数理解析研究所講究録
第 806 巻 1992 年 36-64

Mora-Vianaによる
Hénon type attractorについての結果の紹介 I
（１次元写像の部分）

龍谷大学理工学部数理情報学科　　岡　宏枝

１次元写像 $Q_a(x)=1-ax^2$ に対する次の定理の証明を目的とする。

Theorem

任意に与えられた $0\le c\le\log 2$ と $a_0\le 2$ に対し，$\exists E\subset(a_0,2)$ s.t. Lebesgue meas $(E)>0$ で，$\forall a\in E$ に対しcritical value 1 の Lyapunov指数が $\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|(Q_a^n)'(1)|\ge c(>0)$ を満たすものが存在する．特に Q_a は安定な周期軌道を持たない．

後半は前半とD.Singerによるつぎの定理から直ちに従う．よって以下では Lyapunov 指数の評価だけが問題である．

Theorem[Singer]

$Q:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]\in C^3$ が有限個の critical point を持ちかつ Schwarz derivative $SQ<0$ ならば，任意の Q の安定周期点 p に対してその安定集合$W^s(O(p))$は Q の critical point または端点 α,β のいずれかを必ず含む．

§１．Basic Lemmas

１次元写像 $Q_a(x)=1-ax^2$ に対する次の基本的性質を準備する。

Lemma 1

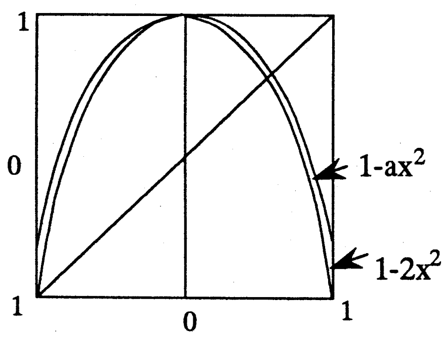
任意に与えられた $\delta>0$ と $0\le c_0\le\log 2$ に対し$a_0=a_0(\delta,c_0)<2$ が存在して

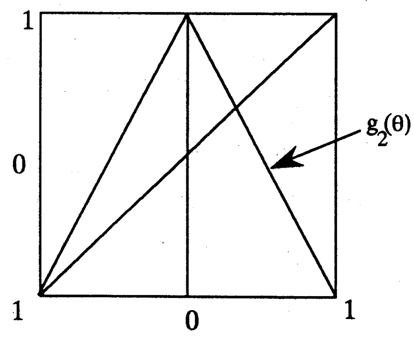
$$|Q_a^j(x)|\ge\delta \quad\text{for}\quad 0\le j\le k-1,\quad\text{and}\quad |Q_a^k(x)|\le\delta$$

となるような $x\in[-1,1]$, $a\in(a_0,2)$ と $k\ge 1$に対して

$$|(Q_a^k)'(x)|\ge\exp(kc_0)$$

が成立する．





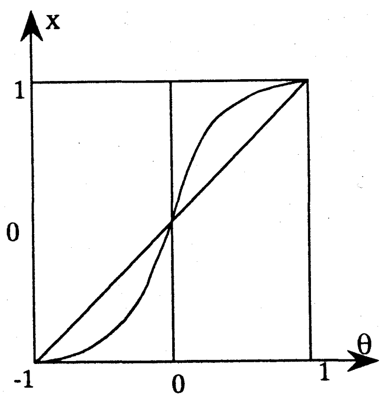


Fig.2

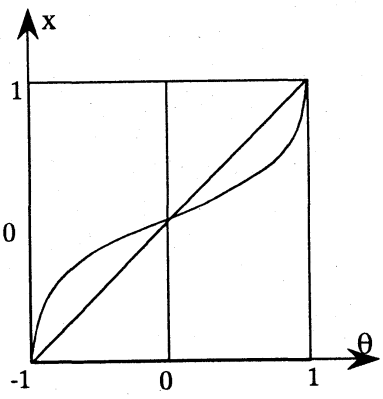


Fig.3

証明）$h:[-1,1]\supset$ $h(\theta)=\sin(\frac{\pi}{2}\theta)$ によって、Q_a のconjugacyを考える：

i.e. $g_a(\theta)=h^{-1}(Q_a(h(\theta))$.

すると次が成り立つ。

$$g_2(\theta)=\frac{2}{\pi}\arcsin(1-2\sin^2(\frac{\pi}{2}\theta))=\frac{2}{\pi}\arcsin(\cos(\pi\theta))$$
$$=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\pi|\theta|)=1-2|\theta|\ .$$

従って、$g_2'(\theta)=2$ for $\theta\neq 0$ である。また、a が2に近く、

（※1）　$|Q_a(h(\theta))|,\ |Q_2(h(\theta))|\le 1-\delta^2$

なる θ の範囲では、ある c_i があって、

$$\begin{aligned}
&|g_a'(\theta)-g_2'(\theta)|\\
&=|(h^{-1})'(Q_a(h(\theta))\cdot Q_a'(h(\theta))\cdot h'(\theta)|-|(h^{-1})'(Q_2(h(\theta))\cdot Q_2'(h(\theta))\cdot h'(\theta)|\\
&\le\{|(h^{-1})'(Q_a(h(\theta))-(h^{-1})'(Q_2(h(\theta))||Q_a'(h(\theta))|\\
&\qquad+|(h^{-1})'(Q_a(h(\theta))||Q_a'(h(\theta))-Q_2'(h(\theta))|\}|h'(\theta)|\\
&\le\{c_i'|Q_a(h(\theta))-Q_2(h(\theta))|\times 4+c_i''\times 2|a-2|\}\times\frac{\pi}{2}\\
&\le c_i|2-a|\ .
\end{aligned}$$

なる評価式が成り立つ。ただし、c_i'，は $|(h^{-1})''(\theta)|<c_i'$ for $|x|<1-2\delta^2$ 、c_i'' は $|(h^{-1})'(\theta)|<c_i''$ for $|x|<1-2\delta^2$ を満たす定数である。（※1）が成り立つためには $1-\delta\ge|h(\theta)|\ge\delta$ であればよい。従って、$\exists a_0<2$であり、$a_0<a\le 2,$ かつ $1-\delta\ge|h(\theta)|\ge\delta$ なる a,θ に対して、$|g_a'(\theta)|\ge e^{c_0}$ が成立する。

