

Tricorn の境界上の QC 同値性

東京工芸大学 中根 静男 (Shizuo Nakane)

1. 序

この小論では次のような反正則写像の族の力学系を考える。

$$f_c(z) = \bar{z}^2 + c \quad (c \in \mathbb{C}).$$

今、 $P_c(z) = z^2 + c$ とおくと、

$$Q_c(z) \equiv f_c^2(z) = (z^2 + \bar{c})^2 + c = P_c \circ P_{\bar{c}}(z)$$

は正則になる。一般に、 f_c^k は k が奇数なら反正則、偶数なら正則になる。

定義 1. $f_c^k(z_0) = z_0$ を満たすような k があるとき、 z_0 は f_c の周期点
 といい、上式を満たす最小の k を z_0 の周期といい、 z_0 を f_c の k 周期点
 とも言う。このとき、 z_0 の固有値 $\rho = \rho(z_0)$ を次で定義する。

$$\rho = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_c^k \Big|_{z=z_0} & (k : \text{奇数}), \\ \frac{\partial}{\partial z} f_c^k \Big|_{z=z_0} & (k : \text{偶数}). \end{cases}$$

$|\rho| < 1, = 0, > 1, = 1$ のとき、各々 z_0 を吸引的、超吸引的、反発的、中
 立的という。前 3 者をまとめて双曲的とも言う。吸引的 k 周期点 z_0 の吸引
 鉢を $A(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{nk}(z) = z_0\}$ とおき、その z_0 を含む連結成分
 を z_0 の直接鉢という。

注意. k が奇数、 z_0 が f_c の k 周期点ならば、 z_0 は Q_c の k 周期点でも
 あるが、4 次関数 Q_c の周期点としての通常の意味の固有値 Λ は、

$$\Lambda = (Q_c^k)'(z_0) = \prod_{j=0}^{(k-1)/2} 4f_c^{2j+1}(z_0)f_c^{2j}(z_0) = |\rho|^2 \geq 0$$

と、非負実数になる。

定義 2. $K(f_c) = \{z \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) \neq \infty\}$ を f_c の充填 Julia 集合、その境界 $J(f_c)$ を f_c の Julia 集合という。多項式に対しても同様に定義する。 $T = \{c \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty\}$, $M = \{c \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) \neq \infty\}$ を各々 tricorn, Mandelbrot 集合という。これらは各々対応する関数族の Julia 集合の connectedness locus になっている。つまり、 $T = \{c \in \mathbb{C}; J(f_c), K(f_c) \text{ が連結}\}$, $M = \{c \in \mathbb{C}; J(P_c), K(P_c) \text{ が連結}\}$ となる。

tricorn は、Milnor [9] と Rippon et al. [2] たちによって独立に発見された。Rippon 達は 2 次関数族の Mandelbrot 集合のアナロジーを考えたようであるが、Milnor は 3 次関数族 $P_{a,b}(z) = z^3 - 3az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$) の connectedness locus の実平面の切口の中に tricorn を見だし、危点の軌道を調べる中で、 f_c に到達したようである。単に関数族 $\{f_c\}$ の connectedness locus の中だけでなく、3 次関数や、その他の関数族においても現れるという意味で、tricorn は Mandelbrot 集合と同じく、普遍的な対象と言える。

tricorn や Mandelbrot 集合及びその拡大図を見て気づくことはどれだけ拡大しても必ず現れる、その自己相似性であろう。筆者の目標も tricorn の自己相似性の証明にある。Mandelbrot 集合の自己相似性に関しては Douady-Hubbard [5] によって基本的には解明されたと言ってよいだろう。彼等は polynomial-like mapping という概念を導入した。それは renormalization を表現するものとみなせるが、tricorn の場合は彼等に習って antipolynomial-like mapping を考えればよい、というのは誰でも考えつくことであろう。基本的にはこの方向でよいのだが、難点は、パラメータ c に関する解析性が失われることで、(Q_c の形を見よ) ここをいかに乗り越えるかがポイントになる。

図 1 は Mandelbrot 集合、図 2 は tricorn、そして図 3 及び 4 は tricorn

の一部分の拡大図である。図5、6は4次関数族

$$f_{a,b}(z) = z^4 - 8az^3/3 + 2(a^2 + b^2)z^2, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

の connectedness locus 及びその拡大図である。ここにも tricorn が現れることがわかるだろう。

尚、本小論の図は宇敷氏のソフトをもとにして作成したものである。

2. Tricorn の性質

この節では、tricorn について、今までに知られていることなどを中心に述べる。Mandelbrot 集合と比較すると面白い。

(1) 120 度の回転で不変 ([2], Winters [15]).

