数理解析研究所講究録
第 803 巻 1992 年 151-163

On Even Canonical Surfaces with Small K^2

九州大学教養部　今野一宏　(Kazuhiro Konno)

Introduction.

C 上定義された非特異極小一般型代数曲面を S、その標準束を K と書く。標準一次系 $|K|$ に付随する有理写像 Φ_K がその像 X の上に双有理であるとき、[4] に従って S を標準曲面（ canonical surface ）と呼ぶ。記号 $Q(X)$ でもって X を通る全ての 2 次超曲面の交わりを表し、これを X の 2 次包と呼ぶことにする。

S を標準曲面としよう。Enriques-Babbage-Petri の定理の 2 次元版を安直に想像してみれば

(0.1)　$Q(X)=X$ とならない曲面 S は「trigonal または 平面 5 次曲線的な曲面」である。この例外的な曲面に対しては $Q(X)$ は 3 次元である

となろう。「trigonal または平面 5 次曲線的な曲面」とは何か？という事は、もしこれが定理に昇格すれば自然にわかるはずである。余りに安易だから、少し遠慮して、種数が 4 以下ならば trigonal curve であることに着目して、

(0.2)　S の不変量が「小さい」ならば「trigonal curve 的曲面」で $Q(X)$ は 3 次元である

としてみる。こうすると少し期待が持てる。(その理由は、傾き $K^2/\chi(\mathcal{O}_S)$ が小さいときには曲線とのアナロジーがきく、という一般型曲面の経験則があるからである。) 多少のアイマイさを取り除いて述べれば、１０年以上も前に Miles Reid によって提出された次の予想となる ([8], [9])：

(0.3) Reid 予想：　標準曲面 S に対して次のどちらかが成立する：

(1)　$K^2 \geq 4p_g - 12$

(2) 標準像 X を含む $Q(X)$ の既約成分 $W(X)$ は 3 次元である。

残念ながら今のところ未解決だし、有力な解決策も見つかっていない。このような場合には、「信頼できる例」で検証しておく事が実験数学の立場からいって自然であろう。

本論では、偶曲面を実験材料としたひとつの実験結果を報告する。偶曲面のみを考えても曲面の地誌学における大事な直線（例えば $K^2 = 2p_g - 4$ や $K^2 = (8/3)p_g - 8$ ）が自然に現れる（ [4], [7] を見よ）から、偶曲面は「信頼できる例」になり得る、と思う。

§1. **標準像の2次包について**

この節では、多少なりとも一般的に言える事柄を準備する。S を標準曲面、X をその標準像、$Q(X)$ を X の2次包とする。$Q(X)$ の X を含む既約成分を $W(X)$ とする。

(1.1) 補題： S を $K^2 \leq 4p_g - 12 + q$ を満たす標準曲面とすれば、$W(X)$ は3次元以下である。

証明： $\dim W(X) = w$ とおく。$W(X)$ は $\mathbf{P}^N$, $N = p_g - 1$, の非退化な部分多様体なので

$$h^0(\mathbf{P}^N, \mathcal{I}_{W(X)}(2)) \leq (N+1)(N+2)/2 - \left\{(w+1)(N+1) - \frac{1}{2}w(w+1)\right\},$$

が成立する。ここに $\mathcal{I}_{W(X)}$ は $W(X)$ の $\mathbf{P}^N$ におけるイデアル層である。一方

$$h^0(2K) \geq \dim \mathrm{Im}\left\{H^0(\mathbf{P}^N, \mathcal{O}(2)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(2))\right\}.$$

が成立するが、$h^0(2K) = K^2 + \chi(\mathcal{O}_S)$ かつ $X \subset W(X) \subset Q(X)$ なので

$$K^2 \geq (w+1)p_g - \frac{1}{2}w(w+1) - (1 - q + p_g)$$

を得る。仮定より $K^2 \leq 4p_g - 12 + q$ だから $(w-4)(2N - w - 3) + 2 \leq 0$ を得る。従って $w \leq 3$ でなければならない。Q.E.D.