$Q_a^k(x)=h(g_a^k(h^{-1}(x)))$ だから、

$$|(Q_a^k)'(x)|=|h'(g_a^k(h^{-1}(x))|(g_a^k)'(h^{-1}(x))||(h^{-1})'(x)|\ .$$

仮定 $\left|Q_a^j(x)\right| \geq \delta$ for $0 \leq j \leq k-1$ より $\theta = h^{-1}(Q_a^j(x))$ $(0 \leq j \leq k-1)$ として、$\left|h(\theta)\right| \geq \delta$ は満たされているし、また $1-\delta \geq \left|h(\theta)\right|$ については、最初の何回かを除いては満たされていて、しかも $1-\delta \leq \left|h(\theta)\right|$ における微係数は、δ を十分小さくとっておけば $\left|(g_a)'(h^{-1}(Q_a^j(x)))\right| \geq 3$ としてよい。従って、

$$\left|(g_a^k)'(h^{-1}(x))\right| = \prod_{i=0}^{k-1}\left|(g_a)'(h^{-1}(Q_a^i(x)))\right| \geq e^{kc_0},$$

および

$$\left|h'(g_a^k)'(h^{-1}(x))\right|\left|(h^{-1})'(x)\right|$$
$$= \left|h'(h^{-1}(Q_a^k(x)))\right|\left|(h^{-1})'(x)\right| = \frac{\left|(h^{-1})'(x)\right|}{\left|(h^{-1})'(Q_a^k(x))\right|} \geq 1 \quad (\because |x| \geq \delta \geq \left|Q_a^k(x)\right|)$$

により、$\left|(Q_a^k)'(x)\right| \geq e^{kc_0}$ が従う。 ■

Lemma 2

任意に与えられた $1/9 > \delta > 0$, $0 \leq c_0 \leq \log 2$, および任意に大きな自然数 N_0 に対して自然数 $N > N_o$ と区間 $\Omega \subset (a_0, 2)$ が存在し次をみたす．ただし、$a_0 = a_0(\delta, c_0) < 2$ はLemma1で決まる定数とする。

（1） $Q^j(\Omega,0) \cap (-\delta,\delta) = \phi$ for $0 \leq j \leq N-1$, and $Q^N(\Omega,0) = (-\delta,\delta)$.

（2） $\left|Q_a^j(x)'(1)\right| \geq 3^j$ for $0 \leq j \leq N_0 - 1$, $a \in \Omega$

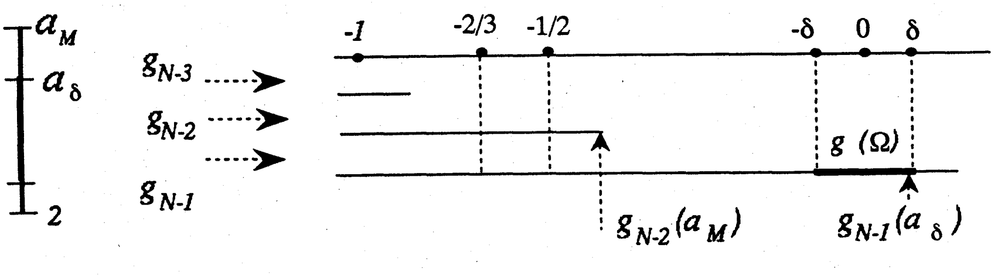
（3） $\left|Q_a^j(x)'(1)\right| \geq \exp(c_0 j)$ for $0 \leq j \leq N-1$, $a \in \Omega$

証明） $g_i : a \in (a_0, 2) \mapsto Q_a^i(1)$ で定義する。$Q_2^j(1) = -1$, $\forall j \geq 1$, $(Q_2^j)'(1) = 4^j$, $\forall j \geq 1$ に注意すると $a_1 \geq \max\{a_0, 3/2\}$ が存在し、$g_1^{-1}((-1,-1/2)) \supset (a_1, 2)$ かつ $\left|Q_a(1)\right| \geq 3$, for $a \in (a_1, 2)$ となることがわかる。更に帰納的に $\{a_i\}_{1=0,1,2,\cdots}$ が構成できて、$a_i > a_{i-1}$, $g_i^{-1}((-1,-1/2)) \supset (a_i, 2)$ かつ、$\left|(Q_a^i)'(1)\right| \geq 3^i$ for $a \in (a_i, 2)$ と出来る。N_0 に対し決まる a_{N_0-1} をとると、$g_{N_0-1}^{-1}((-1,-1/2)) \supset (a_{N_0-1}, 2)$, i.e.
$(-1,-1/2) \supset Q^{N_0-1}((a_{N_0-1},2),1) = Q^{N_0}((a_{N_0-1},2),0)$,かつ、$\left|(Q_a^i)'(1)\right| \geq 3^i$ for $i \leq N_0 - 1$, $a \in (a_{N_0-1}, 2)$. 従って、$\Omega \subset (a_{N_0-1}, 2)$ としておけば、

（1）' $Q^j(\Omega,0) \cap (-\delta,\delta) = \phi$ for $0 \leq j \leq N_0$

（2） $\left|Q_a^j(x)'(1)\right| \geq 3^j$ for $0 \leq j \leq N_0 - 1$, $a \in \Omega$

が成立する。



次に、ある $N_1 \geq 0$ があり、うえで決まった a_{N_0-1} に対し、$Q_{a_{N_0-1}}^{N_1}(1) \geq -1/2$ となることが示せる。そのような $N_1 \geq 0$ のうち最小のものを N_2 とし、$N = \min N_1 + 2$ とする。$\Omega = g_{N-1}^{-1}((-\delta,\delta))$ で定義すると、

（1） $Q^i(\Omega,0) \cap (-\delta,\delta) = \phi$ for $0 \leq i \leq N-1$， $Q^N(\Omega,0) = (-\delta,\delta)$

となる。何故なら、$a > 3/2$ のとき $1/2 \leq Q_a(-1/2) \leq 5/8$ となることに注意すると、ある $a_\delta \in \Omega$ があって、$Q_{a_\delta}^{N_2+1}(1) = Q_{a_\delta}^{N-1}(1) = \delta$ となる。このとき、
$1 - a_\delta(Q_{a_\delta}^{N-2}(1))^2 = Q_{a_\delta}^{N-1}(1) = \delta < 1/9$， 即ち、$-a_\delta(Q_{a_\delta}^{N-2}(1))^2 < -8/9$,

(*) $(Q_{a_\delta}^{N-2}(1))^2 > 8/9a_\delta > 4/9$.

