数理解析研究所講究録
第806巻 1992年 24-35

一次元力学系について

井上　友喜 (広島大学理学部)
辻井　正人 (京都大学理学部)

§0. はじめに

一次元力学系, 特に, quadratic map $f_t(x) = 4tx(1-x)$, $t \in (0,1)$, を中心とする系の研究は Milnor と Thurston の研究以来, 活発に続けられてきた。ここでは初期の結果についての復習とそれらの結果が最近どの様に拡張されているかを述べたい。より詳しい包括的な記述については例えば [Me] を見ていただきたい。

J.Guckenheimer は論文 [Gu]で $f_t : [0,1] \to [0,1]$ の topological type は次の3通りに分類できることを示した。

(I) stable periodic orbit が唯一つ存在して, ほとんど全ての点はその orbit に漸近する。

(II) 無限回繰り込み可能で, ほとんど全ての点はある1つの minimal attractor に漸近する。

(III) 初期値についての sensitive dependence をもつ。(定義は後で述べる。)

ここで (I),(II) の type の f_t についてはその構造は比較的分かりやすい。いっぽう (III) の type の系についてはあまり良く分かっていない。そこで一つの研究の方向は

(あ) type(III) の写像について調べる。

ということになる。特に次のような問題がある。

(あ1) 極限集合 $\omega(x)$ は Lebesgue measure についてほとんど至るところの x について開区間を含むか?

(あ2) 絶対連続な不変確率測度 (以下 a.c.i.p.m.) が存在するか?

また Guckenheimer の議論の中で有効に使われたいくつかの結果を一般の unimodal map や multimodal map について拡張することも興味のあることである。例えば、

(い) 次の結果は一般の unimodal map や multimodal map についてどのように一般化できるか?

(1) Misiurewicz の hyperbolicity についての結果 (後述、系 2.3)

(2) 遊走区間の非存在。(後述、系 3.3)

(3) stable periodic orbit は 唯 1 つ。(後述、系 1.2)

一方、少し違った方向として 1-parameter family (例えば f_t) について parameter space 上にある性質をもつ系がどれぐらいあるか, また, parameter に依存してどのように変化するかを知ることは大事なことである。例えば

(う) パラメータ空間上での問題。

(1) (I) に属する系はパラメータ空間上で dense であるか?

(2) Jacobson の結果 (t について正の確率で f_tは a.c.i.p.m を持つ) の改良。

(3) period doubling 列及び renormalization について

今回我々が取り上げたいのは (あ),(い) の方向についての結果である。(う) の方向につい 0 ては今回は触れない。ただし, Jacobson の結果については他の講演で取り上げられるはずである。(い) についてはその議論自体がに S-unimodal map ついての理論の上にたっているために S-unimodal map についての復習の途中で結果を紹介するだけにする。一方 (あ) については G.Keller の最近の論文 [**K2**] や

"Exponents, attractors and Hopf decomposition for interval maps." (Erg.Th.& Dyn.Sys. Vol.10)

と F.Hofbauer と G.Keller のレビュー

"Some remarks on recent results about S-unimodal maps."(Ann.Inst.Henri Poincare. Vol.53.)

とが良い見とおしを与えているのでそれらを中心に紹介して最後にその他の結果についても述べる。全体の構成は前半,§1-4 は S-unimodal map についての議論の復習、後半, §5,6 は上記の論文の紹介を主にする。ただし前半でも後半のためにいくつかの準備をする。

定義: C^3-map $f:[0,1] \circlearrowleft$ が S-unimodal であるとは次の四つの条件をみたすこととする。

(1) $f(0)=f(1)=0$,

(2) f の critical point は $c=\frac{1}{2}$ 唯一つ,

(3) f の Schwarz 微分 $Sf := \dfrac{f'''}{f'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2$ が c を除いた全ての点 $x \in [0,1]$ で負の値をとる。

(4) f は symmetric, つまり $f(x) = f(1-x)$ 。また、$f'(0) > 1$ 。

注意: 上の条件 (4) は証明の簡単のためにつけた。一般には S-unimodal map の定義には条件 (4) は入っていない。

以下の節では f を固定する。$[0,1]$ 上の Lebssgue measure を m と書く。また、$y \in [0,1]$ に対して $y' = 1 - y$ と置く。従って、上の条件 (4) より $f(y) = f(y')$ 。

