

スイッチによって貼り合わされる合成力学系について

- 問題の提起と若干の解析 -

Hiroshi Kawakami

徳島大・工・電気電子 川上 博
e-mail: kawakami@ee.tokushima-u.ac.jp

ニース大・数学 René LOZI
e-mail: lozi@platon.kula.kyoto-u.ac.jp

1. はじめに

スイッチやリレーを含んだ電気回路では、これら機械的素子の動作によって、系の運動方程式（ベクトル場）そのものが切り換えられ、これに伴って相空間の幾何学的性質や、系の運動の定性的性質が影響を受けることとなる。例えば、2つ半平面上にそれぞれベクトル場を定義し、スイッチにより、各々の境界線上で別の半平面上の流れに切り換え、この流れが再び境界線上に来たとき、スイッチが動作して、もとの半平面上の流れとなる系は、このような合成力学系の1例である。特に、2つの半平面に重なりがある場合、重なった部分で状態がどちらの平面にあるかによって流れが異なる、いわゆるヒステリシスが生じ、流れの大域的性質を複雑なものとする。

本文では、回路例を動機づけとして、これに関連した2つの半平面上で定義される簡単な合成力学系を取りあげ、問題となる事項を若干の解析とともに考えたい。さて、スイッチやリレーを含む不連続ベクトル場の問題は、古くから非線形制御系や最短時間制御系の合成問題で取り扱われてきた [1-4]。1950年代に行われた一連の研究は、系の安定化のための解析が主となっている。カオスが注目されてからは、カオス振動を起こす系の例として研究がさかんとなってきた。特に、斉藤らはヒステリシス特性を持つ素子を含む回路の解析を行っている [5-8]。

これらの研究とは別に、拘束条件を持つ力学系 (constraint system) の研究において、おそい多様体の折り曲げられた部分で流れがこの多様体を離れて早い運動となって別の部分へ動く跳びの現象がある。Rössler はこれを利用したカオスモデルとして3次元のベクトル場を提案している [9]。また BZ 反応系から導かれた方程式において、Ushiki と Lozi は、アトラクターの概念をゆるくしたコンファイナーを用いて系の定性的性質を研究している [10-12]。以下で述べる系は、拘束付き力学系の問題を大幅に単純化して（跳びを理想的にして）得られた系である。このようにして求めた系は、別の見方をすればリレー制御系や、斉藤の提供するヒステリシス回路から導かれる問題と、同様な力学的問題を提案することとなっている。

2. 動機づけ: Alpacur oscillator

いま, 図1に示すようなスイッチを1つ含んだRLC発振器を例にとって考えよう. この発振器は, スイッチSWによって回路の動作状態が切り替えられるようになっている. この系をAlpacur発振器と呼ぶことにしよう.

まずスイッチSWがA側に接続されている場合の回路方程式は,

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -v - ri \\ C \frac{dv}{dt} = -G(v) + i + \frac{E_1 - v}{R_0 + R_1} \end{cases} \quad (1)$$

となる. またSWがB側に接続されている場合の回路方程式は,

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -v - ri \\ C \frac{dv}{dt} = -G(v) + i + \frac{E_2 - v}{R_0 + R_2} \end{cases} \quad (2)$$

である.

そこで, 今単純な場合 (適当に変数を正規化することと等価である) として,

$$\begin{aligned} C = 1, L = 1, g_1 = 1/(R_0 + R_1), g_2 = 1/(R_0 + R_2) \\ G(v) = -v + v^3/3 \end{aligned} \quad (3)$$

と仮定し,

$$i = x, v = y, g_1 E_1 = B_1, g_2 E_2 = B_2 \quad (4)$$

とおく. 式(1), (2)はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_1)y - \frac{1}{3}y^3 + B_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_2)y - \frac{1}{3}y^3 + B_2 \end{cases} \quad (6)$$

となる.

次にスイッチSWの動作を考える. 2つの半平面をその境界を

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq h\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq b\} \\ \partial H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h\} \\ \partial B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\} \end{aligned}$$

と書くことにする. ここに $b > h$ と仮定し, H と B は $h \leq y \leq b$ の部分で重なっているものとしておく. スイッチの動作は, H 上の式(5)の流れと B 上の式(6)の流れを,

それらが境界に達したとき、切り換えるように働くと仮定しよう。すなわち

- a) 初期値 $(x_0, y_0) \in H$ の解 $(x(t), y(t))$ は H 上でベクトル場 (5) に従う。解 $(x(t), y(t))$ が ∂H を横断的に横切るとき、解は ∂H 上で式 (6) の運動 (つまり半平面 B 上の運動) となる。
- b) 同様に B 上の式 (6) に従う運動は、 ∂B に到達したとき、 H 上の運動に切り換わる。

2つのベクトル場は境界線上で一般に不連続となっているが、系の運動は連続な正の半軌道を定義することに注意しよう。

式 (5) を発振状態に、また式 (6) を非発振状態にした場合に得られる Alpazur 発振器の解軌道の一例を図 2 に示した。この系は、パラメータの値を適当に定めると、カオスの振動が観察される。

以下、この例から提起される問題を考えることにする。なお、Alpazur 発振器は、拘束付き 3次元ベクトル場の簡略化した力学的モデルとなっている。このモデルの原形となった拘束付きベクトル場の研究については、R. Lozi and S. Ushiki [10,11], A. Saidi et R. Lozi [12, 13], A. Saidi [14] を参照。

3. 線形 2次元系の貼り合わせ合成系

Alpazur 発振器の解析は、今後の問題として、本文では次のような 2つの半平面上の線形ベクトル場を考えよう。この場合でも Alpazur 発振器の動作に似た現象がみられる。線形ベクトル場として、1つの半平面上では原点を平衡点 (不安定渦状点) とする流れを、他の平面上では y 軸に平行な流れを考えよう。

【SL 系】 半平面 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -1\}$ 上では

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + \sigma y \end{cases} \quad (7)$$

また半平面 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -1 + \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 上では

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases} \quad (8)$$

で定義される合成系, Spiral-Linear 系 (SL 系) の運動と、この系の 2パラメータ (α, σ) 分岐問題を考えよう。

3.1 Principal confinor と 1 次元 Poincaré 写像

簡単のため不安定渦状点を持つ H 平面を上半平面, 平行流れを持つ B 平面を下半平面と呼ぶことにし, 直線 $y = -1$ と $y = -1 + \alpha$ を文献 [10-14] に従って, 次のように呼ぶことにする.

【定義 1】 a) 上半平面 H 内の切り換え直線 (境界直線) $y = -1$ を H-fold HF, 下半平面 B 上の直線 $y = -1$ を H-cofold HCF と呼ぶ. 同様に, 下半平面 B の境界 (切り換え直線) $y = -1 + \alpha$ を B-fold BF, 上半平面 H 上の直線 $y = -1 + \alpha$ を B-cofold BCF と呼ぶ. 図 3 参照.