一方、N_2 の定義から $Q_{a_{N_0-1}}^{N_2-1}(1) < -1/2$ これと $a_{N_0-1} > 3/2$ より、

(**) $Q_{a_{N_0-1}}^{N-2}(1) = Q_{a_{N_0-1}}^{N_2}(1) < 2/3$.

(*),(**) および、$n \leq N_2$ で $Q_{a_\delta}^n(1) < Q_{a_{N_0-1}}^n(1)$ から $Q_{a_\delta}^{N-2}(1) < -2/3$. i.e.
$Q^{N-1}(\Omega,0) \cap (-\delta,\delta) = \phi$.

$i \leq N-1$ では i によって増加、従って、$Q^i(\Omega,0) \cap (-\delta,\delta) = \phi$ for $0 \leq i \leq N-1$ が示された。

（3） $|Q_a^j(x)'(1)| \geq \exp(c_0 j)$ for $0 \leq j \leq N-1$, $a \in \Omega$ の証明

まず、$Q(a,-1/\sqrt{a}) = 0$ 、また $a \in \Omega$ に対しては、$Q_a^{N-2}(1) < -2/3 < 0$ であることから

$$Q_a^i(1) < -1/\sqrt{a},\ i \leq N-3$$

が成立していることに注意する。

$0 \leq i \leq N_0 - 1$ に対しては、$\forall a \in \Omega$, $|(Q_a^i)'(1)| \geq 3^i$ であるから（3）は満たされている。

$N_0 - 1 \leq i \leq N-2$, $\forall a \in \Omega$ に対して帰納法で証明する。

$$\begin{aligned}
|(Q_a^i)'(1)| &= |Q_a'(Q_a^i(1))| \cdot |(Q_a^{i-1})'(1)| = 2a|Q_a^{i-1}(1)||(Q_a^{i-1})'(1)| \\
&\geq 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}|(Q_a^{i-1})'(1)| \quad (\because 2 \leq i \leq N-3) \\
&\geq 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} e^{c_0(i-1)} \geq 2e^{c_0(i-1)} \geq e^{c_0 i}. \quad (\because c_0 < \log 2)
\end{aligned}$$

$i = N-1$ に対しては、

$$\begin{aligned}
|(Q_a^{N-1})'(1)| &= 2a|Q_a^{N-2}(1)| \cdot |(Q_a^{N-2})'(1)| \\
&\geq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot e^{c_0(N-2)} \geq e^{c_0(N-1)}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 3
任意に与えられた $0 \le c \le \log 2$ に対し，ある自然数 $N_0 = N_0(c)$ でつぎをみたすものが存在する：
$|(Q_a^j)'(1)| \ge 3^j$ for $0 \le j \le N_0 - 1$, and $|(Q_a^j)'(1)| \ge \exp(cj)$ for $0 \le j \le n-1$
ならば $\frac{1}{36} \le \left|\frac{\partial_a Q^n(a,1)}{\partial_x Q^n(a,1)}\right| \le 36$ が成立する.

証明） $\left|\frac{\partial_a Q^n(a,1)}{\partial_x Q^n(a,1)}\right| = \left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{n-1}(1)) + \partial_x Q(a,Q_a^{n-1}(1)) \cdot \partial_a Q^{n-1}(a,1)}{\partial_x Q^n(a,1)}\right|$

$$\ge \left|\frac{\partial_a Q^{n-1}(a,1)}{\partial_x Q^{n-1}(a,1)}\right| - \left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{n-1}(1))}{\partial_x Q^n(a,1)}\right|.$$

n について繰り返すと、

$$\left|\frac{\partial_a Q^n(a,1)}{\partial_x Q^n(a,1)}\right| \ge \left|\frac{\partial_a Q(a,1)}{\partial_x Q(a,1)}\right| - \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{i-1}(1))}{\partial_x Q^i(a,1)}\right|.$$

$\partial_a Q(a,x) = -x^2$, $\partial_x Q(a,x) = -2ax$ であるから、$|\partial_a Q(a,1)| = 1$, $|\partial_x Q(a,1)| = 2a \le 4$. また仮定から、

$$\left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{i-1}(1))}{\partial_x Q^i(a,1)}\right| \le 3^{-i}, \ 2 \le i \le N_0 - 1$$
$$\left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{i-1}(1))}{\partial_x Q^i(a,1)}\right| \le e^{-ci}, \ N \le i \le n-1$$

$i = n$ に対しては、

$$\left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{n-1}(1))}{\partial_x Q^n(a,1)}\right| = \left|\frac{\partial_a Q(a,Q_a^{n-1}(1))}{\partial_x Q(a,Q_a^{n-1}(1))\partial_x Q^{n-1}(a,1)}\right| = \left|\frac{-(Q_a^{n-1}(1))^2}{-2aQ_a^{n-1}(1) \cdot \partial_x Q^{n-1}(a,1)}\right|$$

$$= \left|\frac{Q_a^{n-1}(1)}{2a\partial_x Q^{n-1}(a,1)}\right| \le \frac{1}{2e^{c(n-1)}} \le e^{-cn}$$

が成立している。従って、

$$\left|\frac{\partial_a Q^n(a,1)}{\partial_x Q^n(a,1)}\right| \ge \frac{1}{4} - \sum_{i=2}^{N_0-1} 3^{-i} - \sum_{i=N_0}^{n} e^{-ci} \ge \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \sum_{i=N_0}^{\infty} e^{-ci} \ge \frac{1}{36}.$$

反対の不等式も同様に示される。■

§2．リヤプノフ数が正となるパラメータ集合Eの構成

次の順番に定数を定める.

1．c, c_0 s.t. $0 \le c \le c_0 \le \log 2$
2．$\alpha, \beta, \varepsilon$ s.t. $0 < \alpha < \beta$ and $\varepsilon > 0$ small

3. δ s.t. $\delta = \exp(-\Delta)$, $\Delta \in \mathrm{N}$
4. N_0 s.t. $N_0(c) < N_0$ (by Lemma 3)
   a_0 s.t. $a_0(\delta^2, c_0) < a_0$ (by Lemma 1)
   Ω, N s.t. $\Omega(\delta^2, c_0, a_0, N_0) \subset (a_0, 2)$ および N (by Lemma 2)

ただし、これらの定数は後で述べるLemmaおよびPropositionの証明のために取り直されるが、その時にもここであげた順番でその定数以前の定数のみによって決定されることに注意して欲しい。

Notaions

$\gamma_n(a) = Q_a^n(0)$.
$D_n(a) = (Q_a^n)'(1)$.
$I_r = (e^{-r}, e^{-r+1})$, $I_{-r} = I_r$, for $r \geq 1$.
$I_{r,1}, I_{r,2}, \cdots, I_{r,r^2}$: I_r を r^2 個に等分したもの.