§1 Negative Schwarzian derivative

ここでは S-unimodal map の定義の条件 (3), 即ち Schwarz 微分が負の値をとることからどのような性質が出てくるかを考える。まず Schwarz 微分 Sf が写像の iteration を考える上で便利であるのは合成について次の公式を満たすからである。

(A) $\quad S(f \circ g) = Sf \circ g \cdot (Dg)^2 + Sg$

特にいま, $Sf < 0$ であるから, 任意の正整数 n に対し $Sf^n < 0$ が成り立つ。以下は $Sf < 0$ を満たす場合についてのみ考えるが上の性質 (A) はそうでない場合でも Schwarz 微分を考えることを有効にする。というのは, 一般に二階以上の微分は合成について煩雑になるが Schwarz 微分については (A) の様に簡単だからである。一つの応用は [**Y**] の Lemma 4 に見られる。

ここでは $Sf < 0$ から導かれる二つの性質について述べる。まず第一はつぎの Minimal principle と呼ばれている性質である。

(B) $g : [0,1] \circlearrowleft$ が区間 $[a,b]$ 上 diffeomorphism で, かつ, $Sg < 0$ ならば 任意の $x \in (a,b)$ について

$$|df(x)| > \min\{|df(a)|, |df(b)|\}$$

この性質から次のようなことがわかる。$[0,1] - \cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c)$ の各連結成分を元とする $[0,1]$ の分割を ζ_n と書くことにする. また, ζ_n の x を含む元を $\zeta_n(x)$ と書く。(端点は無視する。)

補題1．1．$x \in [0,1] - \cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c)$ について $|df^n(x)| \leq 1$ ならば $\zeta_n(x) - x$ の二つの連結成分のうち少なくとも一つの上で $|df^n| < 1$。

[証明]: もし各々の連結成分上に $Sf^n(x) > 0$ となる点があればそれらを結ぶ線分に上の性質 (B) を当てはめれば矛盾が出る。((終))

次は上の補題の易しい系である。

系1．2．p が周期 n の周期点で $|df^n(p)| \leq 1$ ならば p は *(semi) stable* かつ $f^k(c) \longrightarrow O(p) \quad (k \to \infty)$。特にこのような周期軌道は高々一つ。

注意: この系の結果は最近、[MMS] において次のように拡張された。
" $f : [0,1] \to [0,1]$ が non-flat な critical point を持つとき non-repelling periodic orbit は有限個しかない。"

性質 (B) は重要な性質であるが条件 (3) を十分活かしているとはいえない。以下に述べる性質は Misiurewicz によって発見されたもので解析的でより強力であり、第5節以降で述べられる事柄の証明において本質的である。

写像 $g : (a,b) \to (c,d)$ が C^1級であるとき、その Perron-Frobenius operator $P_g : L^1(a,b) \to L^1(c,d)$ を

$$P_g(\varphi)(x) \equiv \sum_{g(y)=x} \frac{\varphi(y)}{|g'(y)|}$$

で定める。(つまり、測度の空間に自然に誘導される写像を L^1 をその部分空間とみなして制限したもの。) そして、(a,b) を$[0,1]$の開区間としてその上の関数空間 $H(a,b) \subset C(a,b)$ を

$$H(a,b) = \{P_g(r) \mid r \in \mathbf{R}, r \geq 0,\ g : (0,1) \to (a,b) \text{ onto diffeomorphism with } Sg \leq 0.\}$$

と定義する。(ここで r は値 r をとる定数関数とみなしている。)

このとき (A) より明らかに

(C1) $f : (a,b) \to (c,d)$ が onto diffeomorphism with $Sf \leq 0$ ならば $f(H(a,b)) \subset H(c,d)$.