(1.2) 補題： 標準曲面 S が、その一般メンバーが trigonal または平面5次曲線であるようなペンシル $\{D\}$ を持つならば、$W(X)$ は3次元である。

証明： X が $Q(X)$ の既約成分であるとして、矛盾を導けば良い。必要ならば $|D|$ の底点を blowing-ups で解消して、非特異射影曲線 C 上への正則写像 $f: S \to C$ があると仮定してよい。$\mathcal{E}$ を $H^0(C, f_*\mathcal{O}(K))$ で生成される $f_*\mathcal{O}(K)$ の部分層とし、$r = \mathrm{rk}(\mathcal{E})$ とおく。S は標準曲面だから、制限写像 $H^0(K) \to H^0(K_D)$ の階数は少なくとも3である。よって $r \geq 3$ である。自然な層準同型 $f^*\mathcal{E} \subset f^*f_*\mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K)$ は有理写像 $h: S \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ を誘導する。Φ_T をトートロジカル因子 $T \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)|$ から誘導される

$\mathbf{P}(\mathcal{E})$ の有理写像とすれば、作り方から S の標準写像Φ_K は、合成写像 $h \circ \Phi_T$ と同一視できる。Λ を X を通る2次超曲面たちからなる線形系を $\mathbf{P}(E)$ に引き戻した $|2T|$ の部分線形系とする。仮定より、$\Sigma := h(S)$ は、Λ の全てのメンバーの交わりの既約成分である。$|2T|$ のメンバーは相対2次超曲面（すなわち $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to C$ のファイバーでみると2次超曲面）である事に注意する。S は標準曲面だから、$\Sigma \to C$ の一般ファイバーは D と双有理である。D は trigonal または平面5次曲線なので、Enriques-Babbage-Petri の定理より2次超曲面の交わりとしては得られない。D' は Dの射影による像だから、D' も2次超曲面の交わりとしては得られない。従って Σ は Λ のメンバーの交わりとしては得られない。これは仮定に矛盾する。Q.E.D.

これらの補題より、次を得る。

(1.3) 命題： $K^2 \leq 4p_g - 12 + q$ なる標準曲面 S が、trigonal または平面5次曲線のペンシルを持てば、$W(X)$ は3次元である。

§2. 半標準写像による分類

第2 Stiefel-Whitney 類が0であるような非特異射影曲面を偶曲面と呼ぶ [4] 。本節と次節において、不正則数0の偶標準曲面に対して Reid 予想 (0.3) を考える。そのためには不変量に対して $K^2 < 4p_g - 12$ を仮定して、$\dim W(X) = 3$ を導けば良い。

S を偶標準曲面で、その不変量が $K^2 \leq 4p_g - 12, q = 0$ を満たすものとする。第2 Stiefel-Whitney 類が0だから、$K = 2L$ となる直線束 L が存在する。K は nef だから L もそうである。$n = h^0(L) - 1$ とおく。

(2.1) 命題： S を上記のものとして、半標準束 L に付随する有理写像$\Phi_L : S \to \mathbf{P}^n$ を考える。また、$V = \Phi_L(S)$ とおく。この時、$L^2 \leq 4n - 4$ であって Φ_L は以下のいずれかを満たす。

(I) Φ_L は V の上への双有理写像である。

(II) Φ_L は V の上への次数2の正則写像を誘導する。この時 V は次数 $2n-2$ の K3 曲面である。

(III) Φ_L は V の上への次数3の有理写像を誘導し、V は線織曲面に双有理である。

(IV) Φ_L は V の上への次数4の正則写像を誘導し、V は次数 $n-1$ である。

(V) Φ_L は種数3または4の非超楕円的な線形ペンシルを誘導する。

もし、$K^2 < 4p_g - 12$ ならば $L^2 \leq 4n - 6$ であって、(II) と (IV) は起こらない。

証明： S は偶曲面なので、L^2 は正の偶数である。従って、ある整数 k によって $L^2 = 4n - 2k$ と書ける。Riemann-Roch の定理より