- b) 上半平面 H 内の B-cofold 上の初期値を出発した流れが, H-fold 上に達し, H-cofold 上に移り, その後下半平面 B 内の平行流れで B-fold 上に達し H 内の B-cofold にかえった時, 元の点に一致する周期解を BH 周期解と呼ぶ. 図 4(a) 参照.
- c) 有限時間で BH 周期解となる流れを, 最終的に BH 周期解となる流れ (eventually BH periodic flow) と呼ぶ.
- d) H-fold 直線と B-fold 直線を交互に通過する, ジグザグ運動の流れを, すべりのモード (sliding mode) にあるという. 図 4(b) 参照.

【性質 1】 SL 系は BH 周期解を唯一つ持ち, この解は不安定である. BH 周期解の近傍の解は, すべりモードで BH 周期解より離れてゆく.

【証明】 $\sigma > 0, 0 < \alpha < 1$ と仮定する. H 平面上で B-cofold 上を出発する解が H-fold 上で同じ x 座標を持つ解が BH 周期解を与える. 今, 図 5 のように $y = \sigma x$ ($\dot{x} = 0$ を与える) と $y = -1 + \alpha, y = -1$ の交点を A, B とし, A, B 間の流れの $y = -1$ と $y = -1 + \alpha$ 上での x 座標の差を $\varepsilon = d_1 - d_0$ とすれば, ε は連続で単調増加 $\varepsilon(A) < 0, \varepsilon(B) > 0$ となることから, 性質 1 が導かれる.

次に最終的に BH 周期解となる軌道と, fold, cofold の関係から, 解が有界領域にとどまる不変領域が存在する場合のみに着目して分岐問題を考えることにしよう.

【定義 2】 a) 上半平面 H の H-fold に接する軌道の接点を擬平衡点 (pseudo

equilibrium point, PE 点) という. 本文では, 擬平衡点を通る軌道は, 切り換わらずにそのまま上半平面に留まると仮定しておく. 図 6 参照.

- b) 上半平面 H の B-cofold に接する軌道の接点を共擬平衡点 (co-pseudo equilibrium point, CPE 点) という. 図 6 参照.

以下, 次の性質が成り立つ場合を考える.

【性質 2】 上半平面 H 上の最終的に BH 周期解となる軌道が H-fold と横断的に交わると仮定しよう. この時, 上半平面 H 上の最終的に BH 周期解となる軌道と H-fold によって囲まれた領域は, SL 系の不変領域となる. この領域を principal basin PB と呼ぶ. また, PB 内に擬平衡点を通る軌道を考え, これによって囲まれた領域

を principal confinor PC と呼ぶ。図 7 参照。

PB 内に入った運動は、有限時間で PC に入り、その後この領域に留まる。したがって、この系の運動はおおざっぱにみると、H 平面内の回転と、H-fold, B-fold 間で互いに切り換わるすべりモードの組み合わせといえる。図 8 参照。以下 PC 内の運動にのみ着目して、何が問題となるか考えてみよう。

【Poincaré 写像 T の定義】 容易に分かるように、この系では PC 領域内の B-cofold を Poincaré 断面として、Poincaré 写像 T が次のようにうまく定義できる。図 9 参照。いま、H 平面内の流れを ϕ_t とし、B 平面内の流れを ψ_t としよう。B-cofold 上の初期値 $(x_0, -1 + \alpha)$ を出発する流れは

$$\phi_{\tau_1} : \text{B-cofold} \rightarrow \text{H-fold}; P_0(x_0, -1 + \alpha) \mapsto P_1(x_1, -1)$$

$$\psi_{\tau_2} : \text{H-cofold} \rightarrow \text{B-fold}; P_2(x_2, -1) \mapsto P_3(x_3, -1 + \alpha)$$

と写される。ここに、 τ_1, τ_2 は cofold 上を時刻 $t=0$ で出発した流れが fold を横断する時刻を表す： $\phi_{\tau_1}(P_0) = P_1, \psi_{\tau_2}(P_2) = P_3$ 。

それぞれの fold, cofold 上の点を同一視して、Poincaré 写像 T を

$$T = \psi_{\tau_2} \circ \phi_{\tau_1} : \text{B-cofold} \rightarrow \text{B-cofold}; x_0 \mapsto x_4$$

と定義する。SL 系では、 ψ_{τ_2} は式 (8) から恒等写像となるので、 $T = \phi_{\tau_1}$ と考えてよい。すなわち、 $x_4 = x_1$ である。実際 T は、 τ_1 をパラメータとする陰関数の形で

$$x_1 = e^{\sigma\tau_1} \{x_0 \cos \tau_1 + (1 - \alpha) \sin \tau_1\} \quad (9)$$

$$-1 = e^{\sigma\tau_1} \{x_0 \sin \tau_1 - (1 - \alpha) \cos \tau_1\}$$

と表わすことができる。T の不連続点は、H 平面上の擬平衡点を通る軌道と、B-cofold の交点で生じる。文献 [5, 15] 参照。

また、不連続点を除いて、T の微分は

$$\frac{dT}{dx_0} = \frac{dx_1}{dx_0} = e^{\sigma\tau_1} \frac{\{x_0 - \sigma(1 - \alpha)\}}{\{\sigma x_0 + (1 - \alpha)\} \sin \tau_1 + \{x_0 - \sigma(1 - \alpha)\} \cos \tau_1} \quad (10)$$

と計算できる。したがって、1次元写像 T は区分的に可微分な不連続写像となる。

写像 T のグラフと SL 系の軌道との関係を定性的に描くと図 10 のようになる。容易にわかるように、T の不連続点が 1 個となるパラメータ (α, σ) の領域は

$$\alpha < 1 - e^{-2\pi\sigma} \quad (11)$$

で与えられる。

【みちくさ】原点だけで不連続な 1 次元写像 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ を

$$f = \begin{cases} (2 - \alpha)x + 1 & (-1 \leq x < 0 \text{ のとき}) \\ ax(1 - x) - 1 & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (12)$$

と定義し、 (a, α) の分岐問題を考えると、これは SL 系に似た分岐がみられると予想される。特に、 $\alpha = 0, a \in [0, 8]$ の分岐をみると、 2^n 則で分岐列の繰り込み現象がみられる。図 11 参照。

3.2 周期解とその安定性

さて、SL 系には Principal confinor 内に種々の周期解が存在し、これらが 2 パラメータ (α, σ) の値によって分岐する。

【定義 3】 a) 上半平面 H 内の B-cofold 上の初期値を出発した流れが、原点を m 回まわって H-fold 上に達し、すべりのモード (sliding mode) で B-fold と、H-fold を n 回振動して、H 内の B-cofold 上にかえった時、元の点に一致する周期解を $R^m(\text{BH})^n$ 周期解と呼ぶことにしよう。同様に、 $R(\text{BH})R, R^2(\text{BH})R(\text{BH})$ などが定義できる。図 12 参照。

b) 有限時間で $R^m(\text{BH})^n$ 周期解となる流れを、最終的に $R^m(\text{BH})^n$ 周期解となる流れ (eventually $R^m(\text{BH})^n$ periodic flow) と呼ぶ。

