数理解析研究所講究録
第 803 巻 1992 年 196-209

On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt sequences

中央大理工　関口　力 (Tsutomu Sekiguchi)
東京電機大工　諏訪紀幸 (Noriyuki Suwa)

1 動機

標数零の世界: ℓ を 2 以上の整数, K を標数零の体 (一般には $\mathrm{ch}K \nmid \ell$ であればよい) とし, $K \supset \mu_\ell = \{e^{2\pi ji/\ell} \mid j = 1, 2, \cdots \ell\}$ とする. Spec K 上の étale (または fppf) 位相に関する層の完全系列

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 \to & \boldsymbol{\mu}_{\ell,K} & \to & \boldsymbol{G}_{m.K} & \xrightarrow{\theta_\ell} & \boldsymbol{G}_{m,K} & \to 1 \\ & & & t & \mapsto & t^\ell & \end{array}
$$

は Kummer 完全系列と呼ばれ, k-scheme X に対し完全系列

$$
\boldsymbol{G}_{m,K}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell,K}) \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{G}_{m.K}) \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{G}_{m,K})
$$

を得る. ここで, K に関する仮定により $\boldsymbol{\mu}_{\ell,K} \cong (\boldsymbol{Z}/\ell\boldsymbol{Z})_K$ であり, $\mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell,K})$ は X の $\boldsymbol{Z}/\ell\boldsymbol{Z}$-torsor の同型類の集合である. 特に, B を local K-algebra とすれば, Hilbert theorem 90 により $\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\, B, \boldsymbol{G}_{m,K}) = 0$ であり, 写像 $\boldsymbol{G}_{m,K}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell,K})$ は全射となる. このことは, local K-algebra の ℓ 次巡回拡大の世界において, Kummer 完全系列 (1) が

“神”であり, 全ての local K-algebra の ℓ 次巡回拡大は (1) のご垂迹であることを意味し, これが Kummer 理論である.

一方, 正標数の場合が次である.

標数 $p>0$ の世界: k を正標数 p の完全体とし, $W_{n,k}$ を k 上の n 次元 Witt group scheme とする. このとき, Spec k 上の étale (または fppf) 位相に関する層の完全系列

$$
(2)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0\to & \boldsymbol{Z}/p^n & \to & W_{n,k} & \xrightarrow{\wp} & W_{n,k} & \to 0 \\ & & & x & \mapsto & x^p-x & \end{array}
$$

は Artin-Schreier-Witt 完全系列といい, k-scheme X に対し完全系列

$$
W_{n,k}(X)\to \mathrm{H}^1(X,\boldsymbol{Z}/p^n)\to \mathrm{H}^1(X,W_{n,k})\to \mathrm{H}^1(X,W_{n,k})
$$

を得る. 特に, X が affine であれば $\mathrm{H}^1(X,W_{n,k})=0$ であり, 写像 $W_{n,k}(X)\to \mathrm{H}^1(X,\boldsymbol{Z}/p^n)$ は全射となる. 即ち, このことはやはり Artin-Schreier-Witt 完全系列が k-algebra の p^n 次巡回拡大の世界における “神”であり, 全ての k-algebra の p^n 次巡回拡大が (2) のご垂迹であることを意味している. これが Artin-Schreier-Witt 理論である.

我々の目的は, 神々 Kummer 完全系列 (1), Artin-Schreier-Witt 完全系列 (2) の上にもっと本質的な神がいらっしゃり, (1) と (2) はその神のご垂迹であることを示すことにある. 即ち, $\boldsymbol{Z}_{(p)}[\mu_{p^n}]$ の拡大である離散付値環 (DVR) A 上の flat commutative group scheme の完全系列

$$
(3)\qquad 0\to(\boldsymbol{Z}/p^n)_A\to \mathcal{W}_n\xrightarrow{\psi}\mathcal{W}_n\,/\,(\boldsymbol{Z}/p^n)\to 0
$$

で, その special fibre が (2), generic fibre が (1) であるものの存在を示すことにある. 勿論, こうした完全系列は統一された Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論を与えるものでなければならない.

完全系列 (3) は, $n=1$ の場合については [2,3] あるいは [9] で議論されており, $n=2$ の場合については [1] に具体的に与えてある.