$$2h^0(L) - h^1(L) = -L^2/2 + \chi(\mathcal{O}_S). \tag{2.1.1}$$

を得る。$4L^2 = K^2 \leq 4p_g - 12$ なので $p_g \geq 4n - 2k + 3$ となる。すると (2.1.1) より $k \geq h^1(L) + 2 \geq 2$ だから、$L^2 \leq 4n - 4$ を得る。等号成立は $K^2 = 4p_g - 12$ かつ $H^1(L) = 0$ の時のみである。

まず、V が曲面の場合を考える。V は非退化曲面だから、$\deg V \geq n - 1$ である。よって

$$L^2 \geq (\deg \Phi_L)(\deg V) \geq (n-1) \deg \Phi_L. \tag{2.1.2}$$

と $L^2 \leq 4n - 4$ から $\deg \Phi_L \leq 4$ が従う。$\deg \Phi_L = 1$ なら (I) である。$\deg \Phi_L = 2$ とすれば、$\deg V \leq 2n - 2$ である。しかも S は標準曲面だから、線織曲面の2重被覆にはなり得ず、従って V は線織曲面と双有理になってはいけない。もし $\deg V < 2n - 2$ なら、V は線織曲面と双有理だから不可能である。よって $\deg V = 2n - 2$ である。特に $L^2 = 4n - 4$ でないといけないから、$K^2 = 4p_g - 12$ である。また、$2n - 2$ 次の曲面で線織曲面でないものは高々有理2重点しか持たぬ K3 曲面しかない。よって (II) を得る。$\deg \Phi_L = 3$ とすれば、$\deg V < 2n - 2$ である。従って V は線織曲面と双有理であり、(III) を得る。$\deg \Phi_L = 4$ ならば、$\deg V = n - 1$ かつ $L^2 = 4n - 4$ だから (IV) を得る。

V が曲面でなければ、$|L| = |nD| + Z$ のように可動部分と固定部分に分解する。ここに $|D|$ は既約曲線のペンシルである。$4n - 4 \geq L^2 = nLD + LZ \geq nLD$ だから、$LD \leq 3$ で $3 \geq LD = nD^2 + DZ \geq nD^2$ を得る。S は偶曲面故、D^2 は非負偶数であって $n \geq 2$ だから $D^2 = 0$ が従う。よって $|D|$ は種数4以下の曲線のペンシルで、しかも底点を持たない。S は標準曲面だから、このペンシルは非超楕円的でなければならない。従って (V) を得る。Q.E.D.

命題 (1.3) より直ちに次を得る。

(1.2) 系： S を $K^2 < 4p_g - 12$, $q = 0$ なる偶標準曲面とする。もし半標準写像が命題 (2.1) の意味で (III) 型または (V) 型ならば、$W(X)$ は 3 次元である。

よって Reid 予想を見るためには (I) 型のみ考えればよい。

§3. 半標準曲面

半標準写像 Φ_L がその像 V の上に双有理であるような偶曲面 S を半標準曲面と呼ぶことにする。§2 と同様に $n = h^0(L) - 1$ とおく。

(3.1) 補題： S が半標準曲面ならば

(3.1.1) $$L^2 \geq \deg V \geq 4n - 6$$

が成立する。しかも、もし $\deg V = 4n - 6$ ならば $L^2 = 4n - 6$ であって $|L|$ は底点を持たず $q(S) \leq h^1(L)$ である。

証明： $\sigma : \tilde{S} \to S$ を $|\sigma^* L|$ の可動部分 $|M|$ が底点を持たないような blowing-ups の合成のうち最短のものとする。Z で $|\sigma^* L|$ の固定部分を表す。このとき