さらに次の性質がある. ([Mi]参照)

(C2) $0 \neq \varphi \in H(a,b) \Leftrightarrow \varphi^{-1/2}$ concave $\Rightarrow \varphi$ convex 。

(C3) $\varphi, \psi \in H(a,b),\ t \geq 0 \Rightarrow \varphi + \psi, t\varphi \in H(a,b)$

(C4) $\{\varphi \in H(a,b) \mid \| \varphi \|_{L^1} < const.\}$ は広義一様収束の位相で compact 。

§2. Denjoy-Scwartz の定理

一般に力学系を考えるときに, 問題になるのは写像の distortion, 即ち,

$$\mathrm{Dist}(f^n, J) = \max_{x \in J} \log |df^n(x)| - \min_{x \in J} \log |df^n(x)|$$

である。例えば, hyperbolicity が力学系理論の多くの場所で有効になるのは一つは distortion についての評価が易しくなることによる。一次元力学系で distortion を抑える役割を果たすのは次の易しい定理である。

定理２．１．ある閉区間 J について (i) $\inf_{n \geq 0} d(f^n(J), c) > 0$ かつ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f^n(J) < +\infty$ であるとき

$$\sup_n \mathrm{Dist}(f^n, J) < +\infty.$$

さらにある開区間 $\tilde{J} \supset J$ があって $f^n|_{\tilde{J}}$ は任意の正整数 n について *diffeomorphism* になる。

この定理からだけでも色々な事実がでてくる。

系２．２．もし開区間 J が遊走区間ならば $closure(\cup_{j \geq 0} f^n(J)) \ni c$.

ここで開区間 J が遊走区間であるとは (i) $f^i(J) \cap f^j(J) = \varnothing$ $(i, j \geq 0, i \neq j)$ かつ (ii) J は stable periodic point の basin と交わらないことである。

系２．３．あるコンパクト集合 K が *critical point c* や *non-repelling periodic point* を含まないとき $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(K)$ は *hyperbolic set* (または空集合)。

系２．４．f が *stable periodic point* を持たないとき $\omega(x) \ni c$ *m-a.e.* 。特に一般に $\omega(x) \supset \omega(c)$ *m-a.e.* 。

注意: 系２．３ は R.Mane によって一般の多峰写像に拡張された。[Ma]

§3 Guckenheimer's trap

この節では Guckenheimer によって使われた S-unimodal map についての独特の方法を見る。まず

$$V_n = \{x \in [0,1] \mid f^j(y) \notin [y,y'], j = 1,2,\cdots,n-1 \text{ かつ } f^n(y) \in [y,y']。\}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

補題３．１． (1) $y \in \partial V_n$について y または y' が周期点。

(2) V_n 上で $|df^n(x)| > \min_{y \in \partial V_n} |df^n(y)|$ 。特に *stable periodic point* が存在しないとき $|df^n(x)| > 1$ *on* V_n。

系３．２．$\lambda_{per} = \min\{\chi(p) \mid p : \text{periodic.}\}$ とするとき $\chi(x) > \lambda_{per}$ *m-a.e.*

ここで $\chi(x)$ は Lyapunov 指数で $\chi(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |df^n(x)|$ 。

系３．３．遊走区間は存在しない。

系３．３は [MMS] において一般の non-flat な critical point を持つ多峰写像に拡張された。

§4 Canonical Markov extension の構成

この節の議論については [K2] を参照。$D_{-1} = (c,1), D_0 = (0,c)$ として，以下 開区間 $D_k, k = 2,3,4,\cdots$ を順に次のように構成する:

$c \notin f(D_k)$のとき， $D_{k+1} = f(D_k)$,

$c \in f(D_k)$のとき， $D_{k+1} = f(D_k) - c$ の $f^{k+1}(c)$ を含む連結成分。

ここで第二の場合に $f(D_k) - D_{k+1}$ を E_k と書くことにする。

補題４．１．$D_k = f^k(c, c_{-k})$。ここで c_{-k} は $\cup_{j=1}^k f^{-j}(c)$ の中で最も c に近い点とする。

$-1, 0 = k(0), k(1), k(2), \cdots$ を上の第二の場合が起こる k、即ち、$D_{k+1} \neq f(D_k)$ なる k を順に並べたものとする。

補題４．２．$\ell \in \mathbf{N}$ に対してある $Q(\ell) < \ell$ があって $E_{k(\ell)} = D_{k(Q(\ell))+1}$ かつ $k(Q(\ell)) = k(\ell) - k(\ell - 1) - 1$。

この補題４．２の中の写像 $Q : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ を kneading map と呼ぶ。kneading map が決まれば kneading sequence が決まり 逆に kneading sequence を決めれば kneading map が決まる。対応の仕方については [HK] を参照してほしい。