2　1次元の場合の結果

一般論の定義にはいる前に, 1次元の場合の結果が必要なので主に [3] よりその結果を引用しまとめておく.

$(A, \mathfrak{m})$ を DVR, $\lambda \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, $A_\lambda := A/\lambda$ とし, $i : \mathrm{Spec}\, A_\lambda \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A/\lambda)$ を自然な埋め込みとする. A 上定義された平面曲線

$$C : y^2z - \lambda xyz - x^3 = 0$$

の generic fibre は nodal curve であり, special fibre は $y^2z - x^3 = 0$ で定義される cuspidal curve である. 従って, その Picard scheme $\mathrm{Pic}^0(C/A)$ は generic fibre が乗法群 $\boldsymbol{G}_m$ であり, special fibre が加法群 $\boldsymbol{G}_a$ となる A 上の group scheme である. 実際,

$$\mathrm{Pic}^0(C/A) \cong \mathrm{Spec}\, A[X, \frac{1}{\lambda X + 1}]$$

となり, 群構造は $x \cdot y = \lambda xy + x + y$ で与えられる. 我々はこの group scheme を $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ とおく. 即ち,

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Pic}^0(C/A) = \mathrm{Spec}\, A[X, \frac{1}{\lambda X + 1}]$$

である.

group scheme $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ に関する計算は, 次の $\mathrm{Spec}\, A$ の small étale site または small fppf site 上の層の完全系列

$$\begin{array}{lccccccc} & 0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{\alpha^{(\lambda)}} & \boldsymbol{G}_{m,A} & \xrightarrow{r} & i_*\boldsymbol{G}_{m,A_\lambda} & \to 0 \\ (4) & & x & \mapsto & \lambda x + 1 & & & \\ & & & & t & \mapsto & t \bmod \lambda & \end{array}$$

が $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ と乗法群 $\boldsymbol{G}_{m,A}$ との誤差を与え, これを用いることにより得られる.

尚, 加法群から乗法群への変形は上記 group scheme $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の形のものしか有り得ない. 実際, 次が成り立つ.

定理 2.1 (Waterhouse-Weisheiler [10]) $\mathcal{G}$ を $\mathrm{Spec}\, A$ 上の flat group scheme で, generic fibre $\mathcal{G}_\eta \cong \boldsymbol{G}_m$ 且つ special fibre $\mathcal{G}_s \cong \boldsymbol{G}_a$ ならば, ある $\lambda \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$ が unit 倍を除いて一意的に存在し $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{(\lambda)}$ となる.

以降, $\zeta_n := e^{2\pi i/p^n}$ とおき, $\lambda_n := \zeta_n - 1$ とおく. $A = \boldsymbol{Z}_{(p)}[\zeta_1]$ 上の group scheme の完全系列

$$\begin{array}{lcccccc} (5) & 0 \to (\boldsymbol{Z}/p)_A & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{G}^{(\lambda_1)} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}^{(\lambda_1^p)} & \to 0 \\ & & & x & \mapsto & \frac{1}{\lambda_1^p}\{(\lambda_1 x + 1)^p - 1\} & \end{array}$$

は, Artin-Schreier 完全系列

$$\begin{array}{lcccccc} (6) & 0 \to \boldsymbol{Z}/p & \to & \boldsymbol{G}_a & \xrightarrow{\wp} & \boldsymbol{G}_a & \to 0 \\ & & & x & \mapsto & x^p - x & \end{array}$$

から Kummer 完全系列

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_p \to \boldsymbol{G}_m \xrightarrow{\theta_p} \boldsymbol{G}_m \to 1$$

への変形を与える唯一のものである.

一方, 一般の DVR $(A, \mathfrak{m})$ と $\lambda \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ に対し, 完全系列 (4) を用いることにより次を得る.

定理 2.2 B を local A-algebra とし, A 上 flat とするとき,

$$\mathrm{H}^1(\operatorname{Spec} B, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0.$$

従って, 完全系列 (5) が統一された Kummer-Artin-Schreier 理論を与えることが分かる. このことついての具体的な議論は [8] に与えてある.

更に, cocycle の具体的な計算をすることにより次を得る.

定理 2.3

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \boldsymbol{G}_{m,A}) = 0.$$

再び, 完全系列 (4) とこの定理を用いることにより次を得る.