(3.1.2) $$L^2 = M^2 + (\sigma^* L + M)Z \geq M^2$$

である。

$|M|$ の一般メンバー C をとる。勿論、非特異既約と仮定できる。M_C で以て M の C への制限をあらわす。層の完全系列

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(M) \to \mathcal{O}_C(M_C) \to 0$$

より、

(3.1.3) $$h^0(M_C) \geq h^0(M) - 1$$

を得る。$\deg V = M^2$ なので、$\deg M_C \geq 4h^0(M_C) - 6$ を示せばよい。

$\tilde{K}$ を $\tilde{S}$ の標準直線束とする。ある σ の例外因子 E によって $\tilde{K} = \sigma^* K + [E] = [2M + 2Z + E]$ と書ける。$h^0(M_C) = r + 1$ とおく。m を $(\deg M_C - 1)/(r - 1)$ の整数部分とし、$\epsilon = \deg M_C - 1 - m(r-1)$ とおく。C の標準束 K_C は $\tilde{K} + M$ から誘導されるから、$3 \deg M_C \leq 2g(C) - 2$ すなわち

(3.1.4) $$3m(r-1) + 3\epsilon + 5 \leq 2g(C)$$

が成立する。(3.1.4) で等号が成立するのは、$M(2Z+E)=0$ のときのみである。一方、Castelnuovo の上限（例えば [3, Theorem (3.7)] を見よ）より、

$$2g(C) \leq m(m-1)(r-1)+2m\epsilon \tag{3.1.5}$$

である。(3.1.4) と (3.1.5) から、

$$m(m-4)(r-1)+(2m-3)\epsilon \geq 5 \tag{3.1.6}$$

を得る。もし $r=2$ ならば、$\epsilon=0$ なので $m\geq 5$ である。もし $r\geq 3$ ならば、$m\geq 5$ または $(m,\epsilon)=(4,1)$ である。従っていずれの場合にも $(m-4)(r-1)+\epsilon-1\geq 0$ が成立している。$\deg M_C = 4(r+1)-6+(m-4)(r-1)+\epsilon-1$ だから、求める不等式 $\deg M_C \geq 4h^0(M_C)-6$ が得られた。

$M^2=4n-6$ としてみよう。上の考察より、$h^0(M_C)=n$ かつ $M(2Z+E)=0$ でなければならない。M は勿論 nef だから、$MZ=ME=0$ を得る。$ME=0$ なので σ は恒等写像である。よって、$|L|$ が底点を持たぬことを示すには、$Z=0$ を示せばよい。$MZ=0$ なので Hodge の示数定理から、$Z^2\leq 0$ である。他方、$0\leq LZ=MZ+Z^2=Z^2$ だから、$Z^2=0$ でなければならず、結局 $Z=0$ である。よって、$|L|$ は底点を持たず、(3.1.2) から $L^2=4n-6$ である。また、(3.1.3) において等号が成立しているから、制限写像 $H^0(L)\to H^0(L_C)$ は全射である。従って $h^1(\mathcal{O}_S)\leq h^1(L)$ を得る。Q.E.D.

(3.2) 補題： $L^2=4n-6$ を満たす半標準曲面 S に対し、$p_g=4n-2$, $q=0$, $K^2=4p_g-16$ が成立する。更に、半標準像 V は高々有理 2 重点しか持たず、その 2 次包 $Q(V)$ は次数 $n-2$ の既約 3 次元多様体である。

証明：C を $|L|$ の一般メンバーとする。L_C で L の C への制限を表す。すると $h^0(L_C)=n$ である。$3L$ は標準束 K_C を誘導するから、Riemann-Roch の定理から

$$h^0(mL_C)=\begin{cases} 3n-3 & \text{if } m=2,\\ g(C)=6n-8 & \text{if } m=3,\\ (2m-3)(2n-3) & \text{if } m\geq 4.\end{cases} \tag{3.2.1}$$