$E_{k(\ell)}$ と $D_{k(Q(\ell))+1}$ を同一視して, $\{D_i\}$ とその間の射として元とその像を結ぶ矢印, 即ち, $D_i \to D_{i+1}, i = -1, 0, 1, 2, \cdots$ と $D_{k(\ell)} \to D_{k(Q(\ell))+1}, \ell = 1, 2, \cdots$ を考えたものを transition graph と呼ぶ。集合 $\hat{X} = \sum_{k=-1}^{\infty} \{k\} \times D_k$ とその上に transition graph と f から自然に誘導される写像 $\hat{f} : \hat{X} \circlearrowleft$ の組 $\{\hat{f}, \hat{X}\}$ を f の canonical Markov extension と呼ぶ。

集合 $\{D_i\}$ に 次のように同値関係をいれる。

$$D_i \sim D_j \Leftrightarrow \begin{array}{l} D_i \text{ と } D_j \text{ を含む矢印の輪がある, 即ち,} \\ D_i \to D_{i_1} \to \cdots \to D_j \to D_{j_1} \to \cdots \to D_i \text{ 。} \end{array}$$

定義: (1) f が sensitive dependence を持つとは, ある $\epsilon > 0$ がとれて, 任意の開区間 J に対してある $n > 0$ があって $|f^n(J)| > \epsilon$ をみたすことである。

(2) f が infinitely renormalizable であるとは無限列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ と c を含む閉区間の列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ があって $f^{n_i}(I_i) \subset I_i$ かつ $f^{n_i}|_{I_i}$ は unimodal で $f^{n_i}(\partial I_i) \subset \partial I_i$ あることである。

定理４．３． (1) $\#\{D_i\} < +\infty \Leftrightarrow f$ は *periodic sink* を持つ。

(2) $\#\{D_i\} = +\infty$ かつ $\#\big(\{D_i\}/\sim\big) < +\infty \Leftrightarrow$ *sensitive dependence* を持つ。

(3) $\#\{D_i\} = +\infty$ かつ $\#\big(\{D_i\}/\sim\big) = +\infty \Leftrightarrow$ *infinitely renormalizable*。

以下、定理４．３ で（２）の場合に最大の同値類に入る $\{k\} \times D_k \subset \hat{X}$ の全体を $\hat{X}_{max}$ と書く。

§5. Sensitive dependence をもつ S-unimodal map の分類

前節においてfの Markov extension $\hat{f}$なる概念が導入された. この概念をもっと詳しく説明すべきところであるが, とりあえずは, 何かfの extension $\hat{f}$ なるものがあるということとFrobenius-Perron operator に関係した次に述べる基本性質, 命題 5.1 を頭に置いて頂きたい. その前に定義をひとつ述べておく.

定義 (i) T の Frobenius-Perron operator P_T が dissipative on A とは,

$$\textstyle\sum_n P_T{}^n g < \infty \ \text{a.e.}\ x \ \text{on}\ A \ \text{for each}\ g \geqq 0 \ \text{in}\ L^1.$$

(ii) T の Frobenius-Perron operator P_T が conservative on A とは,

$$\textstyle\sum_n P_T{}^n g = \infty \ \text{a.e.}\ x \ \text{on}\ A \ \text{for some}\ g \geqq 0 \ \text{in}\ L^1.$$

πを$\hat{X}$からXへの自然な射影とし, $\hat{m}$をmから自然に$\hat{X}$の上に誘導された測度とする.

命題 5.1. (1) P_f が dissipative ならば, $P_{\hat{f}}$ も dissipative.
(2) $P_{\hat{f}}$ が conservative on $A \subset \hat{X}$ ならば, P_f は conservative on πA.
(3) $P_{\hat{f}}\hat{h} = \hat{h}$ for some $\hat{h} \in L^1(\hat{m})$ ならば, $P_f(P_\pi \hat{h}) = P_\pi \hat{h}$, $P_\pi \hat{h} \in L^1(m)$.

dissipative, conservative といった概念と $P_{\hat{f}}$-不変な density $\hat{h}$ が L^1 に属するか否かを用いてSensitive dependence をもつS-unimodal map は, 次のように分類できる.

