

## カスプ型変換の分類

広島大学理学部数学教室 井上 友喜

Tomoki Inoue

### § 1. 序. カスプ型変換とは.

まず, 問題の背景について述べ, カスプ型変換とは何かを明らかにしておこう.

Lorenz方程式

$$\begin{cases} dx/dt = \sigma y - \sigma x \\ dy/dt = -xz + rx - y, & \sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \\ dz/dt = xy - bz \end{cases}$$

において  $r = r_c \approx 24.06$  ( $r$ が $r_c$ より少し小さいときには, flowは "準安定カオス" で,  $r$ が $r_c$ より少し大きいときには, flowは "カオス" であることが知られている) とおく. このときのLorenz系の解を  $(x, y, z)(t)$  とし,  $z(t_n)$  を  $z(t)$  の極大値を順にとった数列とし,  $T^*$  を, 十分大きな  $n$  に対して  $z(t_{n+1}) = T^*(z(t_n))$  により定義された '写像' とすると,  $T^*$  のグラフは先端が鋭く尖ったカスプのような型の一次元写像のようになり,  $T^*$  は微分係数が1の不動点をもつことが J. Yorke と E. Yorke ([Y- Y] Fig. 2a) の数値実験により観察されている.  $T^*$  を  $[0, 1]$  区間の写像に正規化したものを  $T$  とおくと,  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  は次の条件をみたすことが期待できる.

- (1)  $0 < a < 1$  が存在して  $T$  を  $[0, a)$  と  $(a, 1]$  へ制限したものは  $C^1$  関数で, その制限したものをそれぞれ  $T_1, T_2$  とおく.
- (2)  $T(0, a) = (0, 1), T(a, 1) = (0, 1)$ .
- (3)  $(0, a)$  上で  $T'(x) > 1$  で,  $(a, 1)$  上で  $T'(x) < 0$ .

(4)  $T_1'(x)$  と  $T_2'(x)$  は、ともに増加関数である。

上の条件において、 $T'(0) > 1$  と  $T'(1) < 0$  は仮定していない。また、 $T^*$  のグラフの先端が鋭く尖っていることを考慮して、 $a$  における  $T$  の左微分と右微分が有限であることは仮定していない。

条件(1)–(4)をみたす  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  を本稿では カスプ型変換 と呼ぶことにする。

## § 2. 分類.

カスプ型変換は、Lebesgue 測度  $m$ -a. e.  $x$  に対して、 $T^k x$  は  $k \rightarrow \infty$  としたとき 0 に収束しないが、次に述べるような性質(☆)をもつこともある。

(☆)  $[0, 1]$  区間上のすべての連続関数  $f$  に対して、 $m$ -a. e.  $x$  に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = f(0)$$

が成立する。

このことは、 $\{T^k x\}$  が 0 の近傍に滞在している時間が極端に長いということの意味している。この 0 のような点のことを [I2] では、weakly attracting repeller と呼んでいる。

カスプ型変換が、性質(☆)をもつか否かによる分類を考えると、次の定理が成立する。

定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_2^{-2} T_1^{-n}(a) - a) = \infty \quad \text{または} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a - T_1^{-1} T_2^{-1} T_1^{-n}(a)) = \infty$$

が成立するならば, カスパ型変換  $T$  は性質(☆)をもつ

上記の和がどちらも有限ならば, Lebesgue測度について絶対連続でエルゴード的な有限不変測度が存在して, その結果, カスパ型変換  $T$  は性質(☆)をもたない.

注意. 和がどちらも有限の場合に存在する不変測度は, exact と呼ばれる強い混合性を有する. このことの証明は, [I1]で行ったのと同様の手法でできる.

定理の条件の判定規準を系として述べておこう.

系 (1) ある  $\nu \geq 2$  と  $M > 0$  が存在して,  $T_1(x) \leq x + Mx^\nu$  が成立し, ある  $L > 0$  が存在して,  $T_1(x) \geq 1 - L(a-x)^{1/(\nu-1)}$  または  $T_2(x) \geq 1 - L(x-a)^{1/(\nu-1)}$  が成立するとき,  $T$  は性質(☆)をもつ.

(2) ある  $\nu \geq 2$  と  $M > 0$  が存在して,  $T_1(x) \geq x + Mx^\nu$  が成立し, ある  $L > 0$  と  $\kappa < (\nu-1)^{-1}$  が存在して,  $T_1(x) \leq 1 - L(a-x)^\kappa$  と  $T_2(x) \leq 1 - L(x-a)^\kappa$  が成立し,  $T'(1) > 0$  であるとき,  $T$  は性質(☆)をもたない.

この系から,  $T$  が性質(☆)をもつためには, カスパの先端が鋭ければ, それに応じてグラフの原点のところでの対角線への接し方の度合いが大きくなければならないことがわかる.