を得る。C_0 を Φ_L による C の像とし、これを V の一般超平面切断と看做す。$C_0\subset \mathbf{P}^{n-1}$ は次数 $L^2=4n-6$ の非退化既約曲線である。Z_0 を C_0 の一般超平面切断とすれば、$4n-6$ 個の異なる点からなり、Harris の意味で uniform position にある。h_{Z_0} を Z_0 の

Hilbert 関数とすれば

$$
(3.2.2)\qquad
\begin{array}{ll}
h_{Z_0}(1) = n-1, & h_{Z_0}(2) \geq 2n-3, \\
h_{Z_0}(3) \geq 3n-5, & h_{Z_0}(4) \geq 4n-7, \\
h_{Z_0}(m) = 4n-6 \ (m \geq 5), &
\end{array}
$$

である（[2, Ch. 3]）。$h_{C_0}(m) \leq h^0(mL_C)$ だから、$h_{C_0}(1) = n$ と $h_{C_0}(m) \geq h_{C_0}(m-1) + h_{Z_0}(m)$ を使えば、(3.2.1) と (3.2.2) より

$$
\begin{array}{ll}
h_{Z_0}(1) = n-1, & h_{C_0}(1) = n, \\
h_{Z_0}(2) = 2n-3, & h_{C_0}(2) = 3n-3, \\
h_{Z_0}(3) = 3n-5, & h_{C_0}(3) = 6n-8, \\
h_{Z_0}(4) = 4n-7, & h_{C_0}(m) = (2m-3)(2n-3) \ \text{for}\ m \geq 4.
\end{array}
$$

を得る。従って $h_{C_0}(m) = h_{C_0}(m-1) + h_{Z_0}(m)$ が全ての正整数 m に対して成立するので、C_0 は射影的正規である。特に非特異である。

Riemann-Roch の定理と Ramanujam の消滅定理から

$$
h^0(mL) = \begin{cases} p_g & \text{if } m = 2, \\ m(m-2)(2n-3) + \chi(\mathcal{O}_S) & \text{if } m \geq 3, \end{cases}
$$

である。$h_V(2) \geq h_V(1) + h_{C_0}(2) = 4n-2$ なので、$p_g \geq 4n-2$ を得る。また $h_V(3) \geq h_V(2) + h_{C_0}(3) \geq 10n-10$ より、$\chi(\mathcal{O}_S) \geq 4n-1$ である。一方、(1.1) より $\chi(\mathcal{O}_S) = 4n-1-h^1(L)$ だから、$h^1(L) = 0$ かつ $\chi(\mathcal{O}_S) = 4n-1$ である。よって $q = 0$ と $p_g = 4n-2$ を得る。この時 $h^0(mL) = h_V(m) = h_V(m-1) + h_{C_0}(m)$ が全ての正整数 m に対して成立する事が容易に確かめられるから、V も射影正規である。つまりかけ算写像 $Sym^m H^0(L) \to H^0(mL)$ は全射である。$K = 2L$ なので、特に V は S の標準モデルと同型である。よって V は高々有理 2 重点しか持たない。

最後に $Q(V)$ に関する主張を示す。Z_0 は非退化な $4n-6$ 個の点集合であって $h_{Z_0}(2) = 2n-3$ を満たすから、古典的な Castelnuovo の補題（例えば [2, Lemma (3.9)]）より、Z_0 の 2 次包 $Q(Z_0)$ は有理正規曲線である。V を通る 2 次超曲面のなす線形系は、制限写像によって Z_0 を通るそれに同型に写るので、$Q(V)$ は次数 $n-2$ の既約 3 次元多様体である。Q.E.D.