定理 5.2. $P_{\hat{f}}$ は次の三つの type をとり得る.
(a) $P_{\hat{f}}$ は dissipative.
(b) $P_{\hat{f}}$ は conservative on $\hat{X}_{\max}$ で 不変な density $\hat{h} \notin L^1(\hat{m})$がある.
(c) $P_{\hat{f}}$ は conservative on $\hat{X}_{\max}$ で 不変な density $\hat{h} \neq 0$ があり, $\hat{h} \in L^1(\hat{m})$.

上の定理で(c)の場合は, 命題5.1から ^ をはずしてもよいことはすぐにわかる. ここにMarkov extension の有効性のひとつがある. しかし, (b)の場合にP_f-不変な density が存在するかどうかはよくわかっていない.

もし, fが定理 5.2の分類でどれに属するかがわかれば, $\omega(x)$ と $\omega(c)$, Lyapunov

指数χについて次のようなことがわかる．

定理 5.3. (a)，(b)，(c) は 定理 5.2 の分類とする．

（Ⅰ） (a) ならば，$\omega(x)=\omega(c)$ m-a.e. x.

(b)または(c) ならば，$\omega(x)=$interval の和 m-a.e. x.

（Ⅱ） (a)または(b) ならば，$\chi(x)=0$ m-a.e. x.

(c) ならば，$\chi(x)=$const.>0 m-a.e. x.

$\omega(x)$ と $\omega(c)$ を用いて Sensitive dependence をもつ S-unimodal map を次のように分類することができる．

定理 5.4. 次のいずれかが成り立つ．

(1) $\omega(x)=\omega(c)\fallingdotseq$interval の和 m-a.e. x.

(2) $\omega(x)\fallingdotseq\omega(c)$ で $\omega(x)$ が interval の和 m-a.e. x.

(3) $\omega(x)=\omega(c)=$interval の和 m-a.e. x.

この分類と定理 5.2 の分類の関係はどうなっているだろうか．あまり密接な関係は知られていないが，定理 5.3 により下表の×印のものは存在しない．

	定理5.2の分類 (a)	(b)	(c)
定理5.4の分類 (1)	(あ)	×	×
(2)	×	(い)	(う)
(3)	(え)	(お)	(か)

(あ)に属するものがあるかどうかはわからない．

(い)に属するものは非可算個存在する．

(え)に属するものが存在するかどうかは，Hofbauer-Keller の open problem.

(え)または(お)に属するものは非可算個存在する．

(う)または(か)に属するものはJacobsonの定理により存在する．

定理 5.4 の分類で(2)の場合は，(3)の場合に比べてよくわかっている．

定理 5.5.

定理 5.4 の分類で(2)ならば，必ず P_f-不変な density h (integrable or not) が存在する．この h は $\omega(c)$ の近傍を除いて有界である．

§ 6. Hyperbolicity properties と a.c.i.p.m.

ここでは，S-unimodal map に関するいろいろな Hyperbolicity properties と a.c.i.p.m. (特に ergodic dominant measure) の存在に関して知られている結果を紹介する．

まず，ここで扱う Hyperbolicity properties を列挙しておこう．

Mis: $\exists\, \varepsilon > 0$ such that $|f^n c - c| > \varepsilon$ for all n. (Misiurewicz condition)

HC_+: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that $|(f^n)'(fc)| > K \cdot r^n$ for all n.

(Hyperbolicity on (Critical point)$_+$)

HC_-: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that

$$|(f^n)'(z)| > K \cdot r^n \text{ for all } n \text{ and } z \in f^{-n}(c).$$

(Hyperbolicity on (Critical point)$_-$)

HC: HC_+ and HC_- (Collet-Eckmann condition ともいう)

HP: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that

$$|(f^n)'(z)| > K \cdot r^n \text{ for all } n \text{ and } z = f^n(z).$$

(Hyperbolicity on Periodic points)

ξ_n を f^n の最大単調区間からなる集合とする．

GE: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that

$$m(Z) \leqq K \cdot r^{-n} \cdot m(f^n Z) \text{ for all } n \text{ and } Z \in \xi_n \text{ with } c \in \mathrm{int}\, f^n(Z).$$

(Globally Expanding)

Exp: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that

$$m(Z) \leqq K \cdot r^{-n} \text{ for all } n \text{ and } Z \in \xi_n.$$

LE: $\exists\, K > 0$ and $r > 1$ such that

$$m(Z) \leqq K \cdot r^{-n} \cdot m(f^n Z) \text{ for all } n \text{ and } Z \in \xi_n,\ c \text{ は } Z \text{ の端点.}$$

(Locally Expanding)

$$H_m(\xi_n) = -\sum_{Z \in \xi_n} m(Z) \log m(Z)$$

$\overline{\mathrm{H}}>0$: $\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{H}_m(\xi_n)>0.$

$\underline{\mathrm{H}}>0$: $\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{H}_m(\xi_n)>0.$

EDM: $\quad f$ は ergodic dominant measure をもつ.