定義 3 a) より、 $R^m(\text{BH})^n$ 周期解は、先に定義した Poincaré 写像 T の n -周期点に対応することに注意しよう。

【定義 4】 a) $R^m(\text{BH})^n$ 周期解の安定性は、この周期解が式 (7) の n 個の軌道片からなることから、これらの合成写像の微分を用いて定義できる。すなわち、点 $x_0 \in \text{BCF}$ を $R^m(\text{BH})^n$ 周期解に対応する T の 1 つの n -周期点 ($x_0 = T^n(x_0)$) とし、 $\mu = dT^n(x_0)/dx$ とする。周期解は $\mu \neq 0, 1$ のとき、双曲型となり、

$$\begin{aligned} |\mu| < 1 & \text{ ならば、安定周期解 (記号 S で略記)}, \\ \mu > 1 & \text{ ならば、正不安定周期解 (記号 D で略記)}, \\ \mu < -1 & \text{ ならば、逆不安定周期解 (記号 I で略記)} \end{aligned}$$

と呼ぶことにする。

b) 周期解の分岐は

接線分岐 (tangent bifurcation) : $\mu = 1$ で生じる、

周期倍分岐 (periodi doubling bifurcation) : $\mu = -1$ で生じる、

大域的性質による分岐 (global bifurcation) : 軌道の一部が擬平衡点を通る軌道

と一致する場合に生じる。

図 13 は, principal basin, $R(BH)$, $R^2(BH)$ 周期解が存在するパラメータ範囲の分岐図である。周期解の存在範囲の上部の曲線は接線分岐を表す。これらは, それぞれの条件式を数値計算によって求めた。すなわち, principal basin については

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma\tau_1} \{ \sigma \cos \tau_1 + \sin \tau_1 \} \\ -1 + \alpha &= e^{\sigma\tau_1} \{ \sigma \sin \tau_1 - \cos \tau_1 \} \\ x &= e^{\sigma\tau_2} \{ x \cos \tau_2 + (1 - \alpha) \sin \tau_2 \} \\ -1 &= e^{\sigma\tau_2} \{ x \sin \tau_2 - (1 - \alpha) \cos \tau_2 \} \end{aligned} \quad (13)$$

を, たとえば $(x, \tau_1, \tau_2, \alpha)$ について解けばよい。また, $R(BH)$ 周期解の接線分岐は,

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma\tau} \{ x \cos \tau + (1 - \alpha) \sin \tau \} \\ -1 &= e^{\sigma\tau} \{ x \sin \tau - (1 - \alpha) \cos \tau \} \\ e^{\sigma\tau} \{ x - \sigma(1 - \alpha) \} &= \{ \sigma x + (1 - \alpha) \} \sin \tau + \{ x - \sigma(1 - \alpha) \} \cos \tau \end{aligned} \quad (14)$$

を (x, τ, α) について, 軌道の一部が擬平衡点を通る $R(BH)$ 周期解については,

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma\tau_1} \{ x \cos \tau_1 + (1 - \alpha) \sin \tau_1 \} \\ -1 &= e^{\sigma\tau_1} \{ x \sin \tau_1 - (1 - \alpha) \cos \tau_1 \} \\ \sigma &= e^{\sigma\tau_2} \{ x \cos \tau_2 + (1 - \alpha) \sin \tau_2 \} \\ -1 &= e^{\sigma\tau_2} \{ x \sin \tau_2 - (1 - \alpha) \cos \tau_2 \} \end{aligned} \quad (15)$$

を $(x, \tau_1, \tau_2, \alpha)$ について解けばよい。他の周期解についても, 計算はやや煩雑になるが同様な考察が可能である。なお, 一般の周期解に関して, 条件式から座標の変数を消去し, 時間のみを変数とする定式化の方法を, 小室氏から教えていただいた [16]。これらの方法も考慮して, 系統的に周期解の分岐問題を考察することは今後の問題としたい。

4 あとがき

スイッチによって切り換えられるベクトル場の力学系 (switched dynamical system) は, 定性的にみても興味深い力学系のクラスと考えられる。これまでは, 各方面で個々に研究が進められてきたようであるが, 問題を整理し系統的な理論を構築する時期にきているのではないかと思う。SL 系のポアンカレ写像のような不連続な 1 次元写像の分岐問題はすでに解決された問題なのだろうか。これらに関連した事項について教えていただければ幸いである。

最後に, 討論いただいた一楽氏, 周期解の計算をお教えいただいた小室氏に感謝いたします。

文献

- [1] I. Flügge-Lotz, *Discontinuous Automatic Control*, Princeton University Press, 1953.
- [2] J.K. Gibson, 堀井武夫訳, *非線形自動制御*, コロナ社, 1975.
- [3] 坂和愛幸, *最適制御過程 II*, 共立出版, 1970.
- [4] B. ボルチャンスキー, 坂本実訳, *最適制御の数学的方法*, 総合図書, 1974.
- [5] 斉藤利通, *ヒステリシスカオス発生器について*, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J67-A, No. 12, pp. 1162-1167, 1984.
- [6] 斉藤利通, *区分線形拘束方程式で記述されるカオス発生回路について*, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J71-A, No. 4, pp. 965-972, 1988.
- [7] S. Saito, *An Approach Toward Higher Dimensional Hysteresis Chaos Generators*, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 37, No. 3, pp. 399-409, 1990.
- [8] S. Saito, *Reality of Chaos in Four-Dimensional Hysteresis Circuits*, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 38, No. 12, pp. 1517-1524, 1991.
- [9] O. E. Rössler, *Continuous Chaos - Four Prototype Equations*, Ann. New York Acad. Sci., Vol. 316, pp.376-392, 1979.
- [10] S. Ushiki and R. Lozi, *Confinor and Anti-Confinor in Constrained "Lorenz" System*, Japan J. of Applied Math. Vol. 4, No. 3, pp. 433-454, 1987.
- [11] R. Lozi and S. Ushiki, *Organized confinors and anti-confinors and their bifurcations in constrained "Lorenz system"*, Ann. Telecommun., 43, no. 3-4, pp. 187-208, 1988.
- [12] R. Lozi et A. Saidi, *Etude des motifs dans les oscillations de la reaction de Belousov-Zhabotinsky, Partie I*, Les Annales de l'Enit, Vol. 3, no. 2, pp. 69-98, 1989.
- [13] R. Lozi et A. Saidi, *Etude des motifs dans les oscillations de la reaction de Belousov-Zhabotinsky, Partie II*, Les Annales de l'Enit, Vol. 4, no. 2, pp. 91-124, 1990.
- [14] A. Saidi, *Un algorithme de partition de l'espace des parametres pour une famille d'equations differentielles contraintes*, These de l'Universite de Nice, 1988.
- [15] 一楽重雄, 私信.
- [16] 小室元政, RISM での私信.