これら補題から、次を得る。

(3.3) 系： S を $K^2 < 4p_g - 12$ を満たす偶標準曲面で半標準写像が命題 (2.1) の意味で (I) 型のものとする。このとき、$K^2 = 4p_g - 16$ であって、標準像 X の 2 次包

$Q(X)$ は既約な３次元多様体である。より正確には $Q(X)$ は Δ-種数０の３次元多様体 $Q(V)$ の Veronese 像である。

系 (2.2) と (3.3) より

(3.4) 定理： 不正則数０の偶標準曲面に対しては、Ried 予想 (0.3) は正しい。

ついでに $L^2 = 4n - 6$ なる半標準曲面の分類結果を記す。

(3.5) 定理： $L^2 = 4n - 6$ $(n = h^0(L) - 1)$ を満たす半標準曲面 S は、高々有２重点しか持たない次の型の曲面の特異点解消として得られる。

(1) ６次曲面。

(2) ２次超曲面と５次超曲面の完全交差。

(3) 荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,2)$ 内の９次超曲面。

(4) 相対５次曲線。より正確には、$\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^2$-束

$$\mathbf{P}_{a,b,c} := \mathbf{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c))$$

のトートロジカル因子を T、ファイバーを F としたとき、線形系 $|5T - (n-4)F|$ のメンバー。ここに、a, b, c は次を満たす整数である。

$$0 \le a \le b \le c,\ a + b + c = n - 2,\ a + c \le 4b + 2,\ b \le 3a + 2.$$

証明は、Δ-種数０の３次元多様体の分類（例えば [2]）を使えば、[1] と同様である。

§4. $K^2 = 4p_g - 12$ の場合

正則な偶標準曲面に対して Ried 予想の正当性を見たが、$K^2 = 4p_g - 12$ のとき $W(X) = X$ となるものがなければ、予想自体を修正する必要が生じる。そこで、この節では Reid 線 $K^2 = 4p_g - 12$ でどんな事が起こるのかを述べる。

$W(X) = X$ となるとすれば、命題 (2.1) の (I), (II), (IV) 型しかない。(II) または (IV) 型ならば、より簡単な曲面の被覆になっているので、これを手がかりに出来る。(I) 型の場合は、§3 と同様の考察によって $Q(V)$ が（$n = 4$ で $Q(V) = \mathbf{P}^4$ となる場合

を除けば) Δ-種数 1 以下の 3 次元多様体になることが証明できる。従って [6] の時と類似の考察が可能である。実際には、半標準環 $\oplus H^0(mL)$ の生成元の間の関係式を調べることによって、次の様な分類を得る。途中の計算を書くと長くなるので割愛する。

S を $K^2 = 4p_g - 12$, $q = 0$ なる偶標準曲面とする。標準像 X の 2 次包 $Q(X)$ が 2 次元ならば、$X = Q(X)$ であって S は次のいずれかと双有理である。

Type (I):

(1)　正規 Del Pezzo 3-fold の 4 次超曲面切断。

(2)　ある種の荷重完全交差

(2a)　荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,1,2)$ 内の次式で定義される (4, 4) 型完全交差

$$u^2 + A_2u + A_4 = B_2u + B_4 = 0$$

ここに (x_0, x_1, x_2, x_3, u) は $\deg x_i = 1$, $\deg u = 2$ なる座標系で、A_i と B_i は x_j に関する i 次同次多項式。(以下も記号の意味は同様である)

(2b)　荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,1,1,2)$ 内の次式で定義される (2, 3, 4) 型完全交差

$$A_2 = B_1u + B_3 = u^2 + C_2u + C_4 = 0.$$

(2c)　荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,2,4,4)$ 内の次式で定義される (4, 5, 8) 型完全交差

$$\begin{cases} u^2 + v + w + A_2u + A_4 = 0, \\ x_1v + x_2w + B_3u + B_5 = 0, \\ vw + (C_{21}v + C_{22}w)u + C_{41}v + C_{42}w + C_6u + C_8 = 0, \end{cases}$$