PWH: $\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|(T^n)'(x)|>0$ on a set of positive Lebesgue measure.

(PointWise Hyperbolicity)

以上の Hyperbolicity properties に関して次のことが知られている.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{Mis} & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
\mathrm{HC} & \Longleftrightarrow & \mathrm{HC}_+ & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
\mathrm{LE} & \Longleftrightarrow & \mathrm{GE} & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{Exp} & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
\mathrm{HC}_- & \Longleftrightarrow & \mathrm{HP} & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
\mathrm{EDM} & \Longleftrightarrow & \mathrm{PWH} & \Longleftrightarrow & \underline{\mathrm{H}}>0 & \Longleftrightarrow & \overline{\mathrm{H}}>0
\end{array}
$$

上の最下段の条件は，定理5.2の分類で(c)であることと同値である.

なお，T.Nowicki & S.van Strien は HC より弱い条件，c の orderが $l\geqq 1$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f^n)'(fc)|^{-1/l}<\infty$$

をみたすときに，a.c.i.p.m. が存在することを示している.

References

[BL] A.M.Blokh and M.Yu.Lyubich, *Measurable Dynamics of S-unimodal maps of the intervals*, Preprint, Stony Brook.

[Gu] J.Guckenheimer , *Sensitive dependance on initial conditions for one dimensional maps*, Comm. Math. Phys. **70** (1979), 133–160.

[GJ] J.Guckenheimer and S.Johnson, *Distortion of S-unimodal Maps*, Ann.Math. **132** (1990), 71–130.

[Ho] F.Hofbauer, *The topological entropy of the transformation* $x \mapsto ax(1-x)$, Monatch. Math. **90** (1980), 117–141.

[HK] F.Hofbauer and G.Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Comm.Math.Phys. **127** (1990), 319–337.

[J] S.Johnson, *Continuous measures and strange attractors in one dimension.*, Thesis, Stanford.

[K] G.Keller, *Markov extensions, Zeta functions and Fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems.*, Trans. AMS **314** (1989), 433–497.

[K2] G.Keller, *Invariant measures and Lyapunov exponents for S-unimodal maps*, Preprint, Univ. of Maryland.

[K3] G.Keller, *Lifting measures to Markov extensions*, monatsh. Math. **108** (1989), 183–200.

[K4] G.Keller, *Exponents, attractors and Hopf decomposiyions for interval maps*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **10** (1990), 717–744.

[Ma] R.Mañe, *Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics*, Comm.Math.Phys. **100** (1987), 495–524.

[Me] W. de Melo, "Lectures on one-dimensional dynamics," IMPA (Brasil).

[Mi] M.Misiurewicz, *Absolutely continuous measures for certain maps on an interval*, Publ.Math.I.H.E.S **53** (1981), 17–51.

[MMS] M.Martens, W.de Melo and S.van Strien, *Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics*, preprint, Delft.

[Now] T.Nowicki, *On some dynamical properties of S-unimodal maps on an interval.*, Fund.Math. **126** (1985), 27–43.

[Now2] T.Nowicki, *Symmetric S-unimodal mappings and positive Lyapunov exponent*, Ergod.Th. and Dynam. Sys. **5** (1985), 611–616.

[Now3] T.Nowicki, *Positive Lyapunov exponents of the critical values of S-unimodal mappings imply uniform hyperbolicity*, Preprint, Warsaw.

[Y] J.C.Yoccoz, *Conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition Diophantienne*, Ann.Sci.de l'Ec.Norm.Sup. **17** (1984), 333–361.

[Z] K.Ziemian Almost sure invariance principles for some maps of an interval, Ergod.Th.and Dynam,Sys. **4** (1985), 625–640.