数理解析研究所講究録
第806巻 1992年 1-16

Hénon map について

三波　篤郎　(北大　理)

Hénon map (あるいは Hénon family) とは，次のような $\mathbf{R}^2$ 上の２次多項式で表わされる写像の 2-parameter family のことである.

$$H_{a,b}(x,y)=(by+a-x^2,x).$$

Jacobian は constant に $-b$ であり，$b\neq 0$ ならば $H_{a,b}$ は diffeomorphism である. Affine map による座標変換によって，これは次のような形にすることもできる.

$$(y+1-ax^2,bx),\qquad (y,a-y^2-\delta x).$$

この Hénon map に関してまず重要なことは，この写像は見かけほど特殊なものではないということである.

例えば我々が，最も単純な非線形力学系の性質はどのようなものだろうか？　という疑問を持ったとしよう. “最も単純な非線形力学系”とは何か？　というのはそれ自体ひとつの問題ではあるが，ここではまず単純に“２次多項式”であると考えてみよう.

$\mathbf{R}$ 上の２次多項式（つまり２次関数）は，１次関数による座標変換によって，$a-x^2$（または x^2+a ）という形にできるということが簡単にわかる. この standard な２次関数については多くの研究がなされているが，これは diffeomorphism ではない. Diffeomorphism となるような２次多項式は $\mathbf{R}^2$ 以上で存在する.

実は単に diffeomorphism というだけでは，たとえ２次多項式であってもそれほどパラメーターを減らすことはできない. そこでとりあえずこの２次多項式は，多項式の逆写像を持つ，と仮定してみよう. そうするとこの diffeomorphism は，$\mathbf{C}^2$ 上の diffeomorphism に拡張できる. この Jacobian はやはり多項式で表わされ，更に non-zero であるから定数でなければならない. 簡単な計算から，２次多項式で表わされる $\mathbf{R}^2$ または $\mathbf{C}^2$ からそれ自身への写像で，Jacobian が constant なものは，affine map による座標変換によって，Hénon map かまたは次のような写像に変換できることがわかる.

$$F(x,y)=(\alpha x+y^2+\beta,\gamma y+\delta).$$

この形からわかるように，この写像は力学系としては単純なものである．従って，“ $\mathbf{R}^2$ 上の２次多項式で表わされる diffeomorphism で，その逆写像も多項式であり，力学系として nontrivial なものは Hénon map となる” ことがわかる．

一般に，多項式で表わされる diffeomorphism であって，その逆写像もまた多項式となるようなものを polynomial automorphism という．Friedland–Milnor[FM] は，$\mathbf{R}^2$ 及び $\mathbf{C}^2$ 上の一般次数の polynomial automorphisms について，上と同様の分類定理を証明している．すなわち，

THEOREM [FM]. $\mathbf{R}^2$ または $\mathbf{C}^2$ 上の *polynomial automorphism* は，*generalized Hénon map* の有限個の合成となっている写像 かまたは *elementary map* のどちらかに *affine map* によって共役になる．

Elementary map とは，

$$e(x,y) = (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma)$$

という形をした写像であり，また *generalized Hénon map* とは，

$$g(x,y) = (y, q(y) - \delta x)$$

という形の写像である．ここで $p(y)$ はある多項式であり，$q(y)$ は $y^d + c_{d-2}y^{d-2} + \cdots + c_1 y + c_0$ という形の monic polynomial である．

§.1 Hénon map 研究の motivation

（１）　その motivation としてはまず第一に，上にも述べたように，Hénon map は最も単純な非線形の diffeomorphism であるということがあげられる．一般の非線形 diffeomorphism の dynamics や分岐は，少なくとも Hénon map のそれを含んでいるように思える．しかしこれももちろん大問題のひとつである．

１次元の２次関数の standard family はある意味で universal family である．すなわち，unimodal map で現われる全ての kneading sequence を持ち，しかもそれらがその sequence

の順序通りに単調に出現する．これと類似の性質を Hénon family が持つだろうか？（どうもそうはならないような気がするが…）

しかしとにかく２次元以上の写像に対しては，そもそも orbit structure を表現するような topological invariant（１次元写像の kneading sequence に相当するもの）が知られていないので，まずその辺をなんとかしないことには始まらないように思われる．