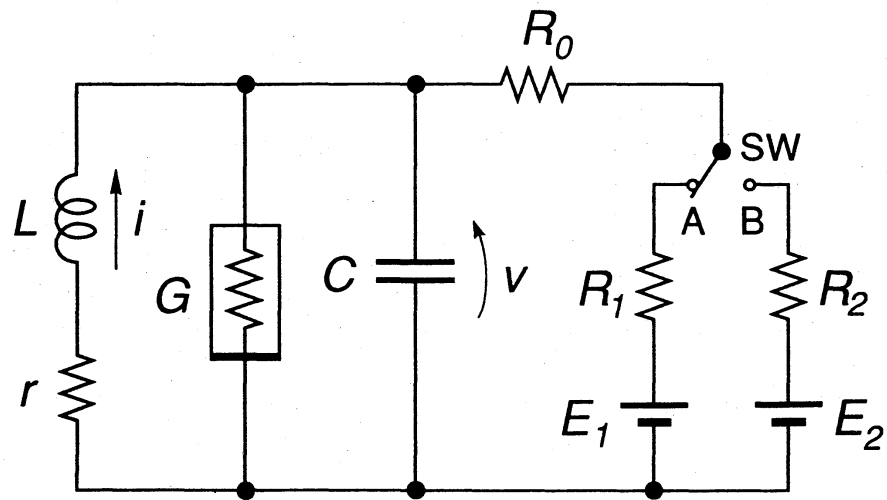


Fig. 1. Alpzur oscillator.

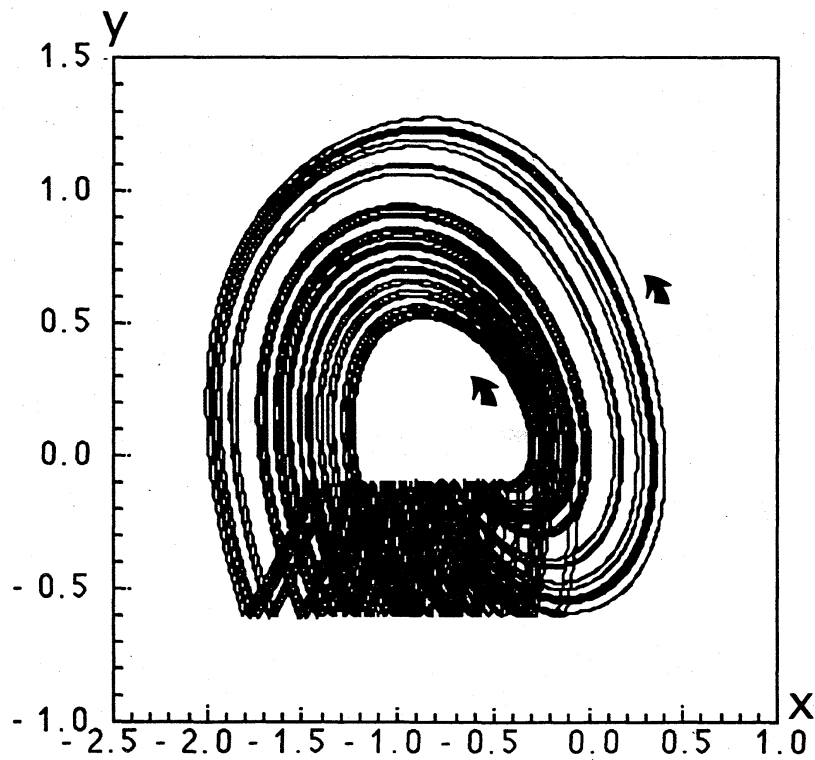


Fig. 2. Example of trajectory obtained from Eqs. (5) and (6), where $r = 0.1$, $g_1 = 0.2$, $B_1 = 0.5$, $g_2 = 2.0$, $B_2 = 2.0$, $b = -0.1$ and $h = -1.0$.

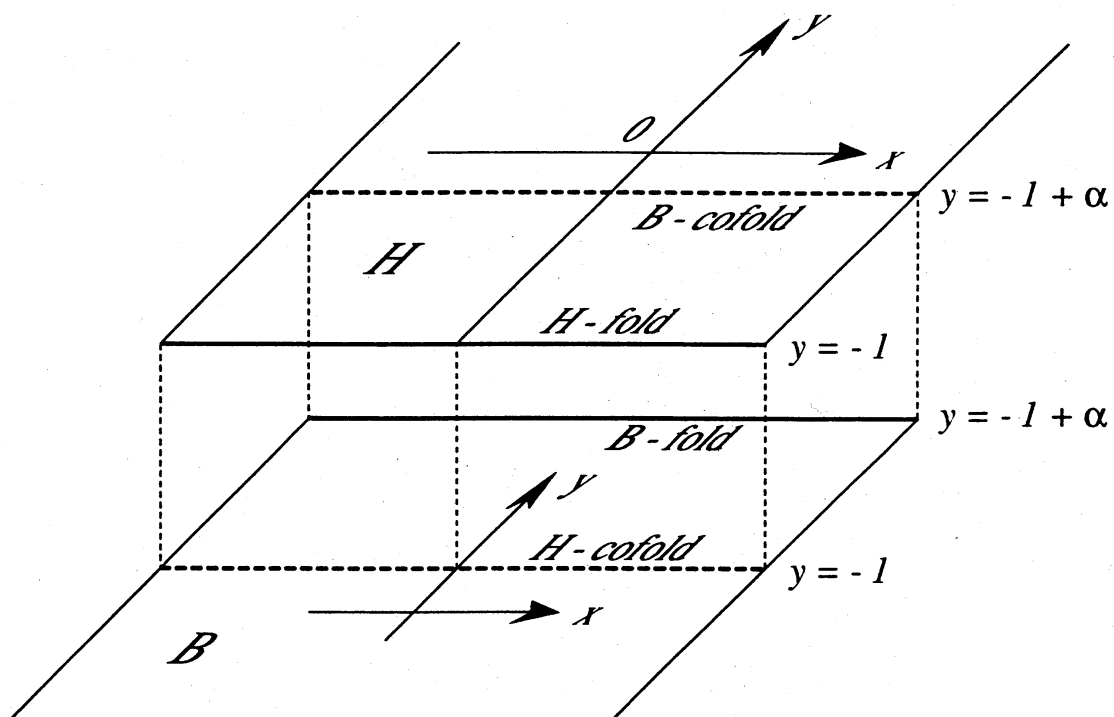


Fig. 3. Switching lines and their images.

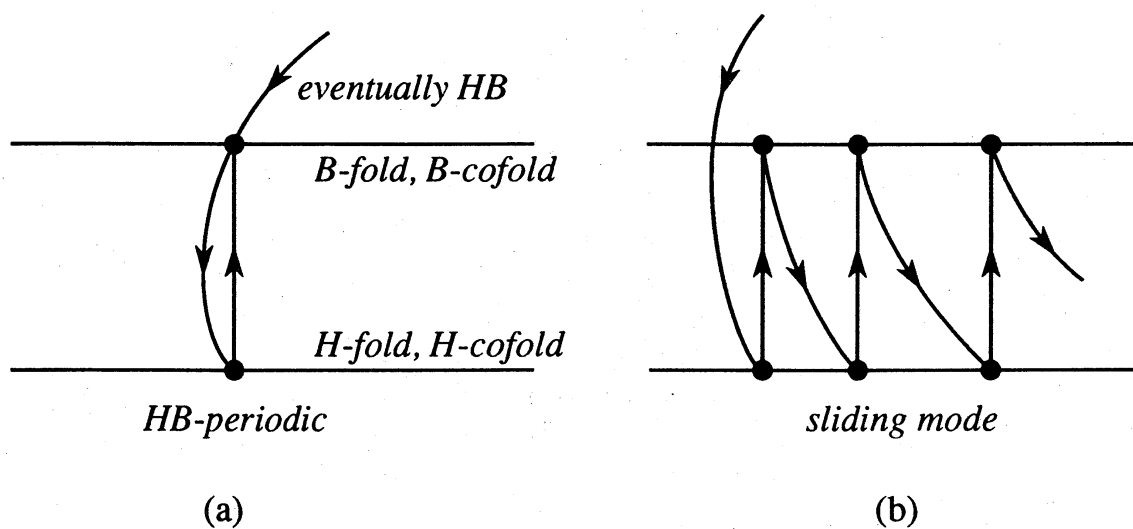


Fig. 4. HB-periodic orbit (a), and orbit with sliding mode (b).