Definitions

1. ν が a の return であるとは, $\gamma_\nu(a) \in (-\delta, \delta)$ が成立することである.
2. return ν に関する binding period とは次の binding condition (BC) を満たす区間 $[\nu+1, \nu+p]$ のうちで最大のものとする.

$$(\mathrm{BC}): \left|Q_a^{\nu+j}(0) - Q_a^j(0)\right| \leq e^{-\beta j} \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq p,$$

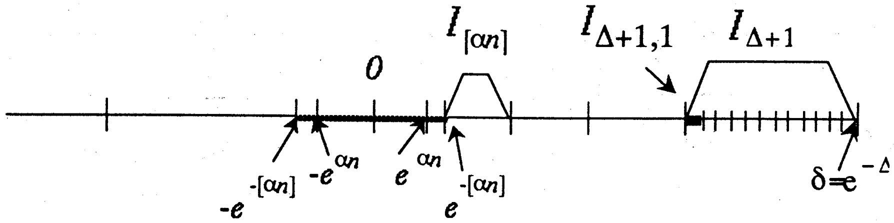
3. return ν が free であるとはそれ以前のどんな return の binding period にも入っていないこととする.

2-1 Basic Assumption $(\mathrm{BA})_n$ を満たすパラメータ集合の構成

次のBasic Assumptionを考える.

$$(\mathrm{BA})_n : \quad |\gamma_i(a)| \geq \exp(-\alpha i), \quad 1 \leq i \leq n$$

次のように $(\mathrm{BA})_n$ を満たす集合 F_n を帰納的に構成する。F_{n-1} が与えられたとき以下の条件にしたがって F_{n-1} の部分区間からなる細分 P_{n-1} を作り、F_n は P_{n-1} のうちで $(\mathrm{BA})_n$ を満たす部分区間の和として与える。$(F_n)_n$ は減少列であり, P_n はF_n の細分である. $F = \bigcap_n F_n$ とする.



1．$1\le n\le N-1$ に対しては，$\gamma_n(\Omega)\bigcap(-\delta,\delta)=\phi$ だから，$F_n=\Omega$ ，$P_n=\{\Omega\}$
i.e. trivial partition とする．

2．$n=N$ に対しては $\gamma_n(\Omega)=(-\delta,\delta)$ だから，
$F_n=F_{n-1}-\gamma_N^{-1}((-e^{-[\alpha N]},e^{-[\alpha N]}))$，$P_n=\{F_{n-1}\cap\gamma_N^{-1}(I_{r,i}):\Delta\le r\le[\alpha N],\ \ 1\le i\le r^2\}$
とする．

3．$n>N$，に対しては，$F_1,F_2,\cdots,F_{n-1},P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ が決まっているとして，
F_n,P_n を次に示したような帰納的構成方法で構成する．

帰納的構成方法

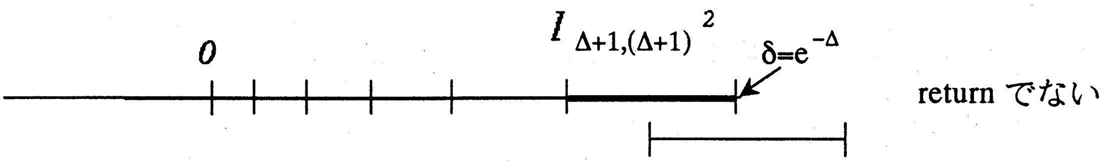
$a\in\omega$, $\omega\in P_{n-1}$, $\omega\subset F_{n-1}$ に対して，それ以前の free return

$$N=\nu_1(a)<\nu_2(a)<\cdots<\nu_s(a),\ \ s=s(a)$$

を考える．ω を次のいくつかの場合に応じて細分する．

[3-1: binding situation]
$\nu_s(a)+1\le n\le\nu_s(a)+p_s(a)$, for $\forall a\in\omega\in P_{n-1}$ の時（すなわち n がすべての a に対してbinding periodに属する時）にはω はそのまま変えない(i.e. $\omega\subset F_n$, $\omega\in P_n$)．

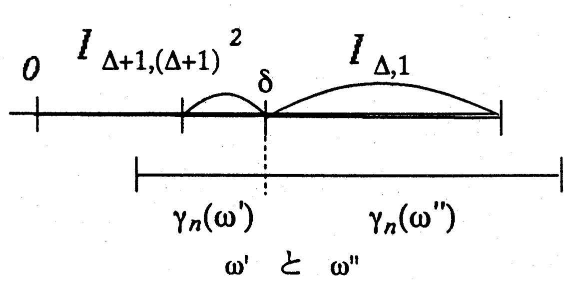
[3-2: return situation でないとき]
$\gamma_n(\omega)\cap(-\delta,\delta)=\phi$ 又は $\gamma_n(\omega)\cap(-\delta,\delta)$ が $I_{(\Delta+1),(\Delta+1)^2}$ を含まないときには a に対しては return と考えず，ω は分割しない．

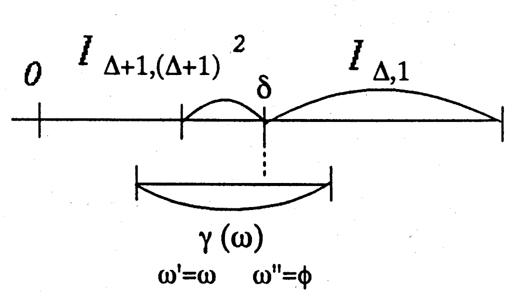


[3-3: return situation]
$\omega\in P_{n-1}$ が return situation の時には

$$\omega'=\omega\cap\gamma_n^{-1}((-\delta,\delta))\ ,\ \ \omega''=\omega\cap\gamma_n^{-1}((-\delta,\delta)^c)$$