（２）　次に，これは（１）の問題に含まれているとも言えるのだが，Hénon map は horse shoe map の生成過程を含んでいるということである．Devaney–Nitecki は [DN] において，パラメーター a がある程度大きければ（$a \geq 2(1+|b|)^2$）Hénon map は horse shoe map になり，$a < -(1+|b|)^2/4$ ならば $\Omega(H_{a,b}) = \emptyset$ であることを証明している．

よく知られているように，homoclinic point があれば，そこには horse shoe map と同型の subsystem が含まれており，更にほとんど全ての nontrivial な non–linear system は homoclinic point を持っている．その意味で，horse shoe map の生成過程は非線形系の分岐に於いて，最も基本的な要素である．

（３）　これもやはり（１）の一部とも言えるが，Hénon map はあるパラメーター領域に於いて Hénon attractor と呼ばれる attractor を持っており，これは dissipative な非線形系で現われる strange attractor の中で最も単純なものである．平面上の diffeomorphism によって得られる strange attractor の構造やその上の dynamics がどのようなものであるのかというのは基本的な問題のひとつであるが，そのためにまず最も単純と思える Hénon map を対象とするのはきわめて自然だろう．

（４）　Quadratic map あるいは unimodal map は，複雑だけれどもきれいな構造と分岐を持っている．Hénon map は b が 0 の時は １次元の quadratic map となるが，この構造や分岐が，２次元の diffeomorphism にどの様に拡張しているのだろうか？　特に，unimodal map においては $*$-product できれいに表現されている renormalization structure が，２次元の diffeomorphism ではどの様に定義可能なのかが興味深い．

（５）　Hénon map は $b = -1$ の時は area preserving map の 1–parameter family となる．特に H は $-1 < a < 3$ では elliptic な fixed point を持つ．この間この fixed point のまわりでは，Hamiltonian system から得られる写像で見られるような，invariant circle や islands の発生，消滅が起きる．この意味で Hénon map は，area preserving map（あるいは symplectic map）の分岐の最も単純な paradigm である．

Area preserving map を調べる上で Hénon map に注目する理由としてはさらに，Hénon map は a が大きくなると horse shoe map となること，つまり KAM theoretic なよくわからない分岐が，Bernoulli system という単純なものに関係付けられるのではないか，という淡い期待．それともうひとつは，Hénon map は $b = 0$ の時は standard な unimodal map となる事がある．つまりやはり，quadratic map という，ある意味でよくわかっているものが何かの手がかりにならないか，ということである．

（6） Hénon map は $\mathbf{C}^2$ からそれ自身への diffeomorphism とみなす事ができる．次節の Hubbard–Oberste-Vorth の結果の所でも述べるが，complex Hénon map が attractive な periodic point を持てば，その basin は Fatou-Bieberbach domain となる．また今までに知られている Fatou-Bieberbach domain はこのような，写像の sink の basin として得られるものしかないようである．

その意味で，Fatou-Bieberbach domain の構造を研究するために，それを与える最も単純な写像である Hénon map を調べることは自然であろう．

§.2 Hénon map に関する結果

Hénon map に関しては，これまでそれほど多くの研究はなされていない．その理由は上に述べたように，その構造を表現するための何か，つまり 1 次元写像の kneading sequence に相当するものが知られていないために，数学的議論をするための言葉が存在しないという事がまずあげられる．それはまた，Hénon map が diffeomorphism であって，1 次元の quadratic map のように critical point という特別な点が存在しないためでもある．

このような理由から Hénon map の研究は，最初は計算機を使った数値計算によって，その構造や分岐を“観察する”というのが主だった．しかしこの数年，徐々にいろいろな方向から数学的議論がなされてきている．それらを含めて，これまでの Hénon map についてなされた研究をその時間的経緯に沿って眺めてみよう．但しここではその全てを網羅しているわけではない．特にここで述べた以外にも多くの数値計算による研究がなされている．

（1） **Hénon [H]**： Hénon map という名の由来はまさにここにある．ここで Hénon は，Lorenz attractor をはじめとする strange attractor の性質を研究するために，もっと単純な

