数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 19-28

概均質アフィン空間とヤコビ形式の次元について

京産大・理　村瀬 篤　(Atsushi Murase)
広島大・理　菅野孝史 (Takashi Sugano)

§1. Jacobi 形式

Jacobi 形式について、詳しくは荒川氏による解説[2]とそこに引用されている文献を御覧いただくことにして、ここでは議論に必要なことを（記号の導入を込めて）少し記述するにとどめる。

整数 $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ に対し、次の (non-reductive) 代数群 $G_{n,m}$ を考える：

(1)
$$G_{n,m} \underset{\mathrm{def}}{=} H_{n,m} \rtimes Sp_n$$
$$= \left\{ [\xi,\eta,\zeta] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; \xi,\eta \in M_{m,n},\ \zeta \in Sym_m,\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp_n \right\},$$

$$[\xi,\eta,\zeta] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & \xi & \zeta - \eta\,{}^t\xi & \eta \\ & 1_n & \eta & \\ \hline & & 1_m & \\ & & -{}^t\xi & 1_n \end{array}\right] \in Sp_{m+n}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1_m & \\ & c & & d \end{array}\right] \in Sp_{m+n} .$$

定義より、$Z_m = \{[0,0,\zeta] \mid \zeta \in Sym_m\}$ は、Heisenberg 群 $H_{n,m}$ 及び $G_{n,m}$ の共通の中心である。

さて、$G_{n,m}$ の実点は、複素領域 $\mathcal{D}_{n,m} = \mathfrak{H}_n \times M_{m,n}(\mathbb{C})$ ($\mathfrak{H}_n$: n 次 Siegel 上半平面) に

$$Z = (z, w) \longmapsto \underline{g}\langle Z \rangle = (g\langle z \rangle,\ w\, j(g,z)^{-1} + \xi g\langle z \rangle + \eta\ ), \tag{2}$$

但し、$\underline{g} = [\xi, \eta, \zeta]\, g \in G_{m,n}(\mathbb{R})$, $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$,

$j(g,z) = cz + d$, $g\langle z \rangle = (az+b)(cz+d)^{-1}$.

と推移的に作用している。

$S \in Sym_m(\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$J_{S,l}(\underline{g}, Z) \underset{\text{def}}{=} \det j(g,z)^{l}\, \mathbf{e}\big[-\mathrm{tr} S\zeta + \mathrm{tr}\, S[w]\, j(g,z)^{-1} c - 2\,\mathrm{tr} S(\xi, w)\, j(g,z)^{-1} - \mathrm{tr}\, S[\xi]\, g\langle z \rangle\big] \tag{3}$$

$$\big(S(\xi, w) = {}^t\xi S w,\ S[w] = {}^t w S w,\ \mathbf{e}[x] = \exp(2\pi i x) \big)$$

とおくと、これは $G_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_{n,m}$ 上の正則保型因子を与える。

以下、Γ を $G_{n,m}(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群とし、S を正定値半整数対称行列 (i.e. $S = (s_{ij}) > 0$ で、$s_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $s_{ii} \in \mathbb{Z}$), l を正整数とする。Γ に関する weight l, index S の Jacobi cusp forms の空間を次のように定義する:

$$\mathfrak{S}_{S,l}(\Gamma) \underset{\text{def}}{=} \{ F : \mathcal{D}_{n,m} \to \mathbb{C} \mid \text{(i)} \sim \text{(iii) をみたす} \} \tag{4}$$

(i) F は $\mathcal{D}_{n,m}$ 上の正則関数,

(ii) $F(\underline{\gamma}\langle Z \rangle) = J_{S,l}(\underline{\gamma}, Z)\, F(Z)$ for ${}^\forall \underline{\gamma} \in \Gamma$,

(iii) $F(g\langle Z_0\rangle)J_{S,\ell}(g,Z_0)^{-1}$ $(Z_0=(\sqrt{-1}1_n,0))$ は $G_{n,m}(\mathbb{R})$ 上で有界.