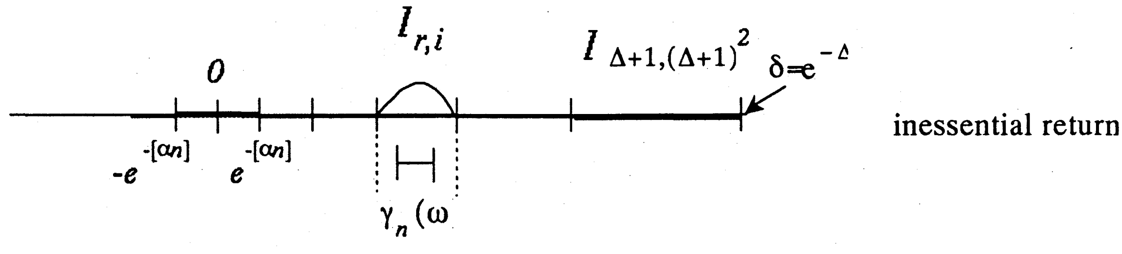
として次のように P_n, F_n を構成する。．但し $\gamma_n(\omega)\cap(-\delta,\delta)^c\subset I_{\pm\Delta,1}$ となるときは $\omega'=\omega$ ，$\omega''=\phi$ とする．





(3-3-1) $\omega'' \in P_n$
(3-3-2) $a \in \omega'$ については n はreturnである(i.e. $\nu_s(a) = n$). さらに これを essential return とinessential return とに区別する.

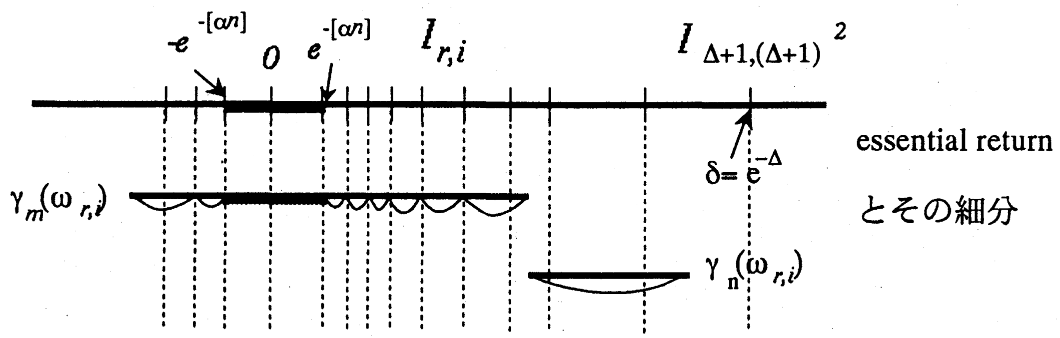
inessential return とは, $\gamma_n(\omega')$ がいかなる $I_{r,i}$ も含まないことである. この場合には ω' は分割しない. このとき $\omega'' = \phi$, また $\forall a \in \omega'$ は(BA)を満たすことが示される.



essential return とは, $\gamma_n(\omega')$ がある $I_{r,i}$ を含むことである. このときω' から (BA) を満たさないa (i.e.$a \in \omega' \cap \gamma_n^{-1}((-e^{-[\alpha n]}, e^{-[\alpha n]}))$) を取り除き, さらに $\gamma_n(\omega')$ が $(-e^{-[\alpha n]}, e^{-[\alpha n]})$ に隣り合う区間 $I_{[\alpha n],1}$, $I_{-[\alpha n],1}$ を完全に含まない場合その部分 $\gamma_n^{-1}(I_{-[\alpha n],1} \cup I_{[\alpha n],1})$ も取り除く。
分割 P_n は次のように与える。$\omega_{r,i} \in P_n$ とは

(i) $\gamma_n(\omega_{r,i}) \supset I_{r,i}$ かまたは (ii) $\gamma_n(\omega_{r,i}) \subset (I^l_{r,i} \cup I_{r,i} \cup I^r_{r,i})$

が成り立つ区間をいう。但し, $I^l_{r,i}$, $I^r_{r,i}$ は $I_{r,i}$ の左および右の区間とする. つまり$F_n \cap \omega' = \bigcup_{\omega_{r,i} \subset F_n} \omega_{r,i}$, $\omega_{r,i} = \gamma_n^{-1}(I_{r,i})$. ただし、$\gamma_n(\omega_{r,i})$ が完全に $I_{r,i}$ を 含まないときには $\omega_{r,i}$ はその右あるいは左隣の区間と一緒にするものとする。



次のLemmaを用意する.

Lemma 4（binding period の評価）

$$|\gamma_j(a)| \geq e^{-\alpha j} \quad \text{for} \quad 1 \leq {}^{\forall} j \leq n,\ (\mathrm{BA})_n$$

および

$$|D_j(a)| \geq e^{cj} \quad \text{for } 1 \leq {}^{\forall} j \leq n-1 \text{ (帰納法の仮定)}$$

が成立していると仮定する．$v \leq n$ を $a \in \Omega$ の retuern, p をv に付随したbinding period, rを$|r| > \Delta$で $\gamma_v(a) \in I_r$ となる番号とするとき次が成立する．

（1）α, β のみに依存する$\rho = \rho(\alpha,\beta)$，$0 < \rho < 1$ が存在し，すべての $\eta_1, \eta_2 \in [\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a)]$ に対し，

$$\rho^2 \leq \left|\frac{(Q_a^j)'(\eta_1)}{(Q_a^j)'(\eta_2)}\right| \leq \rho^{-2} \quad \text{for} \quad 1 \leq {}^{\forall} j \leq p,$$

特に

$$|(Q_a^j)'(\gamma_{v+1}(a))| \geq \rho e^{cj} \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq p\ .$$

（2）$p \in \left[\dfrac{|r|}{\log 4 + \rho}, \dfrac{3|r|}{c + \beta}\right]$

（3）$|(Q_a^{p+1})'(\gamma_v(a))| \geq \tau \exp(\dfrac{c-\beta}{2}(p+1)) \geq 2(36)^2$,

但し τ はα,β と c にのみ依存する定数：$\tau = \tau(\alpha,\beta,c)$．

証明）(1)v はa に対するreturn であるので、$\gamma_v(a) \in I_r$，$r > \Delta$ とし、p を対応するbinding period とする。

まず、i を$1 \leq i \leq p$ とし、$0 \leq k \leq i-1$ なるすべてのk に対して

$$Q^k : [\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a)] \to [\gamma_{v+k+1}(a), \gamma_{k+1}(a)]$$