これは、 $f_{c'} \sim_{\text{affine}} f_c \iff c' = \omega^j c, \omega = e^{2\pi i/3}, j = 0, 1, \text{ or } 2$ という事実からの帰結である。

(2) $T \cap \mathbb{R} = M \cap \mathbb{R}$. 定義より明らか。

(3) compact ([2]).

(4) 連結。Mandelbrot 集合も連結。

これは [2] で予想されていたことである。Mandelbrot 集合のときと同様の方針で示す。但し、パラメータの解析性がないので、反正則関数に対する surgery を用いる。これは宍倉氏のアドバイスによる。 $z = \infty$ の近くで $\phi_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_c^{2n}(z)\}^{1/2^{2n}}$ とおくと、次が成り立つ。

$$\phi_c \circ f_c(z) = \overline{\phi_c(z)}^2 = f_0 \circ \phi_c(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_c(z)/z = 1,$$

$$c \in T \implies \phi_c : \bar{\mathbb{C}} - K(f_c) \simeq \bar{\mathbb{C}} - \bar{D} : \text{conformal}.$$

そこで、 $\Phi(c) = \phi_c(c)$ とおくと、次が成り立つ。その系として tricorn の連結性が従う。ここで Φ は正則でないことに注意する。

定理 1. (中根 [12]) $\Phi : \bar{C} - T \simeq \bar{C} - \bar{D} : \text{diffeo.}$

(5) 局所連結でない (Lavaurs [7])

図 7 は tricorn の拡大図であるが、直観的にはこれから局所連結でないことがわかるであろう。Mandelbrot 集合は局所連結という大予想がある。

(6) 自己相似性

小さな tricorn は奇数周期、小さな Mandelbrot 集合は偶数周期の hyperbolic components に対応している。図 1 - 図 4 参照。

(7) hyperbolic components について

$H_k = \{c \in \mathbb{C}; f_c \text{ が吸引的 } k \text{ 周期点を持つ}\}$ の連結成分を周期 k の hyperbolic component という。

例. $H_1 = \{c = z - \bar{z}^2; |z| < 1/2\}$. その境界は内サイクロイド。図 8 に H_1 と H_2 を図示する。

命題 1. ([2]) $\text{Int}(T) \cap \partial H_1 \neq \emptyset$.

注意. Mandelbrot 集合の場合、総ての k に対し、 $\partial H_k \subset \partial M$ が言えるので、命題は成り立たない。実は tricorn はそれ自身としては完全ではなく、biquadratic map $Q_{a,b}(z) = (z^2 + a)^2 + b = P_b \circ P_a(z)$ という解析的な 2 パラメータ族の connectedness locus のある実平面での切口として考えるのが自然で、そうすると、 ∂H_1 はその境界に含まれるのである。ちなみに、Hénon 写像族や Blaschke 関数族等も非解析的な族であるが、命題が成立する。([9], [10], 字敷 [14])

命題 2. ([15]) ε を小にとると、 $\{c; |c - \frac{1}{4}| < \varepsilon\} \cap \partial T \subset \partial H_1$ が成り立つ。

注意. 最近、穴倉 [13] は Mandelbrot 集合の境界の Hausdorff 次元が 2 であることを示したが、命題 2 は tricorn の境界には滑らかな弧、従って Hausdorff 次元が 1 の部分があることを意味している。

次に H_k の任意の連結成分を W とおく。固有値写像 $\Lambda : W \rightarrow D = \{|\lambda| < 1\}$ を $\Lambda(c) = \rho(z_0)$ で定義する。但し、 z_0 は f_c の吸引的 k 周期点のうち、その直接鉢が 0 を含むものとする。

定理 2 ([12], see also [10]).

k が偶数 $\Rightarrow \Lambda : W \rightarrow D : \text{diffeomorphism,}$

k が奇数 $\Rightarrow |\Lambda| : W \rightarrow [0,1) : \text{fibering by circles about the center.}$

注意. Winters は $k = 1, 2$ のとき示した。 k が偶数のときは Douady [3] が Mandelbrot 集合に対して示した方法を用いて容易に示せる。 k が奇数のときも Douady の方法の anti 版を用いて示すのだが、このときは固有値が等角不変量でないために証明は面倒になる。 Milnor [10] は一般の多項式族の connectedness locus の hyperbolic components が topological cell であることを示した。更にその実多項式族版の結果も与えているが、それを用いると、任意の k に対し、 W が D に real analytic diffeo であることが示される。