モデルをまず調べてみようという " reduntionist approach " を提案している．そのためには微分方程式よりはむしろ，その Poincaré map として現われる平面上の diffeomorphism を調べる方が簡単であるとし，strange attractor を持つ最も単純な diffeomorphism を調べてみようという立場を取る．そして，（現在 Hénon map と呼ばれている）最も単純な非線形 diffeomorphism がまさにあるパラメーターで strange attractor を持つということを数値計算によって見いだしている．

Hénon は更にこの（現在 Hénon attractor と呼ばれている）attractor の微細構造を調べ，それが scaling structure を持つとし，attractor の transversal 方向の構造は Cantor set であろうと予想している（これはおそらく間違いである）．

それにしても Hénon は Poincaré map などと言いながら，$H(x,y)=(y+1-ax^2,bx)$ で，$a=1.4$, $b=0.3$ という orientation reversing case だけを調べているのはなぜだろうか？（ orientation preserving Hénon map ももちろん non-trivial attractor を持つ）．

（2） **Devaney–Nitecki [DN]**： ここでの結果はすぐに予想できるものであるとはいえ，おそらくこれは Hénon map に関して得られた，数学的に厳密に証明された最初の結果である．ここでは Hénon map として standard な

$$H(x,y)=(By+A-x^2,x)$$

を使っている．この A, B に対して，$A_0=-(1+|B|)^2/4$, $A_1=2(1+|B|)^2$, $A_2=(5+2\sqrt{5})(1+|B|)^2/4$, $R=(1+|B|+\sqrt{(1+|B|)^2+4A})/2$ という数を定義しておくと，

THEOREM [DN]. *(i)* $A<A_0$ ならば $\Omega(H)=\emptyset$.

(ii) $A\geq A_0$ ならば $\Omega(H)$ は正方形 $S=\{(x,y)|\ |x|\leq R,|y|\leq R\}$ に含まれる．

(iii) $A\geq A_1$ ならば $\Lambda=\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}H^n(S)$ は *topological* な *horseshoe* である．さらに $B\neq 0$ ならば $\Omega(H)$ から *2–shift* の上への *semi-conjugacy* がある．

(iv) $A>A_2$ ならば $\Omega(H)$ は *hyperbolic set* であり，*2–shift* と *conjugate* である．

A_0 は $B\leq 0$ なら optimal である．すなわち $A\geq A_0$ ならば不動点が存在することが簡単な計算からわかる．$B>0$ なら optimal ではない．Hénon map が不動点を持つのは $A\geq-(B-1)^2/4$ という領域であり，周期２の周期点を持つのは $A\geq 3(B-1)^2/4$ となって，

Brouwer の translation theorem (cf. Math.Ann.72(1912)37–54, Bull.AMS 71(1965)381–383) より，$A < -(B-1)^2/4$ では non-wandering point は存在しない．従って，$A \geq -(B-1)^2/4$ というのが $\Omega(H) \neq \emptyset$ となる必要十分条件である．

A_1, A_2 はほぼ間違いなく optimal ではないだろう．Hénon map は horseshoe map からパラメーターを下げて行った時，first homoclinic tangency が起こる直前までは hyperbolic な horseshoe map であるように思えるからである．

なおこれと同じ頃 Marotto [Mar] は，パラメーターがある範囲にあれば、Hénon map は homoclinic point を持つ事を証明している．

（3） **El-Hamouly–Mira [EM1, EM2]**： ここでは，Hénon map のパラメーター空間を数値計算によって調べ，その中に cusp connection と呼ばれる特徴的な構造が存在し，それによって standard な quadratic map のタイプの異なる周期点が Hénon map のパラメーター空間の中で関係を持っているという事実を発見している．また Hénon map のパラメーター空間の中にも，１次元の quadratic map のように self-similar structure が存在する事が指摘されている．

（4） 宇敷 **[U1]**： 宇敷重広氏も [U1] に於て Hamouly–Mira とは独立に Hénon map のパラメーター空間を調べ，同様の結果を得ている．そして cusp connection におけるある種の規則性が指摘されている．

[San1] ではこの [U1] の計算を更に多くの場合に行ない，cusp connection の規則性についてある予想を提出している．

（5） 宇敷 **[U2]**： 微分方程式の解を実際に計算機で求めようとする場合，その方程式をいろいろな方法で離散化し，差分方程式になおすことになる．差分方程式とは結局 $\mathbf{R}^n$ からそれ自身への写像のことであり，その軌道をプロットしてゆくことになるのだが，ある場合にはその軌道が，もとの微分方程式の軌道とかけ離れた chaotic なものになることがある．この [U2] では，そのような現象が次のようなきわめて単純な場合ですら常に起こり得るということを数学的に証明している．