が単調であることを仮定してiに対して(1)が成立することを導く。$\eta \in [\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a)]$ とすると、

$$\left|\frac{(Q_a^i)'(\eta)}{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}\right| = \prod_{i=0}^{i-1}\left|\frac{Q_a'(\eta_i)}{Q_a'(\gamma_{i+1})}\right| = \prod_{i=0}^{i-1}\left|1 + \frac{Q_a'(\eta_i) - Q_a'(\gamma_{i+1})}{Q_a'(\gamma_{i+1})}\right|$$
$$\leq \prod_{i=0}^{i-1}\left|1 + \frac{|Q_a'(\eta_i) - Q_a'(\gamma_{i+1})|}{|Q_a'(\gamma_{i+1})|}\right|.$$

ここで $\eta_i = Q_a^i(\eta)$，$\gamma_{i+1} = Q_a^{i+1}(0)$ である。また、

$$\sum_{i=0}^{i-1}\frac{|Q_a'(\eta_i) - Q_a'(\gamma_{i+1})|}{|Q_a'(\gamma_{i+1})|} = \sum_{i=0}^{i-1}\frac{2a|\eta_i - \gamma_{i+1}|}{2a|\gamma_{i+1}|} = \sum_{i=0}^{i-1}\frac{|\eta_i - \gamma_{i+1}|}{|\gamma_{i+1}|}$$

である。ここで、Basic assumption $(BA)_{i+1}$ より、$0 \leq i+1 \leq j$ なる$i+1$ に対して、$|\gamma_{i+1}| \geq e^{-\alpha(i+1)}$ また、

$$\begin{aligned}|\eta_i - \gamma_{i+1}| &= |Q_a^i(\eta) - Q_a^i(\gamma_1(a))| \\ &\le |Q_a^i(\gamma_{v+1}(a)) - Q_a^i(\gamma_1(a))| \quad (\because Q_a\text{: monotone}) \\ &\le |\gamma_{v+i+1}(a) - \gamma_{i+1}(a)| \le e^{-\beta(i+1)} \quad (\because i+1\text{: } v \text{ のbinding periodに属する。})\end{aligned}$$

である。従って $\alpha < \beta$ に注意して、

$$\sum_{i=0}^{i-1} \frac{|\eta_i - \gamma_{i+1}|}{|\gamma_{i+1}|} \le \sum_{i=0}^{i-1} \frac{e^{-\beta(i+1)}}{e^{-\alpha(i+1)}} = \sum_{i=0}^{i-1} e^{(\alpha-\beta)(i+1)} < a_1(\alpha,\beta)$$

より

$$\left|\frac{(Q_a^i)'(\eta)}{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}\right| \le \rho_1^{-1}\text{, ただし、} \rho_1 = e^{-a_1}$$

が従う。i ($1 \le i \le p$) に対する逆の不等式も同様に示すことができ、結局、この i について、

$$\rho \le \left|\frac{(Q_a^i)'(\eta)}{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}\right| \le \rho^{-1}$$

が示されたことになる。このことから特に、$\eta \in (\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a))$ に対して、$|(Q_a^i)'(\eta)| > 0$ であるから、$Q_a^i: [\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a)] \to [\gamma_{v+i+1}(a), \gamma_{i+1}(a)]$ が単調であることが従い、induction が使えて、すべての i ($1 \le i \le p$) に対して、

$$(※) \qquad \rho \le \left|\frac{(Q_a^i)'(\eta)}{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}\right| \le \rho^{-1} \quad \text{for} \quad \eta \in (\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a))$$

がいえる。

に対しては、

$$\rho^2 \le \left|\frac{(Q_a^i)'(\eta_1)}{(Q_a^i)'(\eta_2)}\right| = \left|\frac{(Q_a^i)'(\eta_1)}{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}\right| \left|\frac{(Q_a^i)'(\gamma_1(a))}{(Q_a^i)'(\eta_2)}\right| \le \rho^{-2}.$$

特に、(※) で $\eta = \gamma_{v+1}(a)$ ととって $1 \le i \le p$ に対して、

$$|(Q_a^i)'(\gamma_{v+1}(a))| > \rho(Q_a^i)'(\gamma_1(a)) = \rho D_i(a) \ge \rho e^{cj}$$

が従う。

(2) (1) より、ある $\eta \in [\gamma_{v+1}(a), \gamma_1(a)]$ があって、

$$\begin{aligned}|\gamma_{v+i+1}(a) - \gamma_{i+1}(a)| &= |(Q_a^i)'(\eta)||\gamma_{v+1}(a) - \gamma_1(a)| \\ &= |(Q_a^i)'(\eta)|a|\gamma_v(a)|^2 > \rho D_i(a)\cdot a \cdot |\gamma_v(a)|^2 > \rho e^{cj}\cdot a \cdot e^{-2|r|}.\end{aligned}$$

もし、$i > \dfrac{2|r| - \log(a\rho)}{c+\beta}$ なら $\rho e^{cj}\cdot a \cdot e^{-2|r|} > e^{-\beta i}$.よって、

$$p \le \frac{2|r| - \log(a\rho)}{c+\beta},$$

$\Delta > -\log(a\rho(\alpha,\beta))$ となるように十分大きい Δ をとって,

$$\leq \frac{3|r|}{c+\beta} ,$$

(BA) より、$\alpha n > \alpha\nu > |r|$ であるから、

$$\leq \frac{3\alpha n}{c+\beta}.$$

もし、$\dfrac{3\alpha}{c+\beta} \leq \dfrac{1}{2}$ となるように定数を選んでおけば、

$$\leq \frac{n}{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
|\gamma_{\nu+j+1}(a) - \gamma_{j+1}(a)| &= |(Q_a^j)'(\eta)||\gamma_{\nu+1}(a) - \gamma_1(a)| \\
&\leq 4^j a|\gamma_\nu(a)|^2 \quad (\because |(Q_a^j)'(\eta)| \leq 4^j) \\
&\leq 4^j a[e^{-(|r|-1)}]^2 = 4^j ae^2e^{-2|r|}
\end{aligned}$$