3. Tricorn の境界上の QC 同値性

まず力学系を分類するための同値性をいくつか定義する。

定義 3. f, g を多項式又は反多項式とする。

$f \underset{\text{top}}{\sim} g \iff K(f), K(g)$ の近傍 U, V と、同相写像 $\varphi : U \rightarrow V$

が存在して $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ を満たす。

$f \underset{qc}{\sim} g \iff$ 上の φ が quasiconformal (qc)。

$f \underset{hol}{\sim} g \iff$ 上の φ が正則 (affine)。
(affine)

$f \underset{hb}{\sim} g \iff$ 上の φ が qc で $K(f)$ 上 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi = 0$ を満たす。

$f \underset{j}{\sim} g \iff$ 同相写像 $\varphi : J(f) \rightarrow J(g)$ で $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ を満たすものが存在する。

定義 4. U, U' を \mathbb{C} の開集合とする。向きを保つ同相写像 $\phi : U \rightarrow U'$ が quasiconformal \iff

(1) 超関数の意味での一階偏導関数が局所可積分、

(2) $|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}| \leq k |\frac{\partial \phi}{\partial z}|$ を満たす定数 $k < 1$ が存在する。

注意. (2) は ϕ が infinitesimal に円を楕円に写すのだが、その楕円の長軸と短軸の比が有限の値 $\frac{1+k}{1-k}$ で押えられることを意味する。

$f \underset{affine}{\sim} g \implies f \underset{hol}{\sim} g \implies f \underset{hb}{\sim} g \implies f \underset{qc}{\sim} g \implies f \underset{top}{\sim} g \implies f \underset{j}{\sim} g$
は明らかに成り立つが、ある場合には逆も成り立つ。次はその一つである。

命題 3. (Douady-Hubbard [5]) $K(f), K(g)$ が連結のとき、

$$f \underset{hb}{\sim} g \implies f \underset{affine}{\sim} g.$$

定義 5. 関数族 $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の元 g_λ が K-stable \iff

λ の Λ での近傍 U が存在して、総ての $\lambda' \in U$ に対し $g_\lambda \underset{K}{\sim} g_{\lambda'}$.
特に qc-stable のことを構造安定 (structurally stable) とも言う。

例. 2次関数族 $P_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$ を考える。

命題 4. $P_c : J\text{-stable} \iff c \in \mathbb{C} - \partial M.$

ここで W を hyperbolic component とする。(予想 : $\mathbb{C} - \partial M$ の総ての成分は hyperbolic) 固有値写像 $\Lambda : W \simeq D$ の 0 の原像を W の中心という。

命題 5. $c \in W, P_c$ が構造安定 $\iff c$ が W の中心でない。

以上は Mané-Sad-Sullivan [8] が一般の有理写像族に対して示した結果を Douady-Hubbard が 2 次関数族に対して適用したものである。これで、Mandelbrot 集合の内部及び外部での qc 同値性に関しては完全に解明されたことになる。Mandelbrot 集合の境界上の qc 同値性については次の著しい結果がある。

命題 6. (Douady-Hubbard [5]) $\partial M \ni c, P_c, \tilde{q}_c P_c \implies c' = c.$

この結果はそれ自身としても、とても興味深いものであるが、Mandelbrot 集合の自己相似性の証明の際にも用いられる。どのように示すか、簡単に述べると、小さな Mandelbrot 集合から本体への写像を renormalization によって、まず作る。次に、この写像の連続性を言うのであるが、内部では安定なので容易に示せる。残るは境界上である。ここでは上で見たように非常に不安定なのだが、逆にその不安定性を利用して連続性が従う。更にこの写像が分岐被覆になることを示すのだが、その際にパラメータに関する解析性を本質的に使う。後はその次数が 1 であることを言えばよい。

従って、tricorn に対して上のような qc 同値性を示すことは重要である。ちなみに tricorn の場合、上の写像が分岐被覆になることは一般には期待できない（反例あり）。

命題 6 は次に述べる Naishul [11] の結果と関係があると思われる。

命題 7. ([11]) 正則関数の中立的周期点の固有値は位相不変量である。

双曲的周期点の固有値はそうでないことは上述の命題 4,5 から明らかである。さて、tricorn に対する qc 同値性であるが、hyperbolic component に対しては容易に次が示せる。

定理 3. W を T の hyperbolic component、 $c \in W$ とすると、 f_c は J -stable。かつ、 f_c が構造安定 $\iff c$ が W の中心でない。

tricorn の場合も hyperbolic でない component が存在するかという問題があるので、定理 3 は命題 5 より弱い。

次に W を奇数周期 k の T の hyperbolic component とし、その境界上の qc 同値性を考える。 $c_0 \in \partial W$ とすると、 f_{c_0} の中立的 k 周期点 z_0 がある。つまり、 $f_{c_0}^k(z_0) = z_0$ 、 $(f_{c_0}^{2k})'(z_0) = 1$ を満たす。今、次を仮定する。

$$(A.1) \quad (f_{c_0}^{2k})''(z_0) \neq 0,$$

$$(A.2) \quad \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(z) = z, (f_c^{2k})'(z) = 1 \text{ を満たす } z \text{ がある。}\}$$