この空間は、(テータ関数を用いて) genus n, weight $\ell-\frac{m}{2}$ の (ある種のベクトル値) Siegel cusp forms の空間とみなすこともできる。しかし、ここでは Jacobi 形式のままその次元をあらわすことを考える。そのためにまず、$\mathcal{D}_{n,m}$ 上の $G_{n,m}(\mathbb{R})$-不変測度を

$$(5)\qquad dZ \underset{\mathrm{def}}{=} (\det y)^{-(n+1)} \prod_{i\leq j} dx_{ij}\,dy_{ij} \prod_{i,j} d\xi_{ij}\,d\eta_{ij} \quad .$$

$$(Z=(z,\xi z+\eta),\quad z=x+\sqrt{-1}\,y\quad)$$

と固定する。佐武[6] において、次のように Bergman 核関数が与えられる:

$$(6)\qquad K_{S,\ell}(Z,Z')=A_{S,\ell}\det\left(\frac{z-\overline{z'}}{2\sqrt{-1}}\right)^{-\ell} e[-\mathrm{tr}(z-\overline{z'})^{-1}S[w-\overline{w'}]],$$

ここで $Z=(z,w)$, $Z'=(z',w')\in\mathcal{D}_{n,m}$

$$A_{S,\ell}=(\det 2S)^n 2^{-n}(2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-i}\left(\ell-\frac{m+i}{2}-j\right).$$

従って、Selberg 跡公式より

<u>Proposition 1</u> $\ell>2n+m$ のとき、

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{S}_{S,\ell}(\Gamma)=\int_{\Gamma\backslash\mathcal{D}_{n,m}}\sum_{\gamma\in\Gamma/Z(\Gamma)}K_{S,\ell}(\gamma\langle Z\rangle,Z)\,J_{S,\ell}(\gamma,Z)^{-1}$$
$$|J_{S,\ell}(g_Z,Z_0)|^{-2}\,dZ,$$

ここで, $g_Z\langle Z_0\rangle = Z$, $Z(\Gamma) = Z_m \cap \Gamma$.

Remark 1　Jacobi 形式の場合、ある種の共役類からの寄与は自動的に消える. $g \in G_{n,m}(\mathbb{R})$ に対し、

$$\widetilde{H}(g) = \{ h \in H_{n,m}(\mathbb{R}) \mid h^{-1} g h g^{-1} = [0, 0, \psi_g(h)] \}$$

とおくと、

$$\Gamma' = \{ \gamma \in \Gamma \mid \mathbf{e}[\mathrm{tr}\, S \psi_g(h)] = 1 \quad \forall\, h \in \widetilde{H}(\gamma) \}$$

のみが次元公式に寄与し得る。例えば, $[\xi, \eta, \zeta]\begin{bmatrix} 1_n & \times \\ & 1_n \end{bmatrix}$ が Γ' に属するには, $\zeta = 0$ が必要.

$n=1$ の場合は, Proposition 1 の積分を具体的に計算できる.

Theorem 1　$\ell > m+2$ とする.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_{S,\ell}(G_{1,m}(\mathbb{Z})) = I_1 + I_{-1} + I_i + I_\rho + I_\oplus + I_\ominus ,$$

ここで,
$$I_1 = \frac{\ell - 1 - \frac{m}{2}}{24} \cdot \det(2S) ,$$

$$I_{-1} = (-1)^\ell \frac{\ell - 1 - \frac{m}{2}}{3 \cdot 2^{m+3}} \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^m / 2\mathbb{Z}^m} \mathbf{e}[S(u,v)] ,$$

$$I_i = \frac{\cos\left(\frac{2\ell+m}{4}\pi\right)}{2^{\frac{m}{2}+2}} \sum_{v \in \mathbb{Z}^m/2\mathbb{Z}^m} \mathbf{e}[\tfrac{1}{2} S[v]] ,$$