定理 2.4 $(A, \mathfrak{m})$ を DVR, λ, μ を $\mathfrak{m} \setminus \{0\}$ の元としたとき,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_* \boldsymbol{G}_{m,A_\mu}) \,/\, \left\{(1+\lambda x)^n \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\} \cong \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}).$$

実際, この同型により $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_*\boldsymbol{G}_{m,A_\mu})$ に対応する拡大 $\mathcal{E}^{(\lambda,\mu;\varphi)}$ は次で与えられる:

$$\mathcal{E}^{(\lambda,\mu;\varphi)} = \mathrm{Spec}\, A\,[X, Y, 1/(\lambda X+1), 1/(\varphi(X)+\mu Y)]$$

であり, 群構造は morphism

$$\begin{array}{llcl} \alpha^{(\lambda,\mu)}: & \mathrm{Spec}\, A\,[X, Y, 1/(\lambda X+1), 1/(\varphi(X)+\mu Y)] & \to & \boldsymbol{G}_{m,A} \times_A \boldsymbol{G}_{m,A} \\ & (x,y) & \mapsto & (\lambda x+1, \varphi(x)+\mu y) \end{array}$$

を群準同型にするものである.

$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ の詳しい計算は, [4,6,7] に与えてある.

3 定義

前節の準備の下に幾つかの定義を用意しておく.

以下, $(A, \mathfrak{m})$ を DVR とし, $K = \mathrm{f.f.}\, A$, $k = A/\mathfrak{m}$ とおく.

定義 3.1 A 上 flat, of finite type な group scheme G を, G_s の G_η への A 上の変形という.

定義 3.2 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を $\mathfrak{m}$ の元とする. A 上 flat group schemes $\{G_1 = \mathcal{G}^{(\lambda_1)}, G_2, \cdots, G_n = G\}$, あるいは単に G, が *a filtered group scheme over A of type* $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ であるとは, 次の完全系列を満たすときをいう.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda_2)} & \xrightarrow{v_2} & G_2 & \xrightarrow{r_2} & \mathcal{G}^{(\lambda_1)} & \to 0, \\ 0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda_3)} & \xrightarrow{v_3} & G_3 & \xrightarrow{r_3} & G_2 & \to 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda_n)} & \xrightarrow{v_n} & G_n & \xrightarrow{r_n} & G_{n-1} & \to 0. \end{array} \tag{7}$$

定義 3.3 A は異標数, 即ち, $\mathrm{ch}K=0$, $\mathrm{ch}k=p(>0)$ とし, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathfrak{m}\backslash\{0\}$ とする. filtered group scheme $\{\mathcal{W}_1=\mathcal{G}^{(\lambda_1)},\mathcal{W}_2,\cdots,\mathcal{W}_n\}$ over A of type $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ あるいは単に $\mathcal{W}_n$ が *filtered deformation of* W_n *to* $(\boldsymbol{G}_m)^n$ *of type* $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ であるとは, 各完全系列 $0\to\mathcal{G}^{(\lambda_\ell)}\to\mathcal{W}_\ell\to\mathcal{W}_{\ell-1}\to0$ の special fibre が完全系列 $0\to\boldsymbol{G}_a\to W_\ell\to W_{\ell-1}\to0$ であるときをいう.

定義 3.4 A は $\boldsymbol{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ を支配しているものとし, $\lambda=\lambda_1=\zeta_1-1$ とおく. filtered deformation $\{\mathcal{W}_1=\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{W}_2,\cdots,\mathcal{W}_n\}$ of W_n to $(\boldsymbol{G}_m)^n$ over A of type $(\overbrace{\lambda,\lambda,\cdots,\lambda}^{n})$ あるいは単に $\mathcal{W}_n$ が *KASW group scheme over* A であるとは, 各 $\mathcal{W}_\ell$ が constant group schem $\boldsymbol{Z}/p^\ell$ を含み, 完全系列の可換図式

$$
(8)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0\to & \boldsymbol{Z}/p & \to & \boldsymbol{Z}/p^\ell & \to & \boldsymbol{Z}/p^{\ell-1} & \to 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_\ell} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\ell-1}} & \\
0\to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{v_\ell} & \mathcal{W}_\ell & \xrightarrow{r_\ell} & \mathcal{W}_{\ell-1} & \to 0
\end{array}
$$

を満たしているときをいう.