まず常微分方程式として logistic equation ;

$$\frac{du}{dt} = u(1-u)$$

を考える．これを中心差分法で離散化することにより，$\mathbf{R}^2$ からそれ自身への写像

$$f(x,y) = (y + 2\Delta t x(1-x), x)$$

が得られるが，これはアファイン写像 $\sigma(x,y) = ((x/\Delta t + 1)/2, (y/\Delta t + 1)/2)$ で座標変換することにより（$H = \sigma^{-1} f \sigma$ とすると），

$$H(x,y) = (y + \Delta t - x^2, x)$$

となって $b = 1$ の場合の Hénon map となる．

まずこの場合，Hénon map は対称性を持つことが指摘されている．すなわち H と H^{-1} は $s(x,y) = (-y, -x)$ によって共役となる．これは単純ではあるが結構重要な指摘である．これを使って宇敷氏は，$b = 1$ の時 Hénon map は，不動点が出現した直後からすぐに topological な heteroclinic point を持つことを示し，さらにその場合 topological な horse shoe が存在する事を証明している．この事から，area-preserving かつ orientation reversing な Hénon map は，不動点が（つまり最初の periodic point が）現われた直後に，すぐに無限個の周期点を持つことになる（これはいったいナニ分岐と言うのだろう？）．

（6） **Devaney [D]**：　ここでは $b = 1$ 及び $b = -1$ の時，Hénon map はやはり（5）で述べたような対称性を持つことを利用して，不動点が出現した直後からすぐに transversal な homoclinic または heteroclinic point を持つことを証明している．

（7） **Holmes–Whitley [HW]**：　ここでは，おそらく Hénon map についても成立するであろうと思われる，周期点の分岐についての regularity condition を仮定した上で，１次元の２次関数の拡張となっているような，平面上 diffeomorphism の（generic な）Hénon type 2-parameter family

$$F_{\mu,\epsilon}(x,y) = (y, -\epsilon x + f_\mu(y))$$

について多くの結果を得ている（f_μ は性質のよい unimodal map）．

あまりにもいろいろなことが，その証明とも説明ともつかない文章とともに渾然一体となって書かれているので非常にわかりにくいのだが，その結果はおもしろいものが多い．その主なものとしては，

(i) $\epsilon = 0$（すなわち unimodal map の所）で起きる周期点の分岐の branch は必ず $\epsilon = 1$（すなわち area-preserving map ）まで延長できる．

(ii) そのような branch で，$\epsilon = 0$ と $\epsilon = 1$ で順序が異なるものが無限に存在する（すなわち途中で branch が交わる）．

(iii) $\epsilon = 0$ における homoclinic bifurcation point から *Cantor fan* が広がっている（ homoclinic bifurcation の branch が Cantor set 状にのびている）．

(iv) 無限個の cubic type homoclinic tangency が存在する．

（8） **Fournier–Kawakami–Mira [FKM1–3],[K]**： horseshoe map を stable 方向につぶすとそれは non-linearity が十分大きい１次元の unimodal map と同型となるが，その際周期点は１対１に対応している．その意味で Hénon map の周期点を unimodal map の周期点から連続的に変形して得られるものと考えるなら，それは horseshoe map のある周期点として，そのタイプを指定することができる．[FKM2],[FKM3],[K] では horseshoe map の周期点が，symmetric なものと互いに他の symmetric image となっているような pair とに分類できることを指摘し，それを使って Hénon map の global な分岐構造を調べている．

また，Hénon map が Morse-Smale となるようなパラメーター領域については，[FKM1] の結果がある．

（9） **Hubbard–Oberste-Vorth [Hu],[HuO]**： 複素力学系の創始者の一人 Hubbard は，もともと複素解析が専門であるというのもあるだろうが，Hénon map に対してもやはり complex からのアプローチが自然でありかつ有効であろうと考え，complex Hénon map の研究を開始した．もうひとつの motivation としては，Fatou-Bieberbach domain（ $\mathbf{C}^n$ と biholomorphic となる $\mathbf{C}^n$ の真部分集合であって、その complement が内点を持つもの）の構造を詳しく調べたいという事があるようである．Hénon map が attractive periodic point を持つなら，その basin は必ず Fatou-Bieberbach domain となる事もこの [HuO] の中で証明されている．しかし Fatou-Bieberbach domain 自身はやはり難しいらしく，ここではその

conplement とも言うべきものの構造が詳しく調べられている.