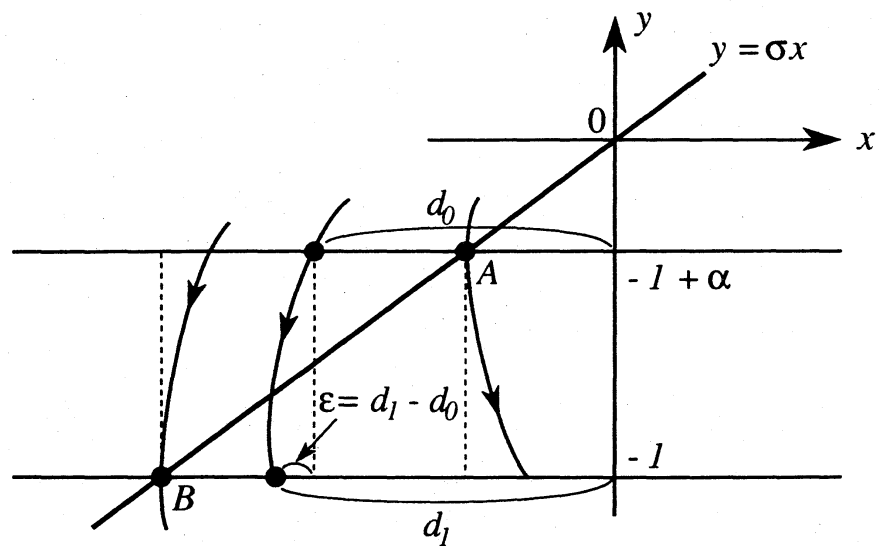


Fig. 5. $\epsilon = 0$ implies an HB-periodic orbit.

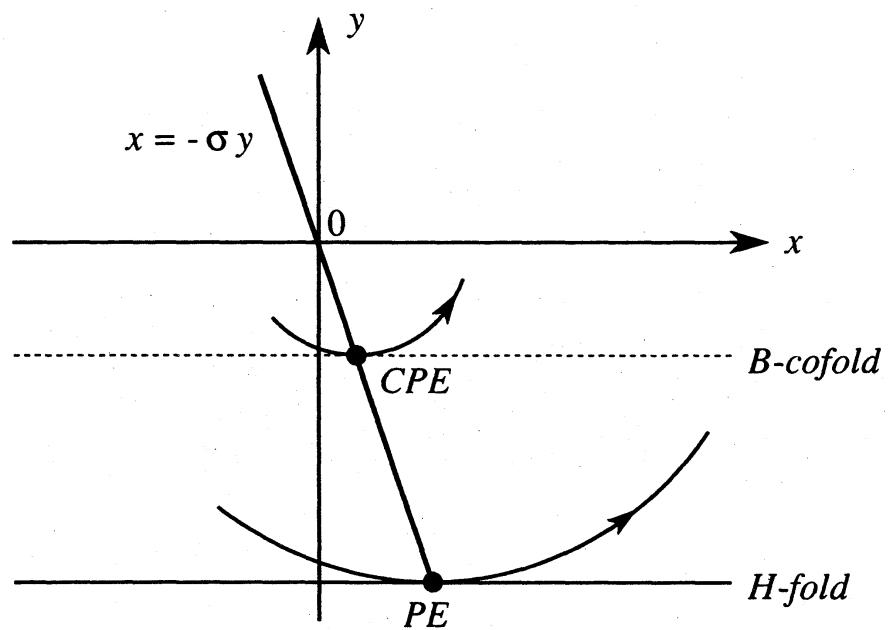


Fig. 6. Pseudo equilibrium point PE and co-pseudo equilibrium point CPE.

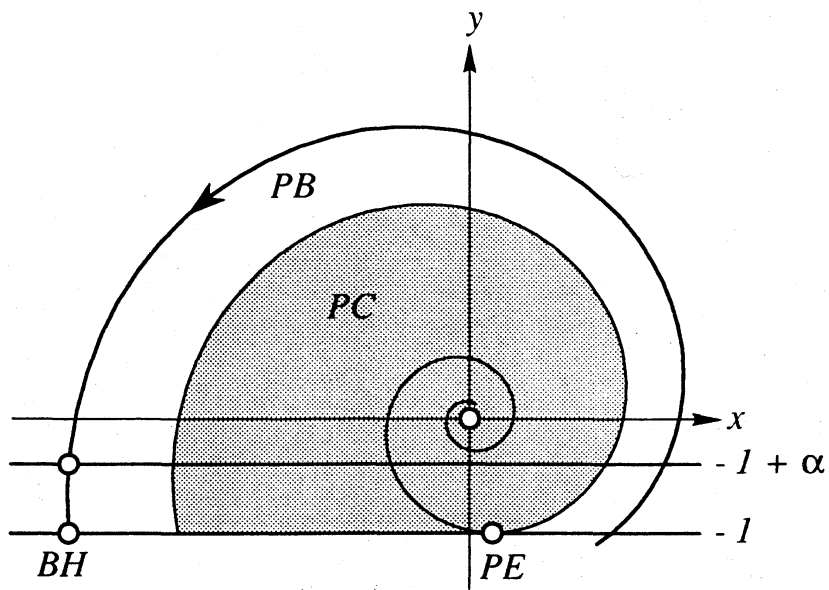


Fig. 7. Principal basin PB and principal confinor PC .

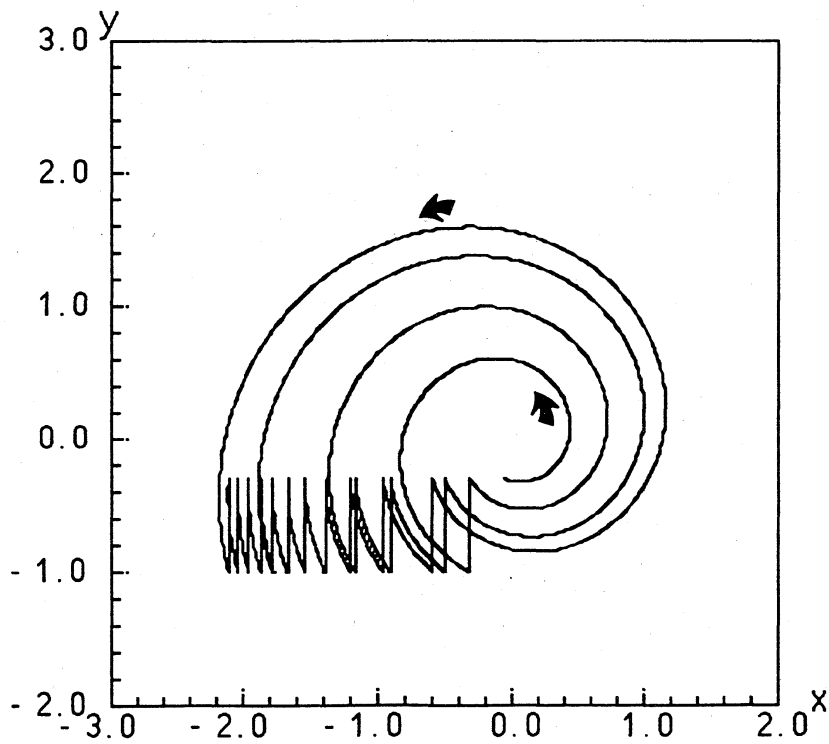


Fig. 8. An example of trajectory, where $\alpha = 0.7$ and $\sigma = 0.2$.