は $c = c_0$ の近くで実解析的な弧 $C: c = c_t, t \in I \subset \mathbb{R}$ をなす。

定理 4. このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad c \in C \Rightarrow f_c \sim_{qc} f_{c_0},$$

$$(2) \quad f_c \sim_{qc} f_{c_0} \Rightarrow \omega^j c \in C, \quad j = 0, 1, \text{ or } 2.$$

注意. (1) 仮定 (A.1) は幾何学的には c_0 が内サイクロイドのカスプ点でないこと、そして力学系としては z_0 が "persistently non-hyperbolic" であることを意味する。

(2) 仮定 (A.2) をチェックするのは容易ではない。図を見る限り、カスプ点以外ではかなり滑らかになっている。例えば、 $\frac{\partial}{\partial c} f_c^{2k}(z_0)|_{c=c_0} \neq 0$ ならば (A.2) が従う。

(3) カスプ点では定理が成り立たないことは、Camacho [1] の標準形からわかる。

例. $k = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \partial W &= \{c = z - \bar{z}^2; |z| = 1/2\} \\ &= \{c = c_t = e^{2\pi i t}/2 - e^{-4\pi i t}/4; t \in [0, 1)\} \end{aligned}$$

は実解析的で、(A.1) はカスプ点でないことと同値。図9から12までは、各々 $t = 0, 0.05, 0.1, 1/6$ に対応する f_{c_t} の充填 Julia 集合である。 $t = 1/6$ にはカスプ点に対応している。

証明のアウトライン.

(1) $F_t(z) \equiv f_{c_t}^2(z)$ は t を実解析的パラメータに持つ4次関数で、仮定より、 t に関して実解析的な F_t の中立的 k 周期点 z_t で $(F_t^k)'(z_t) = 1$ を満たすものがある。 t を複素化して正則パラメータに出来るが、関数関係不変の原理により、このときも $F_t^k(z_t) = z_t$, $(F_t^k)'(z_t) \equiv 1$ が成り立つ。(A.1) より z_t は persistently non-hyperbolic, つまり、 t を動かしても双曲的にならない。更に F_t の危点の軌道の振舞いも不変なので、Mané-

Sad-Sullivan の定理 D より、 $F_t \underset{qc}{\sim} F_0$ が従う。これから、 t を実に戻して $f_{c_t} \underset{qc}{\sim} f_{c_0}$ が従う。

(2) Douady-Hubbard が命題 6 の証明に用いた qc-deformation を用いると、 c -平面内の実解析的弧 $c = c(t)$ で、

$$c(0) = c_0, \quad f_{c(t)} \underset{qc}{\sim} f_{c_0}, \quad f_{c(1)} \underset{hb}{\sim} f_c$$

を満たすものがとれる。但し、今は 2 次反多項式を扱っているため、 $c(t)$ を複素解析的には出来ない。ここが Mandelbrot 集合の場合と異なる点である。命題 3 より $f_{c(1)} \underset{affine}{\sim} f_c$ 、故に性質 (1) より、 $c(1) = \omega^j c$ 、 $j = 0, 1 \text{ or } 2$ が従う。一方、弧 C の特徴づけと命題 7 より $c(t) \in C$ 、故に $\omega^j c = c(1) \in C$ 。(終)

さて、定理 1 において定義された写像 Φ を用いて、Mandelbrot 集合のときと同様にして、tricorn に対しても外周曲線や外周角を定義できる。つまり、 $\theta \in [0, 1)$ に対し、 $R_\theta(T) \equiv \Phi^{-1}(\{re^{2\pi i\theta}; r > 1\})$ を tricorn の外周角 θ の外周曲線と定義する。興味があるのは $r \rightarrow 1$ としたときの $R_\theta(T)$ の挙動である。 $R_0(T)$ が $c = 1/4 \in \partial H_1 \cap \partial T$ に達するのは、Mandelbrot 集合のときの議論からわかる。 $0 < \theta$ が小さいときには定理 4 より次のように予想している。