## § 3. 証明の概略

証明の詳細は [I2] に譲ることとし、ここでは、定理における和の条件が、どのようにしてでてくるのかが、わかるようなかたちで、その証明を概観しよう。次の補題は重要である。

補題  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が、Lebesgue 測度と同値でエルゴード的な  $\sigma$ -有限不変測度  $\mu$  をもち、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\mu([0, \varepsilon)) = \infty$ ,  $\mu([\varepsilon, 1]) < \infty$  をみたすならば、 $T$  は性質(☆)をもつ。

この補題により、定理の証明は、Lebesgue 測度と同値でエルゴード的な  $\sigma$ -有限不変測度  $\mu$  の存在を示し、その不変測度は、定理にでてくる和のいずれかが発散するとき、 $\mu([0, \varepsilon)) = \infty$ ,  $\mu([\varepsilon, 1]) < \infty$  となり、和がどちらも収束するとき、 $\mu([0, 1]) < \infty$  になることを示すことにより完了する。 $\sigma$ -有限不変測度の構成法、測度が有限か無限かの判定方法について述べよう。

$R$  をカスプ型変換  $T$  の  $[a, 1]$  上の first return map とすると、 $[a, 1]$  上の Lebesgue 測度と同値で  $R$  についてエルゴード的な  $R$ -不変確率測度  $\mu_A$  が存在することを示すことができる。 $\mu$  を

$$\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(A_n \cap T^{-n}D) \quad \text{ここで } D \text{ は可測集合,}$$

ただし、 $A_1 = [a, 1]$ ,  $A_{n+1} = A_n \cap T^{-n}([a, 1]^c)$ ,  $n \geq 1$  で定義すると、 $\mu$  は  $[0, 1]$  上の Lebesgue 測度と同値で  $T$  についてエルゴード的な  $T$ -不変  $\sigma$ -有限測度となり、 $\mu([\varepsilon, 1]) < \infty$  である。

$\mu_A$ に対応する密度関数  $g$  の上下からの評価と和の収束と発散に関する条件を用いて,  $\mu$  が有限測度か無限測度かの評価を行う.  $\mu_A$ に対応する密度関数  $g$  は, 次のような評価をもつ (このことの証明は, [I2]のProposition5.1を用いる). ある定数  $M < \infty$  があって,  $g \leq M$  であり,  $n \geq 0$  に対して,  $\alpha_n = T_1^{-n}(a)$ ,  $\beta_n = T_2^{-1}(\alpha_n)$  とおくと, ある定数  $\gamma > 0$  と整数  $k$  があって,

$$g \geq \gamma 1_{(a, T_2^{-1}\beta_k)} \quad \text{と} \quad g \geq \gamma 1_{(T_2^{-1}a, T_2^{-1}T_1^{-1}\beta_k)}.$$

をみたく. 定理にでてくる和のいずれかが発散するとき,  $\mu([0, 1]) = \infty$  を証明してみよう.

$$\begin{aligned} \mu([0, 1]) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A([\beta_n, 1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(R^{-1}[\beta_n, 1]) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_A(T_2^{-1}[\beta_n, 1]) + \mu_A(T_2^{-1}T_1^{-1}[\beta_n, 1])) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_A([a, T_2^{-1}\beta_n]) + \mu_A([T_2^{-1}(a), T_2^{-1}T_1^{-1}\beta_n])) \\ &\geq \sum_{n=k}^{\infty} \gamma ((T_2^{-1}\beta_n - a) + (T_2^{-1}T_1^{-1}\beta_n - T_2^{-1}(a))) \\ &\geq \sum_{n=k}^{\infty} \gamma ((T_2^{-1}\beta_n - a) + c(T_1^{-1}\beta_n - a)) = \infty, \end{aligned}$$

ここで  $c = (\max\{|T_2'(x)|; x \in [T_2^{-1}(a), T_2^{-1}T_1^{-1}\beta_k]\})^{-1}$ .

一方, 定理にでてくる和がどちらも収束するとき,  $g \leq M$ であることを用いて,  $\mu([0, 1])$ の上からの評価を行い,  $\mu([0, 1]) < \infty$  を証明することができる.

#### § 4. 議論

本稿で得られたカスプ型変換に関する結果だけから, § 1で述べた Lorenz系について何らかの結論を述べることはできないが, § 1において述べた  $T^*$ の微分係数が1の不動点が Lorenz系の不安定な周期軌道  $O$ に対応することから, 性質(☆)

との対応を考えると,  $D$ を距離,  $T^t X$ を $X$ を初期値とする軌道とするとき, 正の測度をもつ集合に属する初期値 $X$ に対して

$$(*) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau D(O, T^t X) dt = 0$$

が成立するかどうかは, 興味深い問題である.  $T^*$  のグラフの先端があまりに鋭く尖っているため, Lorenz系が(\*)をみたすことはあまり期待できないと筆者は思うが, 3次元の連続な力学系でカオス的な挙動を示すもので(\*)をみたすようなものが存在するかどうかは興味深い問題である.

#### References

- [I1] T.Inoue: Asymptotic stability of densities for piecewise convex maps, to appear in Ann. Polon. Math.
- [I2] T.Inoue: Weakly attracting repellers for piecewise convex maps, to appear in Japan J. Indust. Appl. Math. vol9 no3 (1992).
- [Y-Y] J.A.Yorke and E.D.Yorke: Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model, J. Stat. Phys. 21 (1979), 263-277.