(2d)　荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,2,4)$ 内の次式で定義される (5, 8) 型完全交差

$$x_0u^2 + A_1v + A_3u + A_5 = v^2 + B_2uv + B_4u^2 + B_6u + B_8 = 0.$$

(2d) は (2c) の特別な場合である。

(3) g^2_7 がある種数 7 の曲線のペンシルを持つ曲面

X_0, X_1, X_2 をそれぞれ $[T - aF]$, $[T - bF]$, $[T - cF]$ の切断で $\mathbf{P}_{a,b,c} \to \mathbf{P}^1$ のファイバーの同次座標を与えるものとする。$\{z_0, z_1\}$ は底曲線 $\mathbf{P}^1$ の同次座標を表し、$H^0(F)$ の基底と思う。W を $[2T]$ の全空間とし、ファイバー座標を w とする。

(3a) W 内の次式で定義される曲面

$$X_2 w = A(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2),\ w^2 = B(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2),$$

ただし、$A \in H^0(\mathbf{P}_{a,b,c}, \mathcal{O}(3T-(n-4)F))$, $B \in H^0(\mathbf{P}_{a,b,c}, \mathcal{O}(4T))$ であり、$(a,b,c) = (1,1,n-4)$, $5 \leq n \leq 7$, または $(a,b,c) = (0,2,n-4)$, $6 \leq n \leq 10$

(3b) $W \to \mathbf{P}_{0,1,n-3}$ 内の次式で定義される曲面

$$z_0 X_2 w = A(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2),\ \ w^2 = B(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2),$$

または $n = 5$ で

$$X_1 w = A(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2),\ \ w^2 = B(z_0, z_1, X_0, X_1, X_2)$$

ここに $A \in H^0(3T-(n-4)F)$ で $B \in H^0(4T)$, $5 \leq n \leq 7$.

Type (II): K3 曲面の 2 重被覆

V を K3 曲面とし、H を nef かつ big な因子とする。$[2H]$ の全空間内で次式で定義される曲面

$$w^2 + A_2 w + A_4 = 0$$

ただし w はファイバー座標で、$A_{2i} \in H^0(2iH)$ である。

Type (IV):

(1) ある種の荷重完全交差

(1a) 荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,1,2,2)$ 内の次式で定義される (2, 4, 4) 型完全交差

$$A_2 = u^2 + B_2 v + B_4 = v^2 + C_2 u + C_4 = 0,$$

(1b) 荷重射影空間 $\mathbf{P}(1,1,1,3,4)$ 内の次式で定義される (6, 8) 型完全交差

$$u^2 + A_2 v + A_6 = v^2 + B_5 u + B_8 = 0,$$

(2) 種数 5 の non-trigonal 曲線のペンシルを持つ曲面

次数 d の Hirzebruch 曲面 Σ_d の極小切断を Δ_0、ファイバーを Γ とする。Σ_d 上の階数2のベクトル束

$$[2\Delta_0 + (d+k)\Gamma] \oplus [2\Delta_0 + (n+1+d-k)\Gamma]$$

のファイバー座標を (u, v) としたとき、次式で定義される曲面

$$u^2 + A_1 u + A_2 v + A_3 = v^2 + B_1 uv + B_2 u + B_3 v + B_4 = 0$$

但し、$n-1-d$ は非負偶数、$\max(d, 2) \leq k \leq (n+1)/2$ であって

$$\begin{array}{ll} A_1 \in H^0(2\Delta_0 + (d+k)\Gamma), & A_2 \in H^0(2\Delta_0 + (d+3k-n-1)\Gamma), \\ A_3 \in H^0(4\Delta_0 + 2(d+k)\Gamma), & \\ B_1 \in H^0((n+1-2k)\Gamma), & B_2 \in H^0(2\Delta_0 + (2n+2+d-3k)\Gamma), \\ B_3 \in H^0(2\Delta_0 + (n+1+d-k)\Gamma), & B_4 \in H^0(4\Delta_0 + 2(n+1+d-k)\Gamma) \end{array}$$