予想. $\theta > 0$ が十分小さいとき、 $R_\theta(T)$ は ∂H_1 上には達せず、 H_2 の方に折れ曲がる。

注意. ここで Φ が正則でないことに注意する。実際、もしも Φ が正則ならば、命題 2 と Carathéodory の理論から、 $R_\theta(T)$ は ∂H_1 上に達することが示される。定理 3 は、要するに ∂H_1 の境界の滑らかな弧の部分は力学系的

には一点とみなせることを意味するので、外周曲線も一本しか達しないというのが上の予想の根拠である。図 13 - 16 は、外周曲線や外周角を示すための $\mathbb{C} - T$ の 2 進分割表示であるが、これらも上の予想を示唆すると思われる。2 進分割に関しては宇敷氏の指摘による。更にこの予想は $\phi^{-1} : \bar{\mathbb{C}} - \bar{D} \simeq \bar{\mathbb{C}} - T$ が ∂D 上までは連続に延ばせないことを意味するが、それは T が局所連結でないことに対応している。

上の証明の (2) の議論を用いると、偶数周期 k の hyperbolic component W の境界上でも同様の結果が成り立つ。

定理 5. $c_0 \in \partial W$, $\Lambda(c_0) = \lambda_0$ とすると、

$$(*) \quad f_{c_0}^k(z_0) = z_0, \rho(z_0) = \lambda_0$$

を満たす z_0 が存在する。今、(*) を満たす z_0 を持つような c_0 が $c = c_0$ の近くで孤立していれば（特に局所的に一意ならば）、

$$f_c \underset{qc}{\sim} f_{c_0} \Rightarrow c = \omega^j c_0, \quad j = 0, 1, \text{ or } 2.$$

注意. 1) もし λ_0 が 1 の k 乗根ならば、定理 5 の仮定から周期的な外周曲線が $c = c_0$ に達することが従う。Goldberg & Milnor [6] の定理 C.7 の証明を見よ。多項式の解析的な 1 パラメータ族に対してはその仮定は常に成り立つ。

2) この定理の仮定は極めて安直のように見える。筆者としては、次の予想に対する一つの根拠とするために、あえて述べたのである。例えば、周期 2 の hyperbolic component の一部（先端の付近）では成り立つことが確かめられている。Winters によると、周期 2 の場合は仮定を満たすのだが、証明にあまりない部分があるように思える。

予想. $c_0 \in \partial T$ は奇数周期の hyperbolic components の境界上にはないとすると、定理 5 とおなじ結論が従う。

次は、定理 5 と密接な関係があると思われる。

定理 6. $c_0 \in \partial W$, かつ f_{c_0} は偶数周期 k の安定な周期領域を持つとする。更に 安定領域の一つの閉包のある近傍 U で $f_{c_0}^k$ は 2 次の polynomial-like mapping になると仮定する。このとき、定理 5 と同じ結論が従う。

証明. φ を f_{c_0} と f_c の間の qc-equivalence、 $U' = \varphi^{-1}(U)$ とおく。仮定より $f_{c_0}^k|_U = \varphi \circ f_c^k|_{U'} \circ \varphi^{-1}$ は 2 次の polynomial-like mapping である。
[5] の straightening theorem より、

$$f_{c_0}^k|_U \sim_{\text{hb}} P_{\chi_0}, \quad f_c^k|_{U'} \sim_{\text{hb}} P_\chi$$

を満たすような χ, χ_0 があり、 $P_{\chi_0} \sim_{\text{qc}} P_\chi$ が従う。 $c_0 \in \partial W$ より $\chi_0 \in \partial M$ となり、命題 6 から $\chi = \chi_0$ が従う。よって hybrid equivalence $\psi: f_{c_0}^k|_U \sim_{\text{hb}} f_c^k|_{U'}$ が得られた。この ψ を f_{c_0} と f_c で引き戻してゆけば hybrid equivalence: $f_{c_0} \sim_{\text{hb}} f_c$ が得られる。命題 3 より 定理 6 は従う。

注意. polynomial-like mapping になるという仮定も随分安直な仮定である。tricorn の外周曲線に関する理論、特にその到達に関する諸性質が Mandelbrot 集合に対する Douady-Hubbard [4] の結果のように確立されれば、この仮定が満たされることが分かるはずである。定理 4 の後の注意から、tricorn の場合、Mandelbrot 集合のときとは違った結果になる可能性もあるが、偶数周期の hyperbolic component の境界上では Mandelbrot 集合のときと同様の結果になると予想している。