定理2.2より帰納的に次が得られる.

定理 3.1 G を filtered group scheme over A of type $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ とし, B を A 上 flat な local A-algebra とするとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\,B,G)=0.$$

KASW group scheme $\mathcal{W}_n$ が存在すれば $\mathcal{W}_n\,/\,(\boldsymbol{Z}/p^n)$ は filtered group scheme over A of type $(\lambda^p,\cdots,\lambda^p)$ であるから, この定理より $\mathcal{W}_n$ が

Kummer 理論と Artin-Schreier-Witt 理論の統一を与えることが分かる.

$\{G_1 = \mathcal{G}^{(\lambda_1)}, G_2, \cdots, G_n = G\}$ を filtered group scheme over A of type $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ とするとき, 完全系列 (4) を用い, 定理 2.4 を一般化することが出来,

$$(9)\quad G \cong \operatorname{Spec} A[X_1, X_2, \cdots, X_n, \frac{1}{\lambda_1 X_1 + 1}, \frac{1}{\phi_1(X) + \lambda_2 X_2}, \cdots, \frac{1}{\phi_n(X) + \lambda_n X_n}]$$

を得る. 但し, $\phi_\ell : G_\ell \to i_* \boldsymbol{G}_{m, A/\lambda_{\ell+1}}$ は群準同型である. これより, 各 ℓ $(2 \leq \ell \leq n)$ について完全系列

$$(10)\qquad 0 \to G_\ell \xrightarrow{f_\ell} G_{\ell-1} \otimes_A \boldsymbol{G}_{m,A} \xrightarrow{g_\ell} i_* \boldsymbol{G}_{m, A_{\lambda_\ell}} \to 0$$

を得る. 但し,

$$\begin{aligned} f_\ell(x_1, \cdots, x_\ell) &= ((x_1, \cdots, x_{\ell-1}), \phi_{\ell-1}(x) + \lambda_\ell x_\ell), \\ g_\ell(y, t) &= \phi_{\ell-1}(y)^{-1} t \bmod \lambda_\ell \end{aligned}$$

である. 以下, X を A 上の abelian scheme とするとき, 完全系列 (9) と [3, Th. 1.5, Th. 2.6] より帰納的に次を得る.

定理 3.2 自然な写像 $\operatorname{Ext}^1(X, G) \to \mathrm{H}^1(X, G_X)$ は同型である.

この定理 3.2 と, 再び完全系列 (9) を用いることにより, 次を得る.

定理 3.3 各 ℓ について次が成り立つ.

$$\mathrm{Ext}^1(X, G_\ell) \cong \Big\{(c,t) \in \mathrm{H}^1(X, G_{\ell-1}) \times \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{G}_{m,A}) \\ \Big| \ \phi_{\ell-1}(c)^{-1} t \bmod \lambda_\ell = 0 \in \mathrm{H}^1(X \otimes_A A_{\lambda_\ell}, \boldsymbol{G}_{m,A_{\lambda_\ell}})\Big\}.$$

KASW group scheme が存在するとき, 定理 3.3 により $\mathrm{Ext}^1(X, \boldsymbol{Z}/p^n)$ を決定することが出来る.

4 Artin 局所環上における G_a の G_m による拡大

以下, 暫くの間 $(A, \mathfrak{m} = \{\pi\})$ を Artin local ring, $\lambda \in \mathfrak{m}$ とする. このとき, reduction map を考えることにより容易に次を得る.

補題 4.1 B を flat A-algebra, $X = \operatorname{Spec} B$ とするとき, 次が成り立つ.

1. $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$.

2. $\mathrm{H}^1(X \otimes_A A/\mathfrak{m}, \boldsymbol{G}_{m,A/\mathfrak{m}}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{G}_{m,X}) = 0$.

この補題 4.1 より容易に次を得る.

系 4.2 G を A 上の flat affine commutative group scheme とする.

1. $\mathrm{H_o}^2(G, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \cong \mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{G}^{(\lambda)})$. 但し, 左辺は symmetric Hochschild cohomology group を表す.