$$I_\rho = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ \cos\frac{2\ell+2m+1}{6}\pi + \frac{1}{3^{m/2}} \sum_{v \in \mathbb{Z}^m/3\mathbb{Z}^m} \cos\left(\frac{2}{3} S[v] - \frac{4\ell+m-1}{6}\right)\pi \right\} ,$$

$$I_\oplus = -\frac{1}{2} \sum_{u \in (2S)^{-1}\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}^m} B_1(\langle -S[u] \rangle) ,$$

$$I_\Theta = \frac{(-1)^\ell}{2^{m+1}} \sum_{u,v \in \mathbb{Z}^m/2\mathbb{Z}^m} \mathbf{e}[S(u,v)]\ B_1\left(\left\{\frac{S[u]}{4}\right\}\right),$$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ (Bernoulli polynomial),

$x \in \mathbb{R}$ に対し, $x \equiv \{x\} \equiv \langle x \rangle \pmod{\mathbb{Z}}$, $0 \leq \{x\} < 1$, $0 < \langle x \rangle \leq 1$.

一般の genus では explicit な計算は困難である (cf. $m=0$, $n=2$ の場合は [3] で求められている)。しかし、Siegel cusp forms の場合には、新谷 [8] に於いて、ある種の unipotent 共役類からの寄与が、概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の特殊値の言葉で記述されている。この事情は Jacobi 形式の時にも同様に成立する。それを述べるために、概均質ベクトル空間の概念を少し拡張しておこう。

§2. 概均質アフィン空間

概均質ベクトル空間の一般論については、佐藤-新谷 [7] を参照されたい。次の条件を満たす4つ組 $\mathbb{D} = (G, V, \rho, \alpha)$ を ($\mathbb{Q}$ 上の) affine datum と呼ぶ。

(7)
$$\begin{cases} G : \text{連結代数群} /\mathbb{Q}, \quad V : \text{有限次元ベクトル空間} /\mathbb{Q}, \\ \rho : G \longrightarrow Aff(V) = \{V \text{の affine 変換}\} \quad \text{準同型} /\mathbb{Q} \\ \alpha : V \times G \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{affine 1 cocycle} /\mathbb{Q} \end{cases}$$

(i.e. $x \longmapsto \alpha(x,g) - \alpha(0,g)$ が linear map で $\alpha(x, gg') = \alpha(x\rho(g), g') + \alpha(x, g)$ をみたす)

また，$\mathbb{D}$ の dual data $\mathbb{D}^* = (G, V^*, \rho^*, \alpha^*)$ が、

$$
(8) \quad \begin{cases} V^* = V \text{ の dual vector space} \\ \langle x\rho(g), x^* \rangle + \alpha(x, g) = \langle x, x^*\rho^*(g^{-1}) \rangle + \alpha^*(x^*, g^{-1}) \\ \qquad (x \in V,\ x^* \in V^*,\ g \in G) \end{cases}
$$

により定義される。

V の proper algebraic subset S で，$V_{\mathbb{C}} - S_{\mathbb{C}}$ が一つの $\rho(G_{\mathbb{C}})$-orbit からなるとき，$\mathbb{D}$ を prehomogeneous affine datum (PAD) と呼ぶ．このとき，S は一意的に定まり，$\mathbb{D}$ の singular set と呼ばれる。なお、$\rho(G) \subset GL(V)$ のとき、3つ組 (G, V, ρ) は，通常の prehomogeneous vector space (PV) に他ならない。PV に付随する多くの概念は，この PAD の場合に拡張される（詳しくは [5] を参照されたい）。特に、正則性の概念が導入され，正則 PAD の dual datum は再び正則 PAD となる。