文献

- [1] C. Camacho, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields, *Asterisque* 59-60 (1978), 83-94.
- [2] W. Crowe, R. Hasson, P. Rippon & P. E. D. Strain-Clark, On the structure of the Mandelbar set, *Nonlinearity*, 2 (1989), 541-553.
- [3] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes, *Sém. Bourbaki* 599, *Astérisque* 105-106 (1983), 39-63.
- [4] A. Douady & J. H. Hubbard, Etude dynamique des polynomes complexes, Part I & II, *Publ. Math. d'Orsay*, 1984-85.
- [5] A. Douady & J. H. Hubbard, On the dynamics of the polynomial-like mappings, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris)* 18 (1985), 287-343.
- [6] L. Goldberg & J. Milnor, Fixed point portraits of polynomial maps, Preprint.
- [7] P. Lavaurs, Le lieu de connexité des polynomes du troisième degré n'est pas localement connexe, in preparation.
- [8] R. Mañé, P. Sad & D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris)* 16 (1983), 193-217.
- [9] J. Milnor, Remarks on iterated cubic maps, To appear in *Experimental Mathematics*.
- [10] J. Milnor, Hyperbolic components in spaces of polynomial maps, with an appendix by A. Poirier, Preprint.
- [11] V. A. Naishul, Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their application to analytic differential equations in \mathbb{C}^2 and $\mathbb{C}\mathbb{R}^2$, *Trans. Moscow Math. Soc.* 42 (1983), 239-250.

- [12] S.Nakane, On hyperbolic components of the tricorn, in preparation.
- [13] M.Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, Preprint.
- [14] S.Ushiki, Arnold's tongues and swallow's tails in complex parameter spaces, in "Stability Theory and Related Topics in Dynamical Systems," World Sci. Publ., 1989, 153-178.
- [15] R.Winters, Bifurcations in families of antiholomorphic and biquadratic maps, Thesis at Boston Univ.

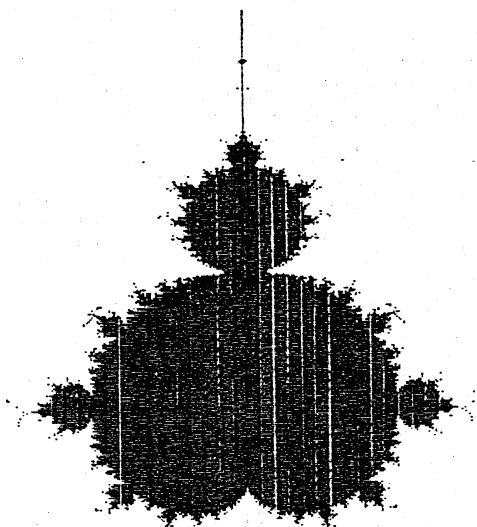


图 1. Mandelbrot 集合

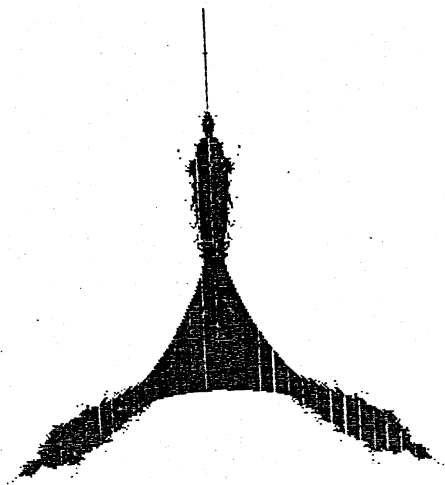


图 2. triton

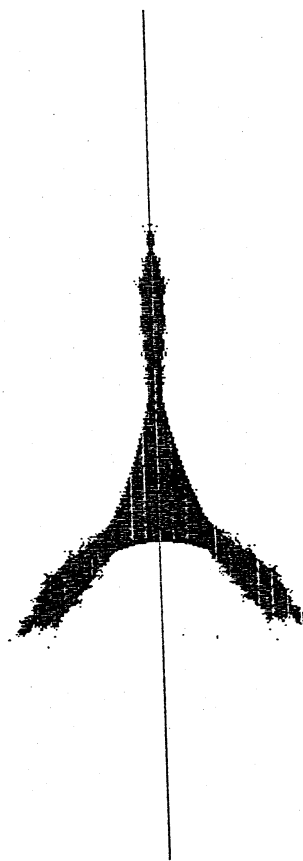


图 3.