この内 p_g がいくらでも大きくなれるのは、(II) と (IV) のみである。また、上のすべてに対して標準像は 2-normal である。

§5. 問題

S を非特異射影曲面、$f : S \to B$ を非特異射影曲線 B 上の相対極小なファイブレーションとする。

次の問題は Reid 予想と殆ど同値であると思われる。

(5.1) 問題: f の一般ファイバーが non-trigonal, non plane-quintic ならば $K^2 \geq 4p_g - 12$? 但し $p_g >> g$（g はファイバー種数）とする。

どうせなら、非超楕円的ファイブレーションの傾きに対して、下限がはっきりする方がよい。そこで

(5.2) 問題: f の一般ファイバーが種数 g の非超楕円曲線の時

$$K_{S/B}^2 \geq \frac{24(g-1)}{5g+1}\Delta(f)\,? \tag{5.1}$$

ただし $\Delta(f) = \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(g(B)-1)$ である。更に (5.1) で等号成立なら、一般ファイバーは trigonal か?

コメント： (5.1) は $g=3$ の時または $g=4$ で $B=\mathbf{P}^1$ の時には証明できる。$g=3$ については、例えば拙著

A note on surfaces with a pencil of non-hyperelliptic curves of genus 3, Osaka J. Math. 28 (1991)

を見よ。

(5.3) 問題： 不正則数が 2 以上の標準曲面に対して、Castelnuovo–Horikawa の不等式

$$K^2 \geq \max\{3p_g - 7 + q,\ 3\chi(\mathcal{O}_S)\}$$

は sharp か？

コメント： $q=0$ ならば $K^2 \geq 3p_g - 7$, $q=1$ ならば $K^2 \geq 3\chi(\mathcal{O}_S)$ であって両方とも sharp である。$q \geq 2$ の時 Albanese 写像の像が曲線ならば、$K^2 \geq 3p_g + 10(q-1)$ が成立して sharp である（上記 "A note on $\cdots$" 参照)。よって Albanese 写像の像が曲面の時が問題である。

最後に最も漠然としているが、最も興味のある問題を

(5.4) 問題： 標準曲面 S の Hodge 構造の無限小変形（特に無限小 Schottky 関係）と標準像の 2 次包の関係を調べよ。

お詫びと訂正

拙著 [7] に若干のミスがあったので、この場を借りてお詫びすると共に該当箇所を訂正したい。以下の文献番号は [7] のもの。

(1) p. 177, Theorem 1.2 において $K^2 = 2p_g - 4 + 4q$ を言うには「locally trivial でない」という仮定が必要である。ここでは堀川 [4] と Xiao [6] の両方が必要である。しかし、Theorem 1.3 には、この仮定は必要ない。また、Theorem 1.3 のような曲面は本質的に Example 1.4 で尽きる。

(2) p 179, ↑ l. 7: $n-3+d \to n-3-d$

(3) p. 184, ↓ l. 11: ここに $n \leq 7$ とあるのは $n \leq 9$ の誤りである。

(4) p. 184, (3.2): 明らかに不等号の向きが逆である。

特に (3) については、私の計算間違いを堀川先生に御指摘いただいた。この場を借りて氏に感謝いたしたい。

参考文献

[1] T. Ashikaga and K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, Tôhoku Math. J. 42 (1990), 517–536.

[2] T. Fujita, On the structure of polarized varieties with Δ-genus zero, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975), 103–115

[3] J. Harris, *Curves in Projective Space*, Universite de Montreal (1980)

[4] E. Horikawa, Notes on canonical surfaces, Tôhoku Math. J. 43 (1991), 141–148

[5] E. Horikawa, Deformations of sextic surfaces, preprint (1990)

[6] K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 6$, Math. Ann. 290 (1991), 77–107

[7] 今野 一宏, Even algebraic surfaces of general type, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集 (1990), 175–191

[8] M. Reid, π_1 for surfaces with small K^2, Springer Lec. Notes in Math. 732 (1979), 534–544

[9] M. Reid, Quadrics through a canonical surface, Springer Lec. Notes in Math. 1417 (1990), 191–213

e-mail: f77129a@kyu–cc.cc.kyushu–u.ac.jp