$$K_\pm = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |H^{\pm n}(x,y)| \text{ does not tend to } \infty\} \qquad \text{and} \qquad U_\pm = \mathbf{C}^2 \backslash K_\pm$$

ときめる. この K_+ は1変数の時の filled in Julia set に対応する. [HuO] ではこの $U_\pm$ の構造と, その上の H の作用が詳しく解明されている. そのカギとなるのは, 1変数の時のアナロジーから

$$h_\pm(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} log_+ |H^{\pm n}(x,y)|$$

として定義される pluri-harmonic submersion $h_\pm : U_\pm \to \mathbf{R}_+$ である. ここで $log_+(x) = sup\{log\ x, 0\}$ である. $\mathbf{S}^3$ の中の solenoid を Σ_0 とすると, $h_+ : U_+ \to \mathbf{R}_+$ は $\mathbf{S}^3 \backslash \Sigma_0$ を fiber とする fibration であることが示される. また, $U_\pm$ の基本群は $\pi_1(U_\pm) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ となり有限生成ではない. その他, 関連するいくつかの命題が証明されている.

(10) **Milnor [M]**: この論文では, real の Hénon map についての思いもよらない結果が証明されている. 短い中にいろいろとおもしろいことが書かれているが、まず Newhouse や Katok–Mendoza の結果を使うことによって, Hénon map の topological entropy がパラメーター a, b に対して連続である事が示せる, という事が指摘されている. この事と上記の Devaney–Nitecki [DN] の結果から, 任意に b を fix した時, a を動かすことによって, Hénon map の topological entropy は, $[0, log\ 2]$ の中の全ての値をとることがわかる.

この論文の主要結果は, 次の不思議な定理である.

THEOREM [M]. 任意の b に対してある可算集合 $\Sigma_b \subset [0,\infty]$ が存在し, $H_{a,b}$ が *expansive* ならば $h(H_{a,b}) \in \Sigma_b$ である.

つまり b を fix した時, Hénon map が expansive となるような topological entropy の値は可算個しかないというのである. このなにやら Sard の定理を思わせる意外な結果を突然証明してしまうというところは, さすが Milnor である.

(11) **Friedland–Milnor [FM]**: $\mathbf{C}^n$ あるいは $\mathbf{R}^n$ からそれ自身への polynomial map で, polynomial の逆写像を持つものを polynomial automorphism という. この [FM] では $\mathbf{C}^2$

及び $\mathbf{R}^2$ 上の polynomial automorphism の性質が，あらゆる角度から徹底的に調べられている．

多くの結果が書かれているが，最も重要なのは冒頭で述べた polynomial automorphism の分類定理である．また periodic point や non-wandering set の性質についても詳しく調べられている．特に complex case の topological entropy については，elementary map ならば 0 であるが，cyclically reduced（i.e. elementary 以外）の場合を深く調べ，常に $log\ d$（d は map の degree）であろうと予想している．これについては Smillie が [Sm] において証明した．つまり特に complex Hénon map の topological entropy はパラメーターに関係なく常に $log\ 2$ である．Real と complex の大きな違いがここにある．

[FM] には次のおもしろい未解決問題が書かれている．

Jacobian Conjecture. *polynomial mapping* が *constant* な *non-zero Jacobian* を持てば，それは *polynomial* の逆写像を持つであろう．

（１２） **Cvitanović–Gunaratne–Procaccia [CGP]**：これは物理の論文であり数学的な証明などはないが，Hénon map に関する最も大きな問題とも言える topological invariant についてのひとつのおもしろいアイデアが述べられ，それについていくつかの数値的検証がなされている．

そのアイデアとは次のようなものである．Hénon map は a が十分大きいならば horseshoe map となる．horseshoe map の non-wandering set はよく知られているように Cantor set × Cantor set である．Horseshoe になる以前の Hénon map の non-wandering set がどのようなものであるのかが問題となるが，これをとりあえず $\Lambda =$ Cantor set × Cantor set の subset であると考える．すなわち，Λ の中のある点がまだ出現していない状態であると見なすのである．そうすると Hénon map の dynamics は，Λ のある invariant subset で表現されることになる．