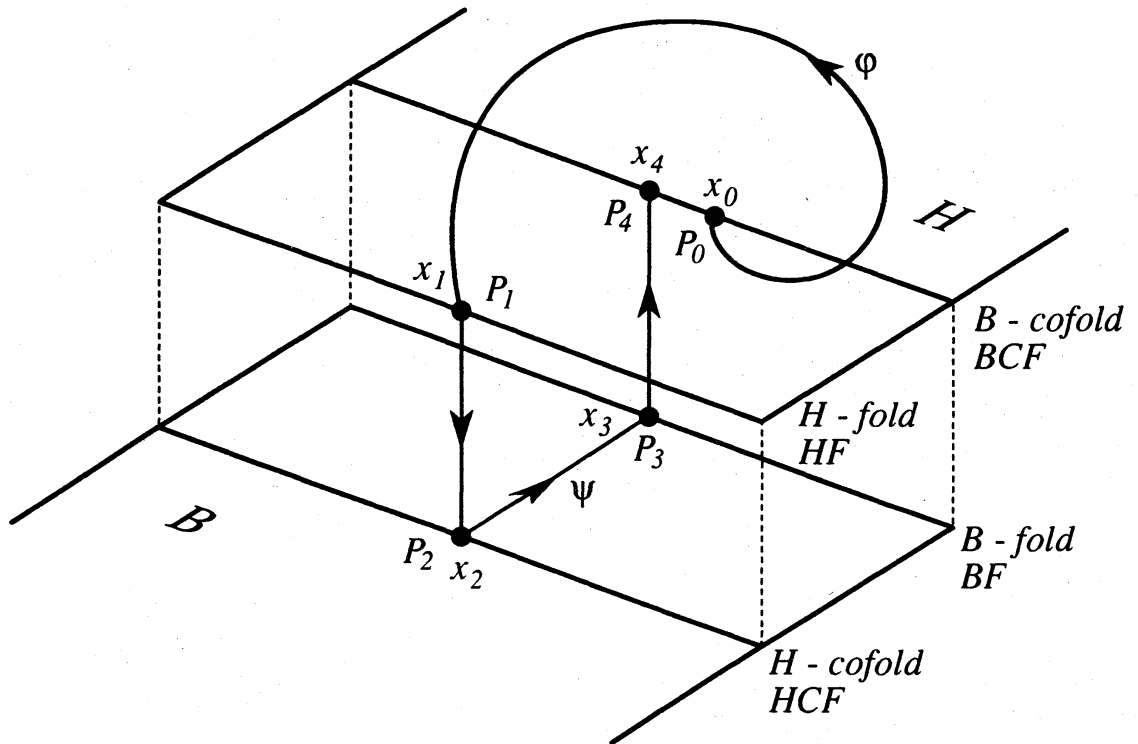


Fig. 9. Poincaré map $T : BCF \rightarrow BCF ; x_0 \mapsto x_4$.

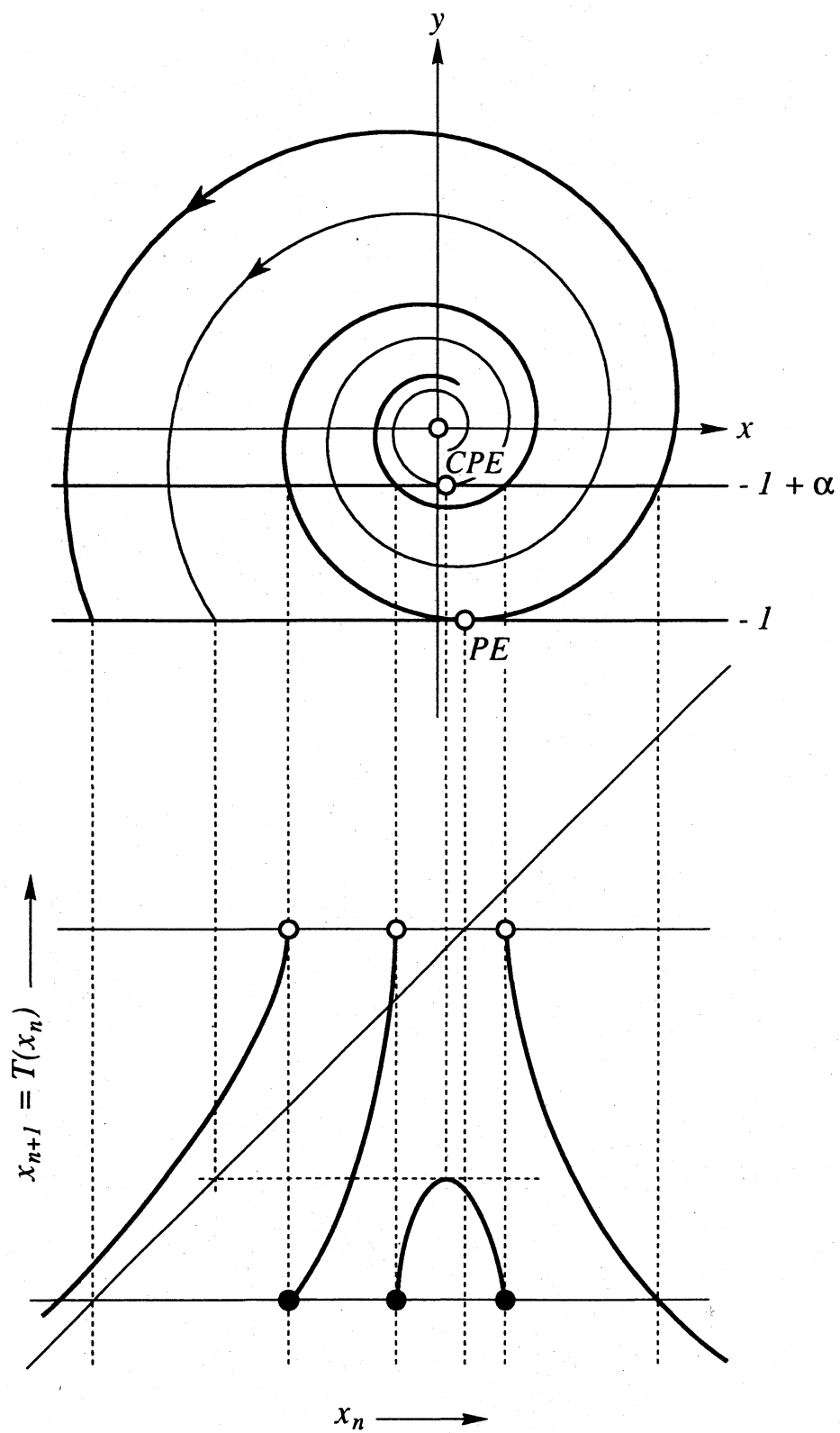


Fig. 10. An example of graph obtained by the Poincaré map T .