2. $\mathrm{H}^1(G \otimes_A A/\mathfrak{m}, \boldsymbol{G}_{m,A/\mathfrak{m}}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{H_o}^2(G, \boldsymbol{G}_{m,A}) \cong \mathrm{Ext}^1_A(G, \boldsymbol{G}_{m,A})$.

次の結果は我々の議論の鍵となる結果の出発点となるものである.

補題 4.3 $\varinjlim_{B \succ A} \mathrm{Ext}^1_B(\boldsymbol{G}_{a,B}, \boldsymbol{G}_{m,B}) = 0$. 但し, 帰納的極限は A 上 flat finite extension な Artin local ring による base change をとるものである.

これは [5, Ex. 3.6] を出発点として帰納的に証明される.

この補題 4.3 と完全系列 (4) を用いることにより我々の鍵となる次の結果を得る.

定理 4.4 $(A, \mathfrak{m})$ を DVR, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ とし, $\lambda_{n+1} \mid \lambda_n \mid \cdots \mid \lambda_1$ を満たすものとする. $\{G_1 = \mathcal{G}^{(\lambda_1)}, G_2, \cdots, G_n\}$ を filtered group scheme over A of type $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とする. このとき, 次の写像は全射である.

$$\varinjlim_{B \succ A} (v_{n,B})^* : \varinjlim_{B \succ A} \mathrm{Ext}^1(G_n, \mathcal{G}^{(\lambda_{n+1})}) \to \varinjlim_{B \succ A} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda_n)}, \mathcal{G}^{(\lambda_{n+1})}).$$

5 extension groups の特殊化写像

Lazard's comparison lemma により $\mathrm{Ext}^1_k(\boldsymbol{G}_{a,k}, \boldsymbol{G}_{a,k})$ が完全に決定されており, 一方, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ については十分一般の形で [4] で計算してある. これらを用いることにより次を得る.

定理 5.1 $(A, \mathfrak{m})$ を $k = A/\mathfrak{m}$ が完全体であるような DVR, $\lambda, \mu \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, $\mu \mid \lambda$ とする. このとき, A を支配する DVR B が存在し, 特殊化写像

$$\mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\boldsymbol{G}_{a,k}, \boldsymbol{G}_{a,k})$$

が全射となる.

定理4.4と定理5.1を用い帰納的に次を得る.

定理 5.2 $(A, \mathfrak{m})$ を $k = A/\mathfrak{m}$ が完全体であるような DVR, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ とし, $\lambda_{n+1} \mid \lambda_n \mid \cdots \mid \lambda_1$ とする. 更に, G を filtered group scheme over A of type $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とする. このとき, $\mathrm{Ext}_k^1(G_k, \boldsymbol{G}_{a,k})$ の任意の元 $\overline{E}$ に対し, A の拡大 DVR B と $\mathrm{Ext}_B^1(G, \mathcal{G}^{(\lambda_{n+1})})$ の元 E が存在し, $E_k = \overline{E}$ を得る.

6 $\mathbf{Z}/p^n$ への制限写像

以下, DVR $(A < \mathfrak{m})$ は $A \succ \boldsymbol{Z}_{(p)}[\zeta_{p^n}]$ 且つ $k = A/\mathfrak{m}$ が完全体であるとし, $\lambda = \zeta_1 - 1$ とおく.

このとき, $\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ と $\mathrm{Ext}_A^1(\boldsymbol{Z}/p, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の各々について, [4] と [7] により完全に決定されている. これより完全系列 (5) に関し, 次の結果を得る.

定理 6.1 $\mathrm{Ext}_A^1(\boldsymbol{Z}/p, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の任意の元 F に対し, A の拡大 B と $\mathrm{Ext}_B^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の元 E が存在し, $i_1^* E = F$ を得る.

再び, 定理4.4の事実と定理6.1を用いて帰納的に次を得る.

定理 6.2 n 次元の KASW group scheme $\mathcal{W}_n$ の存在を仮定する. 可換図式 (8) の記号の下に, $\mathrm{Ext}_A^1(\boldsymbol{Z}/p^n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の任意の元 F に対し, A の拡大

B と $\mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の元 E が存在し, $i_n^* E = F$ を得る.

7 KASW group scheme の存在

以上の準備の下に, 我々の主結果である次の主張を得る.