これだけではまだ一般的すぎるが更にここで，Λ の全ての点は primary tangecy というものを経て出現すると仮定する．ここで primary tangency とは何かというと，実ははっきりとは定義されていなくて，単なるイメージとしてしか述べられていないのだが，Hénon map の最も大きな fold の所で起きる tangency のことである．こう仮定すると Λ の中の消

えている部分は，Λ の縦の中心線に対称なある単調関数の上の部分の，正及び負の iterated image となる．つまりこの単調関数によって，その構造が表現されることになる．この関数を pruning front という（prune とは、木の枝を剪定するという意味）．

この [CGP] では，$|b|$ が十分小さい場合に対して，pruning front の grammar の解析や，その粗い近似が dynamics をかなり正確に表現することなどが述べられ，またそれを利用して scaling exponent の計算などを行なっている．

pruning front というのはきわめて自然ではあるが，厳密な定義までもっていくためには多くの難しい問題を解決しなければならない．また pruning front のようなものが本当に Hénon map の構造を記述しているような例としては，今のところ後述の [DMS] しかないようであるし，それとても数学的に証明されたものではない．

ほかに Cvitanović のものとしては [AAC1], [AAC2] の cycle expansions というアイデアがおもしろい．これは，ζ-関数を経由することによって，小さな周期の数少ない周期点だけについての情報が，ある場合には意外なほど全体の dynamics を反映する事を示せるというもので，これを利用して１次元及び２次元 non-linear map のいろいろな数値データを高い精度で計算している．特に unimodal map の Feigenbaum constant を１５桁まで求めているのには驚かされる．この方法は実際の数値計算に於てかなり役立つかもしれない．

（１３） 三波 **[San2]**：　ここでは [U1] や [EM1], [EM2] での数値計算で見つかった cusp connection の規則性を調べるため，Hénon map の周期点のあるクラスを topological type によって分類している．その結果，hyperbolic fixed point の安定多様体に似た，self-similar 状の関係性が見つかった．

もともとこれには，parameter space の中に global な self-similar structure を見つけることにより，それに対応した renormalization operator をさがし出そうという意図があり，得られた関係性が hyperbolic fixed point の安定多様体のような形をしていることは、global な non-linearity を持った renormalization operator の存在を示唆しているようでもあるが，そのようなものは今の所見つかっていない．

なお orientation preserving case については Holmes が，この [San2] の結果を含む、より広いクラスに対して同様の結果を証明している [Hol]．

[Shi1], [Shi2] では Lozi map の parameter space について connection relation を調べている．

（１４） **Benedics–Carleson [BC]**： 彼らの結果及びそれに関連した Mora と Viana の結果については，ほかで解説されることになっているのでここでは詳しく述べないが，(real の）Hénon map に対して $|b|$ が小さい場合だけであるにせよ，strange attractor の存在を厳密に証明したという画期的な結果である．またその中で，“ critical point のような点 ” の存在を示していることは興味深い．

（１５） **Biham–Wenzel [BW]**： ある与えられた写像の周期点の個数を厳密に求めることは，たとえ１次元の２次関数や Hénon map のような，きわめて単純な写像であっても非常に難しい．その方法としてもふつう Newton 法 くらいしか思いつかないわけだが，それでやると周期はせいぜい１０くらいであり，大型計算機などでかなりがんばっても１５くらいが限界と思われる．またそこまでやったとしても Newton 法では，得られた数の確実性に不安が残る．しかし１９８９年頃，Biham と Wenzel という人たちが Hénon map に対してだけではあるが，画期的な方法を発見したのである．

それは基本的には Aubry–Mather の Lagrangian というものに基づいており，まず周期 p の周期点がその critical point に１対１に対応しているような $\mathbf{R}^p$ 上のある gradient vector field を定義する．そしてその critical points を全て捜し出す，ということを行なうのである．