であるから、もし $j \leq \dfrac{2|r| - \log a - 2}{\log 4 + \beta}$ とすると、上式 $\leq e^{-\beta j}$ となることから、

$$p \geq \frac{2|r| - \log a - 2}{\log 4 + \beta} ,$$

$\Delta \geq \log a + 2$ となる十分大きな Δ をとっておけば、$r > \Delta$ より、

$$p \geq \frac{|r|}{\log 4 + \beta}$$

となる。

(3)
$$\begin{aligned}
|(Q_a^{p+1})'(\gamma_\nu(a))| &= |(Q_a^p)'(\gamma_{\nu+1}(a))|\cdot 2a|\gamma_\nu(a)| \\
&= [4a\cdot\rho|(Q_a^p)'(\gamma_{\nu+1}(a))|^2\cdot a|\gamma_\nu(a)|^2]^{1/2} \\
&\geq [4a\cdot\rho|D_p(a)|\cdot\rho^2|(Q_a^p)'(\eta)||\gamma_{\nu+1}(a) - \gamma_1(a)|]^{1/2} \\
&\geq [4a\rho^3\cdot e^{c\rho}|\gamma_{\nu+p+1}(a) - \gamma_{p+1}(a)|]^{1/2} \\
&\geq [4a\rho^3\cdot e^{c\rho}\cdot e^{-\beta(p+1)\rho}]^{1/2} \\
&\geq (4a\rho^3e^c)^{1/2}\cdot e^{\frac{c-\beta}{2}(p+1)} = \tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p+1)}.
\end{aligned}$$

$a > 1$ としておけば、$\tau = \tau(c,\rho(\alpha,\beta))$ である。p を十分大きくとれば、

$$\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p+1)} \geq 2\cdot(36)^2.$$

このためには、(2) から $(r>)\Delta$ を十分大きくとっておけばよい。 ■

Remark 1 このLemmaは次のことを意味する。critical point 0 の軌道が 0 付近に戻るとそこでの微分は 0 に近いためリアプノフ数は大きく失われることになるが、条件$(BA)_n$があればその後のbinding period の間で回復でき、区間の長さは $2(36)^2$ 倍ほどにはなることがいえる。

Remark 2 bind されたままreturn するときは、(BA) はいつも満たされる。

∵) $a \in \omega$ に対して$v_s(a)$ をn の直前の free returnとし、$p_s(a)$ をそのbinding period とする。i.e. $v_s(a)+1 \le n = v_s(a)+j \le v_s(a)+p_s(a)$. $v_s(a)=v$ と書く。j が binding period に属していることから、

$$\left|Q_a^j(0)\right| - \left|Q_a^{v+j}(0)\right| \le \left|Q_a^{v+j}(0) - Q_a^j(0)\right| \le e^{-\beta j} .$$

また、j に関しては帰納法の仮定から$(BA)_j$ が満たされていることから、$\left|Q_a^j(0)\right| \ge e^{-\alpha j}$ が成立する。$n = v_s(a)+j$ だから、

$$\left|Q_a^n(0)\right| \ge \left|Q_a^j(0)\right| - e^{-\beta j} \ge e^{-\alpha j} - e^{-\beta j} = e^{-\alpha j}(1-e^{-(\beta-\alpha)j}) \ge e^{-\alpha j}(1-e^{-(\beta-\alpha)}) ,$$

$N = N(\alpha,\beta)$ を十分大きくとっておけば、

$$e^{-\alpha(n-j)} = e^{-\alpha v} \le e^{-\alpha N} \le 1-e^{-(\beta-\alpha)}$$

とでき、$\left|Q_a^n(0)\right| \ge e^{-\alpha n}$ が従う。 ■

Remark 3 inessential return のときも(BA) はいつも満たされる。すなわち次が成り立つ。
$\omega \subset F_{n-1}$,$\omega \in P_{n-1}$,n:inessential return とし、$\left|D_j(a)\right| \ge e^{cj}$,$0 \le j \le n-1$,$a \in \omega$ が成り立っているとき、$a \in \omega$ に対し、$(BA)_n$ が成り立つ。

証明） （＊）$l(\gamma_n(\omega)) \ge 2e^{-[\alpha n]+1}$ を示せばよい。
1° n の直前のreturn v_0 が essential return のとき、p_0 をv_0 の binding period とすると、

$$l(\gamma_n(\omega)) \ge l(\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega)) .$$

（∵ $\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega) \notin (-\delta,\delta)$ のときはLemma 1より、$\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega) \in (-\delta,\delta)$ のときは $n = v_0+p_0+1$ であることから従う。）$\varphi: \gamma_{v_0}(t) \to \gamma_{v_0+p_0+1}(t)$ とすると、$\exists t$ s.t.

$$\begin{aligned}
l(\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega)) &= \left|\varphi'(\gamma_{v_0}(t))\right| l(\gamma_{v_0}(\omega)) = \left|\frac{\gamma'_{v_0+p_0+1}(t)}{\gamma'_{v_0}(t)}\right| l(\gamma_{v_0}(\omega)) \\
&= \frac{1}{36^2}\left|\frac{D_{v_0+p_0}(t)}{D_{v_0-1}(t)}\right| l(\gamma_{v_0}(\omega)) = \frac{1}{36^2}\left|(Q_a^{p_0+1})'(\gamma_{v_0}(\omega))\right| l(\gamma_{v_0}(\omega)) \\
&\ge \frac{1}{36^2}\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} l(\gamma_{v_0}(\omega)) \ge \frac{1}{36^2}\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} \frac{e^{-|r|}}{r^2}(e-1) \\
&\ge \frac{1}{36^2}\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} \frac{e^{-|r|}}{r^2} .
\end{aligned}$$

従って、$\frac{1}{36^2}\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} \frac{e^{-|r|}}{r^2} \ge 2e^{-[\alpha n]+1}$ から（＊）が従うが、

$|r| < [\alpha v_0] < [\alpha n]$ であるから $e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} \geq 2e\frac{36^2}{\tau}r^2$ すなわち $p_0+1 \geq \frac{2}{c-\beta}\log(\frac{2e36^2}{\tau}r^2)$ であればよいことになる。Lemma 4 (2) から Δ を十分大きくとれば

$$p_0+1 \geq \frac{|r|}{\log 4+\beta} \geq \frac{2}{c-\beta}\log(\frac{2e36^2}{\tau}r^2)$$

が、$\forall r > \Delta$ に対して成立することになる。■

Lemma 1 と Lemma4 を使うと次の評価が得られる。

Lemma $\forall a\in\omega$, $|D_j(a)| \geq e^{cj}$ for $1 \leq {}^\forall j \leq n-1$ を満たす $\omega \in P_{n-1}$ の任意の2つの元 a,b に対して、

$$\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)}|\gamma_{v_0}(b)-\gamma_{v_0}(a)| \leq |\gamma_{v_0+p_0+1}(b)-\gamma_{v_0+p_0+1}(a)|$$

$$\leq 36^2 e^{-c_0(v_1-v_0-p_0-1)}|\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)|\ .$$

