
34	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·
45	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·
123	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
124	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·
134	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
135	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·
145	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·
234	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
235	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·
245	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·
345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·
1234	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·
2345	·	·	·	·	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	·	·	·	·	·	-16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16

APPENDIX. Information matrices of 11 representative designs - continued

[11]

θ{U} \ θ{V}	φ	1	2	3	4	5	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345
φ	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16
1	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
2	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·
3	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·
4	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·
12	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·
13	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·
14	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·
15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
23	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
24	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
45	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
123	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
124	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
125	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
134	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
135	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
145	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
234	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·
235	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·
245	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·
345	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·
1234	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·
1235	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·
1245	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·
1345	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·
2345	·	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·
12345	16	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16