残念ながら，この方法の正当性は数学的には証明されていない．[GKM] の中では，いくつかの問題点まで指摘されている．しかしこの方法がうまくゆかない例もまだ見つかってはいないようである．実際，次に述べる [DMS] では，hyperbolicity があると思われる場合だけではあるが，Biham–Wenzel の方法が，周期２０までの周期点を全て完全に求めている事の，かなり確実な証拠が得られている（パラメーターによっても違うが，周期２０までの周期点の個数は約１００万くらいにもなる）．

（１６） **Davis–MacKay–Sannami [DMS]**： $b = -1$ (area and orientatin preserving case) の場合に，上記の Biham–Wenzel の方法を使って a を変化させながら周期２０までの周期点の個数を計算して行くと，あるけっこう広い a の区間で，周期点の個数が一定となるものがいくつか存在することがわかる．これはこれらのパラメーター領域で Hénon map が構造安定となることを示しているように見える．構造安定性定理より，それは non-wandering set が hyperbolic set となることを意味する．

この [DMS] では数学的に厳密な証明はないものの，その hyperbolicity のメカニズムを説明し，そこから得られるマルコフ分割で計算した周期点の個数と，Biham–Wenzel の方法で計算した個数とが，周期２０まで完全に一致するという結果を得ている．またここで調べられた３つの hyperbolic case は全て，missing block expression という方法でかなり簡単にその構造を表現できる．この missing block expression は上記の Cvitanović の pruning front のひとつの例とも言えるが，対応する Hénon map の構造を具体的に与えたものとしては，初めてのものである．

（１７） **Bedford–Smillie [BS1–4]**： 彼らは多変数ポテンシャル論を使うことにより，complex Hénon map に関する多くの基本的な性質の証明に成功した．

$K_\pm$ を（９）で定義したものとし，$J_\pm = \partial K_\pm$, $K = K_+ \cap K_-$, $J = J_+ \cap J_-$ とする（J は１次元の時の Julia set に相当する）．彼らの得た結果のいくつかを述べると，

(i) K は perfect set である．

(ii) $K_\pm$, $J_\pm$ は連結である．

(iii) Ω を $int\ K_+$ のある連結成分とすると $\partial\Omega = J_+$ である．

(iv) p を sink, B をその basin とすると $\partial B = J_+$ である．

(v) H が２つ以上の basin component を持てば，J_+ は任意の点で embedded topological manifold とはならない．

(vi) p を saddle とすると，その安定多様体 $W^s(p)$ は J_+ の中で dense である．

(vii) p を sink, B をその basin とする．任意の１次元 algebraic variety $V \subset \mathbf{C}^2$ に対し，$B \cap V \neq \emptyset$ かつ $V \not\subset \overline{B}$ となる．

(viii) J が hyperbolic set ならば，周期点は J で dense である．

[BS1] で注意しているように complex Hénon map は strange attractor を持たない．すなわち attractor は必ず有限個の sink となってしまう．また（１１）で述べたように topological entropy は常に $log\ 2$ である．このように real と complex ではだいぶ様子が異なる．しかし complex の場合だけとはいえ，Hénon map に対してこれほど強力な理論的枠組みを与えたという意味で，この [BS1–4] はきわめて重要である．

References

[AAC1]. Artuso R, Aurell E, Cvitanović P, *Recycling of strange sets: I. Cycle expansions*, Nonlinearity **3** (1990), 325–359.

[AAC2]. Artuso R, Aurell E, Cvitanović P, *Recycling of strange sets: II. Applications*, Nonlinearity **3** (1990), 361–386.

[BC]. Benedics M, Carleson L, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math. **133** (1991), 73–169.

[Bed]. Bedford E, *Iteration of polynomial automorphisms of* $\mathbf{C}^2$, preprint.

[BS1]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Inv.Math. **103** (1991), 69–99.

[BS2]. Bedford E, Smillie J, *Fatou–Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, preprint.

[BS3]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: Stable manifolds and recurrence*, preprint.

[BS4]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*, preprint.

[BW]. Biham O, Wenzel W, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellors*, Phys Rev Lett. **63** (1989), 819–822.

[CGP]. Cvitanović P, Gunaratne GH, Procaccia I, *Topological and metric properties of Hénon type strange attractors*, Phy.Rev.A **38, number 3** (1988), 1503–1520.

[CL]. Collet P, Levy Y, *Ergodic properties of the Lozi mappings*, Comm.Math.Phys. **93** (1984), 461–481.