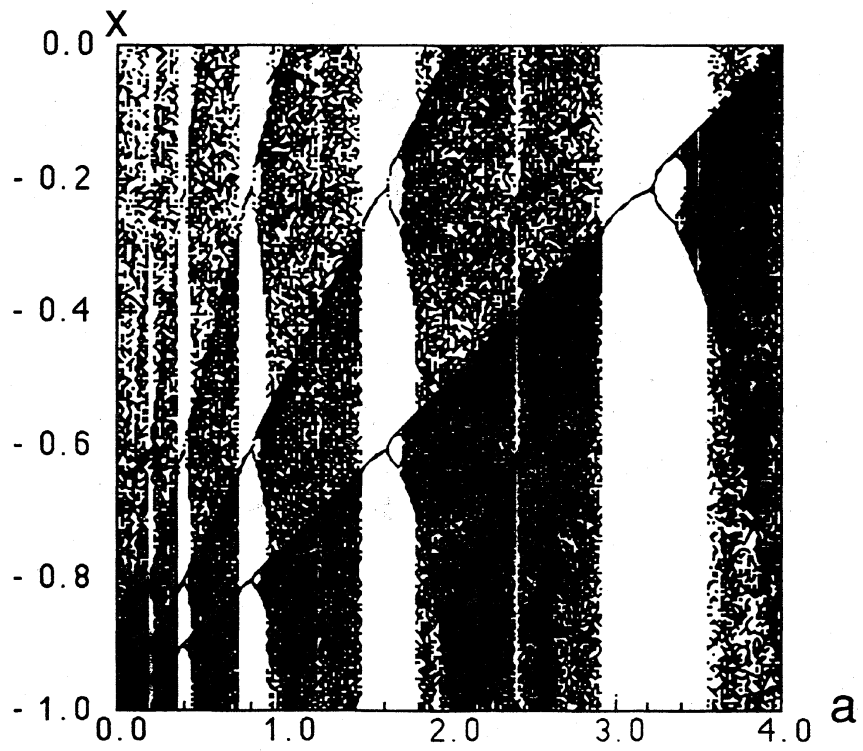
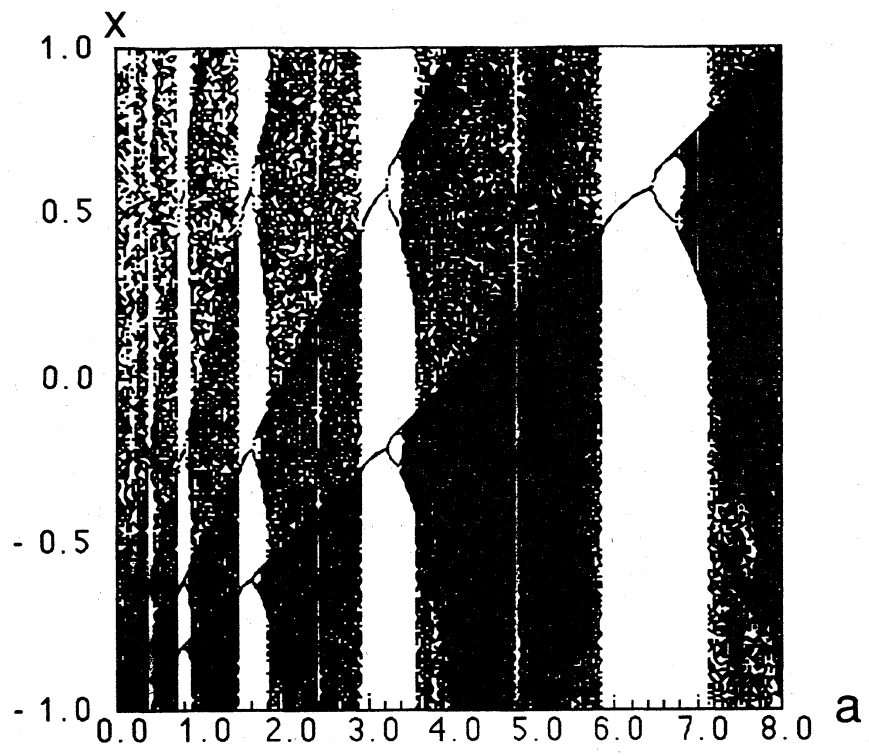


Fig. 11. Bifurcation diagram for Eq. (12), where $\alpha = 0$.