定理 7.1 任意の n に対し, $\boldsymbol{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ の適当な拡大 A 上において KASW group scheme $\mathcal{W}_n$ が存在し,

$$0 \to \boldsymbol{Z}/p^\ell \xrightarrow{i_\ell} \mathcal{W}_\ell \xrightarrow{\psi_\ell} \mathcal{V}_\ell := \mathcal{W}_\ell \,/\, (\boldsymbol{Z}/p^\ell) \to 0$$

が統一された Kummer-Srtin-Schreier-Witt 完全系列である. 更に, (9) により準同型写像

$$\phi_\ell : \mathcal{W}_\ell \to i_* \boldsymbol{G}_{m, A/\lambda_{\ell+1}}$$

が存在し,

$$\mathcal{W}_n \cong \mathrm{Spec}\, A[X_1, X_2, \cdots, X_n, \frac{1}{\lambda X_1 + 1}, \frac{1}{\phi_1(X) + \lambda X_2}, \cdots, \frac{1}{\phi_n(X) + \lambda X_n}]$$

を得るが, 各 ϕ_ℓ に対し, ϕ_ℓ を与える多項式に現れる各項を最低次に正規化しておけば $\mathcal{W}_n$ は一意的に定まる.

証明は n 関する帰納法による. 実際, $\mathcal{W}_n$ の存在を仮定するとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \boldsymbol{Z}/p & \to & \boldsymbol{Z}/p^n & \to & \boldsymbol{Z}/p^{n-1} & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}} & \\
0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{v_n} & \mathcal{W}_n & \xrightarrow{r_n} & \mathcal{W}_{n-1} & \to 0
\end{array}$$

を得る. 以下, A を適当に大きくとることにすれば, 定理 6.2 により $i_n^*\mathcal{U} \cong i_{1,*}(\boldsymbol{Z}/p^n)$ を満たす $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ の元 $\mathcal{U}$ が存在する. $\mathcal{U}$ の選び方より $\mathcal{U} \otimes_A k - W_n \in \mathrm{Im}(\wp^*)$ であり, 定理 5.2 により $\mathcal{E} \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ が存在し, $\mathcal{E} \otimes_A k \cong \mathcal{U} \otimes_A k - W_n$ となる. 従って, $\mathcal{W}_{n+1} := \mathcal{U} - \psi_n^*(\mathcal{E})$ とおけば, これが求めるものである. また, この $\mathcal{W}_{n+1}$ の構成法より正規化の部分も示される.

尚, 詳しい証明は別の機会に譲るが, KASW group scheme $\mathcal{W}_n$ の定義環については, $\boldsymbol{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ に取れることが, もう少し多項式 ψ_ℓ の取り方を具体的にみることにより示されることを注意しておく.

参考文献

[1] T. Sekiguchi. On the deformation of witt groups to tori II. *J. Algebra*, 138(2):273 –297, 1991.

[2] T. Sekiguchi and F. Oort. On the deformations of Witt groups to tori. In *Algebraic and Topological Theories–to the memory of Dr. Takehiko Miyata*, page 283, Kinokuniya, 1985.

[3] T. sekiguchi, F. Oort, and N. Suwa. On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 22(4e série):345–375, 1989.

[4] T. Sekiguchi and N. Suwa. A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring. *Tsukuba J. Math.*, 14(2):459 – 487, 1990.

[5] T. Sekiguchi and N. Suwa. A note on extensions of algebraic and formal groups I. *Math. Z.*, 206:567–575, 1991.

[6] T. Sekiguchi and N. Suwa. Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.*, 38, 1991.

[7] T. Sekiguchi and N. Suwa. Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring II. *Bull. Facul. Sci. & Eng., Chuo University*, 32:17 –36, 1989.

[8] T. Sekiguchi and N. Suwa. Théorie de Kummer-Artin-Schreier. *C. R. Acad. Paris*, 312(Série I):417 –420, 1991.

[9] W. Waterhouse. A unified Kummer-Artin-Schreier sequence. *Math. Ann.*, 277:447–451, 1987.

[10] W. Waterhouse and B. Weisfeiler. One-dimensional affine group schemes. *J. of Alg.*, 66:550–568, 1980.