[D]. Devaney R, *Homoclinic bifurcations and the area-conserving Hénon mapping*, J.Diff. Equ. **51** (1984), 254–266.

[DMS]. Davis MJ, MacKay RS, Sannami A, *Markov shifts in the Hénon family*, to appear in Physica D.

[DN]. Devaney R, Nitecki Z, *Shift automorphisms in the Hénon mapping*, Comm Math Phys. **67** (1979), 137–146.

[EM1]. El-Hamouly H, Mira C, *Lien entre les propriétés d'un endomorphisme de dimension un et celles d'un difféomorphisme de dimension deux*, Comptes rendus **293,série I** (1981), 525–528.

[EM2]. El-Hamouly H, Mira C, *Singularités dues au feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bi-dimensionnel*, Comptes rendus **294,série I** (1982), 387–390.

[FKM1]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Sur les bifurcations d'un difféomorphisme quadratique bi-dimensionnel. Situations homoclines et hétéroclines. Zone Morse-Smale*, Comptes rendus **298, Série I** (1984), 253–256.

[FKM2]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bidimensionnel. Doublement de d'ordre (période) des zones sources et des zone échangeurs*, Comptes rendus **301, Série I** (1985), 223.

[FKM3]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Séquences de Myrberg et communications entre feuillets du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bidimensionnel*, ibid., 325.

[FM]. Friedland S, Milnor J, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory and Dyn Sys. **9** (1989), 67–99.

[GKM]. Grassberger P, Kantz H, Moenig U, *On the symbolic dynamics of the Hénon map*, J.Phys.A:Math.Gen. **22** (1989), 5217–5230.

[H]. Hénon M, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm.Math.Phys. **50** (1976), 69–77.

[Hol]. Holmes P, *Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe:Extended families and bifurcation sequences*, preprint (1989).

[HW]. Holmes P, Whitley D, *Bifurcations of one- and two-dimensional maps*, Phil.Trans. R.Soc.Lond.A **311** (1984), 43–102.

[Hu]. Hubbard J, *The Hénon mapping in the complex domain*, Chaotic Dynamics and Fractals (ed. M.Barnsley and S.Demko) Academic Press 1986, 101–111.

[HuO]. Hubbard J, Oberste-Vorth W, *Hénon mappings in the complex domain I: general results*, preprint.

[K]. Kawakami H, *Table of rotation sequences of* $x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$, Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations(ed. G.Ikegami), World Scientific (1986), 73–92.

[M]. Milnor J, *Non-expansive Hénon maps*, Adv. Math. **69** (1988), 109–114.

[Mar]. Marotto FR, *Chaotic behavior in the Hénon mapping,* Comm.Math.Phys. **68** (1979), 187–194.

[Mira]. Mira C, *Chaotic Dynamics,* World Scientific (1987).

[Mis]. Misiurewicz M, *Strange attractors for the Lozi mappings,* Ann.New York Acad.Sci. **357** (1980), 348–358.

[MV]. Mora L, Viana M, *Abundance of strange attractors,* preprint.

[S]. Smillie J, *The entropy of polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$, Ergod.Th.Dyn.Sys. **10** (1990), 823–827.

[San1]. Sannami A, *On the structure of the parameter space of the Hénon family,* Dynamical Systems and Applications(ed. N.Aoki), World Scientific (1987), 143–157.

[San2]. Sannami A, *A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family,* Japan J.Appl.Math. **6,No.2** (1989), 291–330.

[Shi1]. Shibayama K, *Connections of periodic orbits in the parameter space of the Lozi family,* The study of dynamical systems (ed. N.Aoki) World Scientific (1989), 10–25.

[Shi2]. 柴山健伸, ＬＯＺＩ写像族における周期解のコネクション, 和歌山大学経済学会　経済理論 **227.228** (1989), 38–65.

[T]. Tresser C, *The topological conjugacy problem for generalized Hénon mappings: some negative results,* Bol.Soc.Bras.Mat. **13 No.1** (1982), 115–130.

[U1]. 宇敷重広, *Fine structure of bifurcation branches in Hénon's family of mappings,* 力学系理論の総合的研究　記録集 (ed. 白岩謙一) (1981).

[U2]. Ushiki S, *Central difference scheme and chaos,* Physica D **4D No.3** (1982), 407–424.