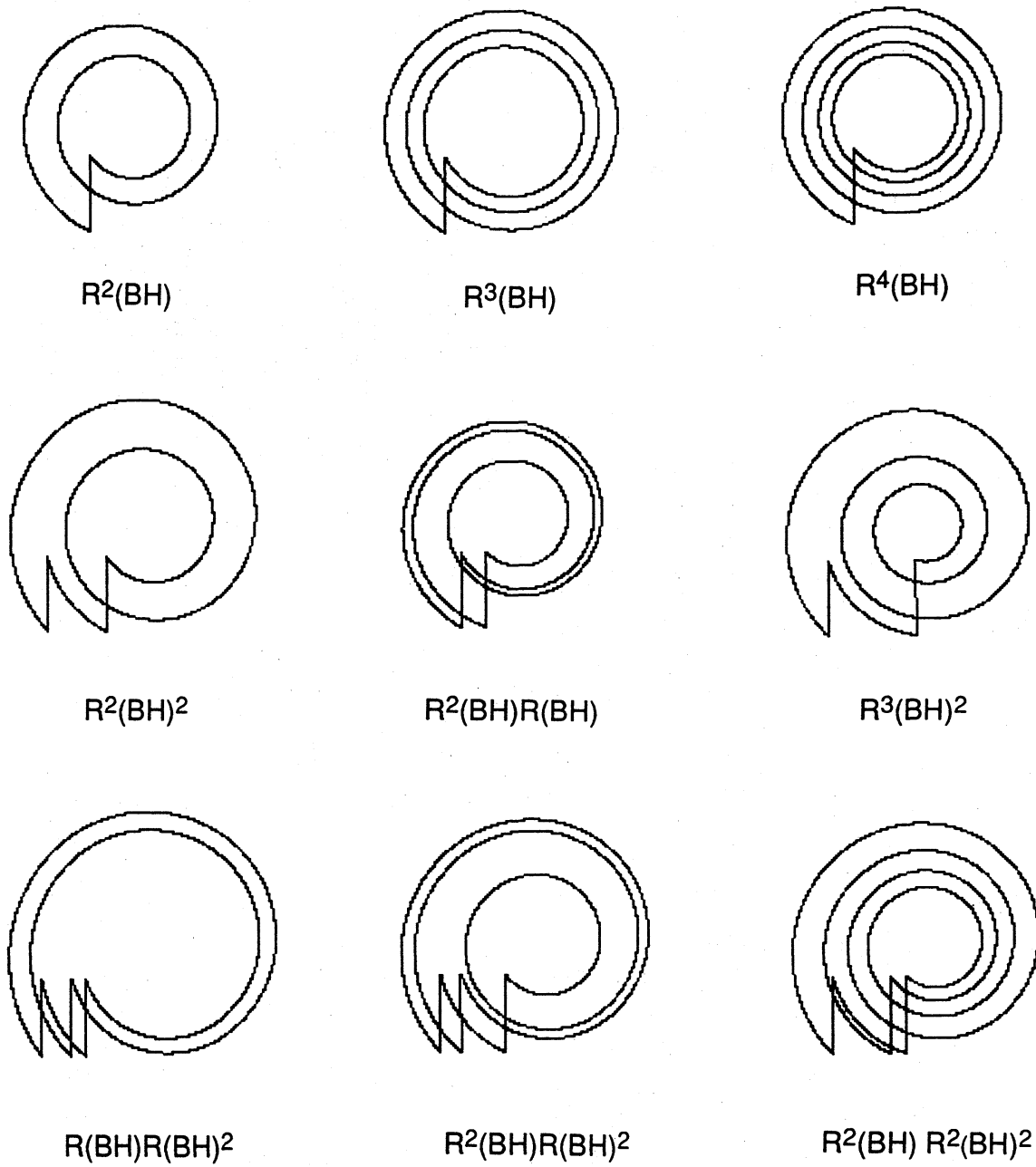
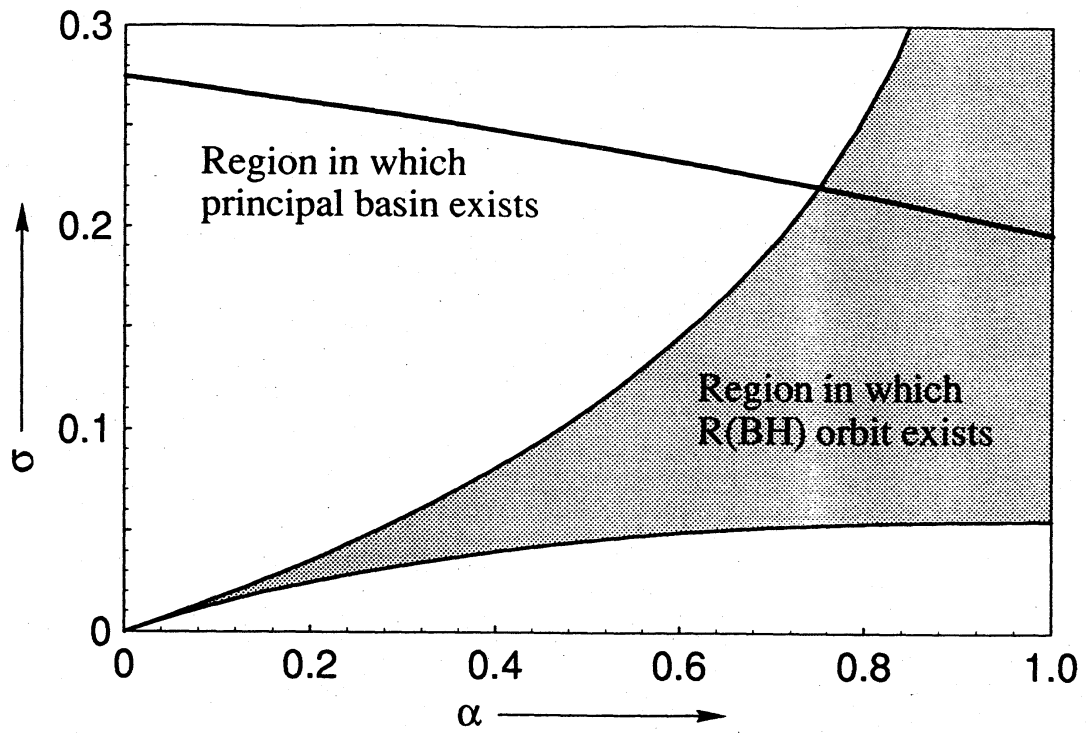
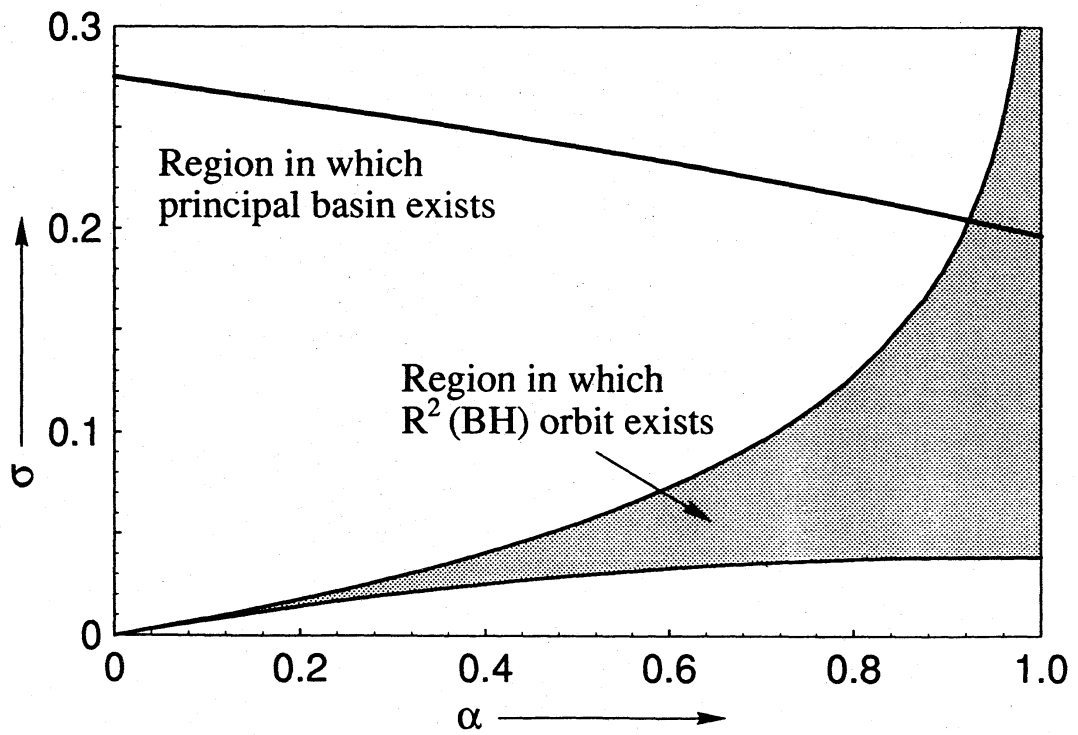


Fig. 12. Examples of periodic orbits.



(a)



(b)

Fig. 13. Bifurcation diagrams of principal basin, $R(BH)$ and $R^2(BH)$ periodic orbits.