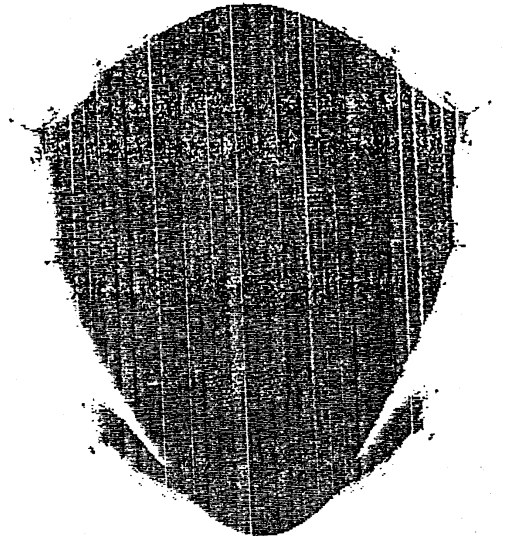


图 4

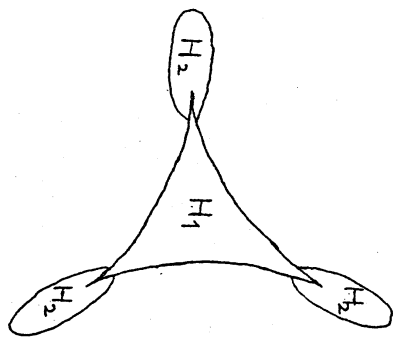
9 图



5 图



8 图



7 图



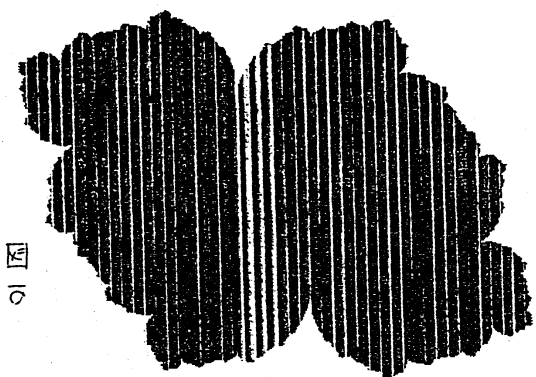


图 10

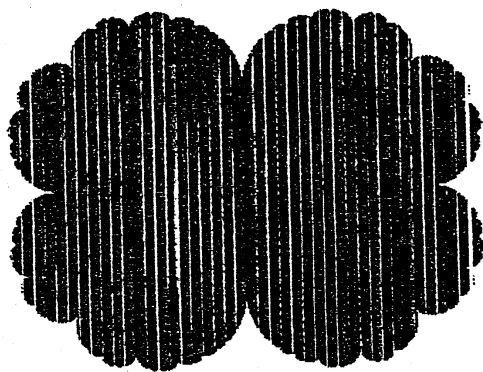


图 9

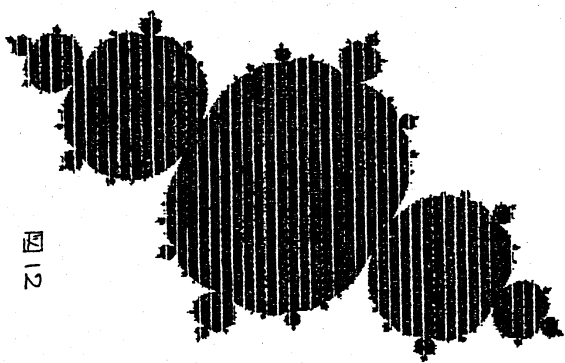