以下では，Jacobi 形式の次元公式と関係する一つの具体的な PAD について、そのゼータ関数等を記述しておく．

$$
(9) \quad \begin{cases} G \cong M_{m,n} \rtimes GL_n = \left\{ (z, g) = \begin{bmatrix} 1_m & z \\ & 1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_m & \\ & g \end{bmatrix} \,\middle|\, z \in M_{m,n},\ g \in GL_n \right\} \\ V \cong Sym_n \times M_{m,n} = \{ [x, u] \mid x \in Sym_n,\ u \in M_{m,n} \} \\ [x, u]\rho(z, g) \cong [g^{-1} x\, {}^t g^{-1},\ (u - zx)\, {}^t g^{-1}] \\ \alpha([x, u], (z, g)) \cong \mathrm{tr}(x S[z] - 2S(u, z)) \end{cases}
$$

（S：正定値半整数対称行列）

このとき，$\mathbb{D}=(G,V,\rho,\alpha)$ は，$\{[x,u] \mid \det x = 0\}$ を *singular set* とする PAD となる．3つ組 (G,V,ρ) は，正則でない PV であるが，$\mathbb{D}$ は正則PADであることに注意．

$\mathbb{D}$ の *dual* PAD $\mathbb{D}^*=(G,V^*,\rho^*,\alpha^*)$ は，V^* と V を

$$\langle [x,u],[y,v]\rangle = \mathrm{tr}(xy+2S(u,v))$$

で同一視するならば，

$$(10)\quad \begin{cases} [x,u]\,\rho^*(\xi,g) = [\,{}^t g(x+S[\xi]+S(u,\xi)+S(\xi,u))g,\ (u+\xi)g\,] \\ \alpha^* = 0 \end{cases}$$

で与えられる．

このPAD に付随した zeta 関数を導入する．正整数 N，$0\leq i\leq n$，$s\in\mathbb{C}$ に対し，次のようにおく．

$$(11)\quad \xi_i(s;L_{n,N}) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\substack{[x,u]\in L_{n,N}/\rho(\Gamma) \\ \mathrm{sgn}(x)=(i,n-i)}} \mu([x,u])\,\mathbf{e}[-\mathrm{tr}\,x^{-1}S[u]]\,|\det x|^{-s}$$

$$\xi_i^*(s;L^*_{n,N}) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\substack{[y,v]\in L^*_{n,N}/\rho^*(\Gamma) \\ \mathrm{sgn}(y-S[v])=(i,n-i)}} \mu^*([y,v])\,|\det(y-S[v])|^{-s}$$

ここで，$\Gamma = M_{m,n}(\mathbb{Z}) \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$，

$L_{n,N}=\{[x,u] \mid x\in Sym_n(\mathbb{Z})\cdot N,\ u\in M_{m,n}(\mathbb{Z})\}$

$L^*_{n,N}$ = *dual lattice of* $L_{n,N}$

$\mu(X) = \mathrm{vol}(\Gamma\cap G^+_{X,\mathbb{R}}\backslash G^+_{X,\mathbb{R}})$，$G_X=\{g\in G \mid X\rho(g)=X\}$，

$\mu^*(X)$ も同様．

$(n,i) \neq (2,1)$ ならば、$\xi_i(s; L_{n,N})$ 及び $\xi_i^*(s; L^*_{n,N})$ は、$s = \frac{m+k+1}{2}$ $(1 \leq k \leq n)$ で高々 simple pole をもつ他では正則な関数として、全 s-平面に解析接続される。また、$s \to \frac{m+n+1}{2} - s$ で関数等式をもつ（具体形については [4] 参照）。

Remark 2

$$\xi^*_{n,N}(s;S) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{u \in (2S)^{-1} M_{m,n}(\mathbb{Z}) / M_{m,n}(\mathbb{Z})} \sum_{y>0} |SO(y)_{\mathbb{Z}}|^{-1} (\det y)^{-s}$$

y は $Sym_n(\mathbb{Q})/SL_n(\mathbb{Z})$ で $y + N \cdot S[u]$ が半整数となるものを動く。

とおくと、

$$\xi^*_n(s; L^*_{n,N}) = 2^{-(n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \cdot \xi^*_{n,N}\left(s - \frac{m}{2}; S\right) \cdot N^{n(s-\frac{m}{2})}.$$