图 12

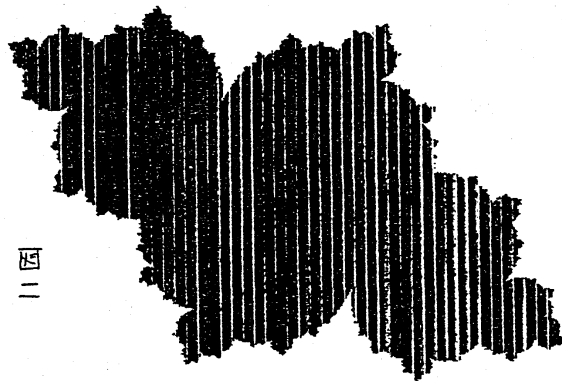
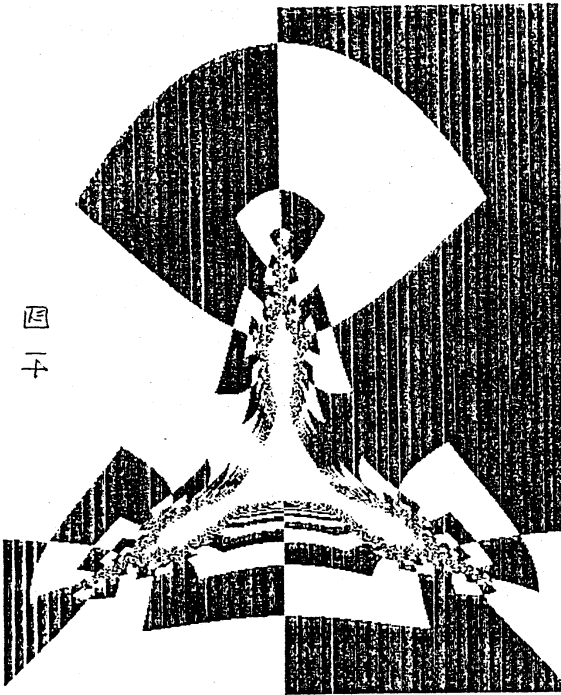
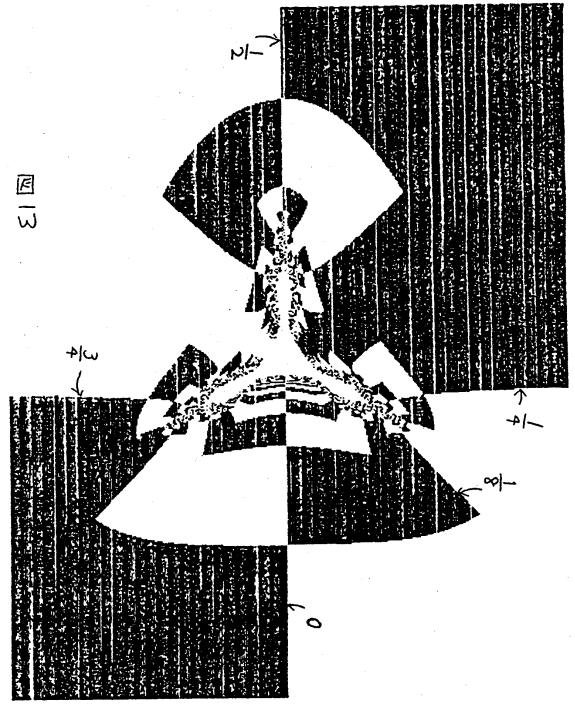


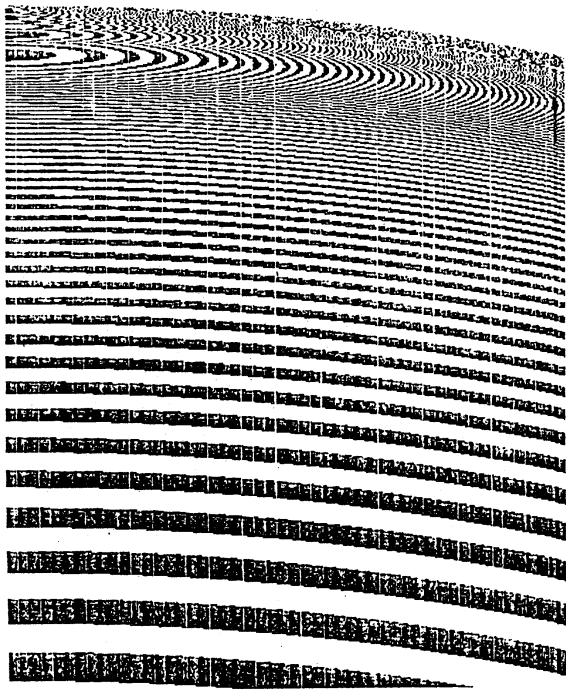
图 11



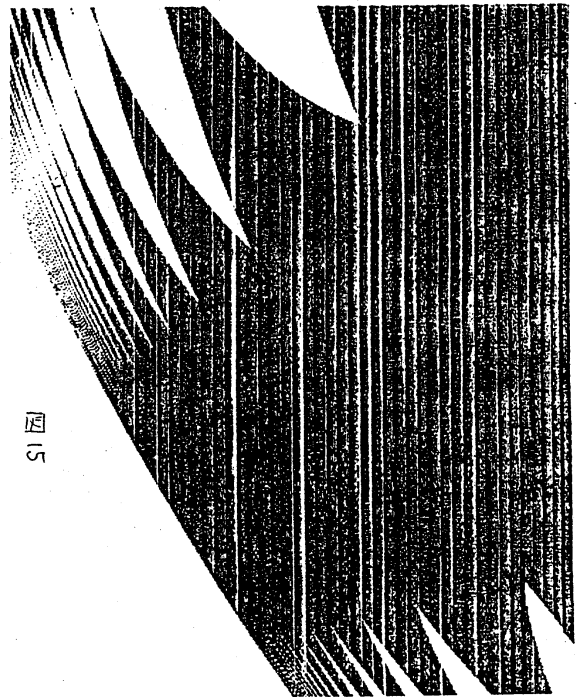
图十二



图十三



图十四



图十五