§3. purely parobolic conjugacy class の寄与

§1 の状況に戻る。$N \geq 1$ として、$\Gamma(N)$ で $Sp_n(\mathbb{Z})$ の level N の主合同部分群をあらわし、$\Gamma_N = H_{n,m}(\mathbb{Z}) \rtimes \Gamma(N)$ とする。$0 \leq r \leq n$ に対し

$$(12) \qquad \Pi_{r,N} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \gamma \in \Gamma_N \;\middle|\; \gamma \sim h \left[\begin{array}{c|c} 1_n & \begin{matrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline & 1_n \end{array}\right],\ \begin{matrix} h \in H_{n,m}(\mathbb{Z}) \\ x \in Sym_r(\mathbb{Z}),\ \mathrm{rank}\, x = r \end{matrix} \right\}$$

とおく。ここで $\sim$ は、$G_{n,m}(\mathbb{Z})$-共役の意味。

$\Pi_{r,N}$ からの、Theorem 1 の次元公式への寄与は、§2 で導入した PAD の zeta 関数の特殊値であらわされる。

<u>Theorem 2</u>　$\ell \geq 2n+m+3$ のとき，次が成立：

$$I_{S,\ell}(\Pi_{r,N}) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\Gamma_N \backslash \mathfrak{D}_{n,m}} \sum_{\underline{\gamma} \in \Pi_{r,N}/Z(\Gamma_N)} K_{S,\ell}(\underline{\gamma}\langle Z\rangle, Z)\, J_{S,\ell}(\underline{\gamma}, Z)^{-1} |J_{S,\ell}(g_Z, z_0)|^{-2}\, dZ$$

$$= [\Gamma(1):\Gamma(N)] \cdot (\det 2S)^{n-r}\, 2^{(n-r)r-1}\, (2\pi)^{-(n-r)(n-r+1)/2}\, N^{-r(n-\frac{r-1}{2})}$$

$$\prod_{i=1}^{n-r} \zeta(2i) \frac{\Gamma(i)}{2\pi^i} \times \prod_{i=1}^{n-r} \prod_{j=1}^{i} \left(\ell - \frac{m+n-i}{2} - j\right) \times \zeta^*_{r,N}(r-n\,;S),$$

但し，$\zeta^*_{0,N}(s\,;S) \equiv 2$．

<u>Remark 3</u>　Remark 1 より，N が十分大きいとき，Siegel cusp forms の場合と同様に、他の共役類からの寄与はないと、期待される。

<u>Remark 4</u>　$\zeta^*_{n,N}(s\,;S)$ の特殊値について：$n=1$ ならば，次のように，Bernoulli 多項式で表示される．

$$\zeta^*_{1,N}(1-k\,;S) = -\sum_{u \in (2S)^{-1}M_{m,n}(\mathbb{Z})/M_{m,n}(\mathbb{Z})} B_k(\langle -NS[u]\rangle)/k$$

（B_k：k番目の Bernoulli 多項式）

また，$n=2$ のときは，Arakawa [1] により調べられている部分 zeta 関数の一次結合で $\zeta^*_2(s\,;S)$ があらわされるので，具体的に特殊値を知ることが出来る．

References

[1] Arakawa, T. : Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n, \mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Studies in Pure Math. 15 (1989), 99-169.

[2] Arakawa, T. : Jacobi 形式について, 本報告集.

[3] Hashimoto, K.: The dimension of the space of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 30 (1983), 403-488.

[4] Murase, A. & Sugano, T. : A note on zeta functions associated with certain prehomogeneous affine spaces, Adv. Studies in Pure Math. 15 (1989), 415-428.

[5] Murase, A. & Sugano, T. : Zeta functions of prehomogeneous affine spaces, preprint.

[6] Satake, I. : ある群拡大とそのユニタリ表現について, 数学 21 (1969), 241-253.

[7] Sato, M. & Shintani, T. : On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170.

[8] Shintani, T. : On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975), 25-65.