ただし v_0, v_1 は n の直前の引き続いた2つの return とする。(i.e. $v_0 < v_1 \leq n$)
また、Δ を充分大きくとれば、$2|\gamma_{v_0}(b)-\gamma_{v_0}(a)| \leq |\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)|$ が示される。

証明) 写像 φ を $\varphi:\gamma_{v_0+p_0+1}((a,b)) \to \gamma_{v_1}((a,b))$, $\gamma_{v_0+p_0+1}(t) \mapsto \gamma_{v_1}(t)$ で定義すると、ある $t\in(a,b)$ が存在して、

$$|\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)| = |\varphi'(\gamma_{v_0+p_0+1}(t))|\cdot|\gamma_{v_0+p_0+1}(b)-\gamma_{v_0+p_0+1}(a)|\ .$$

また Lemmas 1 and 3から、

$$|\varphi'(\gamma_{v_0+p_0+1}(t))| = \left|\frac{\gamma'_{v_1}(t)}{\gamma'_{v_0+p_0+1}(t)}\right| \geq \frac{1}{36^2}\left|\frac{D_{v_1-1}(t)}{D_{v_0+p_0}(t)}\right|$$

$$= \frac{1}{36^2}|(Q^{v_1-v_0-p_0-1})'(\gamma_{v_0+p_0+1}(t))| \geq \frac{1}{36^2}e^{c_0(v_1-v_0-p_0-1)}.$$

(ただし、ここでLemma 1 は $\gamma_{v_1}(t)\in(-\delta,\delta)$ の時は使えるが $\gamma_{v_1}(t)\notin(-\delta,\delta)$ の時はそのままでは使えない。しかしLemma 1 からこの場合にも

$$|(Q^{v_1-v_0-p_0-1})'(\gamma_{v_0+p_0+1}(t))| \geq \tilde{\rho}\, e^{c_0(v_1-v_0-p_0-1)}$$

となることがいえ上式の評価が得られる。ここで $\tilde{\rho}$ は δ によらない定数である。)
従って、

$$|\gamma_{v_0+p_0+1}(b)-\gamma_{v_0+p_0+1}(a)| \leq 36^2 e^{-c_0(v_1-v_0-p_0-1)}|\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)|$$

また、Lemma 4より、

$$\tau e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)}\left|\gamma_{v_0}(b)-\gamma_{v_0}(a)\right|\le\left|\gamma_{v_0+p_0+1}(b)-\gamma_{v_0+p_0+1}(a)\right|$$

である。上の２つの不等式から、

$$\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)}\left|\gamma_{v_0}(b)-\gamma_{v_0}(a)\right|\le\left|\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)\right| .$$

Δ を十分大きくとれば、Lemma 4 (ii) より、$2\left|\gamma_{v_0}(b)-\gamma_{v_0}(a)\right|\le\left|\gamma_{v_1}(b)-\gamma_{v_1}(a)\right|$ が従う。■

次のProposition によって、P_{n-1}の partition ω に属する a,bについては微分は（x-微分，a-微分とも）一様であることがわかる。また、同じ partition に属するパラメータについてその critical point の軌道はほぼ同じ振る舞いをする。このために binding period を partition ω に対して、次のように定義しても $a\in\omega$ 対しては、Lemma 4 は変更なく成り立つことがわかる。

Definition

partition ω に対する binding period を次のように定義する:

$$\bar{p}(\omega)=\min_{a\in\omega}p(a) .$$

Proposition 1（微分の一様性）

次のような定数 $A=A(\alpha,\beta,c,\delta^2)$ が存在して，$\omega\in P_{n-1}$ かつ

$$|D_i(a)|\ge e^{cj}\ \text{for}\ 1\le{}^{\forall}j\le n-1\ \text{and}\ a\in\omega$$

が成り立つならば、すべての $a,b\in\omega$，$1\le k+1\le n$ に対して次が成立する：

$$(1)\quad\left|\frac{D_k(b)}{D_k(a)}\right|\le A,\qquad\text{and}\qquad(2)\quad\left|\frac{\gamma_{k+1}'(b)}{\gamma_{k+1}'(a)}\right|\le A .$$

証明） Lemma 3 を使えば、(2) は(1) から証明される。よって、(1)を証明する。

$$\frac{|D_k(b)|}{|D_k(a)|}=\prod_{i=1}^{k}\left|\frac{-2b\gamma_i(b)}{-2b\gamma_i(a)}\right|=\left(\frac{b}{a}\right)^k\prod_{i=1}^{k}\left|\frac{\gamma_i(b)}{\gamma_i(a)}\right| .$$

$\left(\frac{b}{a}\right)^k$ は定数 c にのみ依存する定数 $a_1(c)$ でおさえられる。i.e. $\left(\frac{b}{a}\right)^k\le a_1(c)$. なぜなら、$\gamma_{k-1}$ は $\omega\in P_{n-1}$ で単調であるので、

$$1\ge l(\gamma_k(\omega))=|\gamma_k'(t)|\cdot l(\omega)\ge\frac{1}{36}|D_{k-1}(t)|\cdot l(\omega)\ge\frac{1}{36}e^{c(k-1)}l(\omega)$$

であるので、$l(\omega)\le 36e^{-c(k-1)}$. よって、

$$\left(\frac{b}{a}\right)^k = \left(1+\frac{b-a}{a}\right)^k = (1+36e^{-c(k-1)})^k \le a_1(c)$$

である。

　このことから、

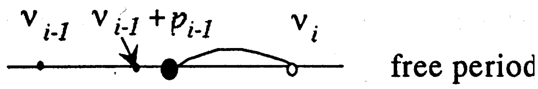
$$\prod_{j=1}^{k}\left|\frac{\gamma_{k-1}(b)}{\gamma_j(a)}\right| \le \prod_{j=1}^{k}\left|1+\left|\frac{\gamma_{k-1}(b)-\gamma_j(a)}{\gamma_j(a)}\right|\right|$$

が有界であることを示せばよいが、このためには、

（※１）　　$S = \sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\gamma_{k-1}(b)-\gamma_j(a)}{\gamma_j(a)}\right|$ が有界

を示せば十分である。

　$N = \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_s \le k$ をω に対する free return の列とし、$p_1, p_2, \cdots, p_s$ をそれに付随した ω の binding period とする。Sを次の３つの場合に分けて評価する。



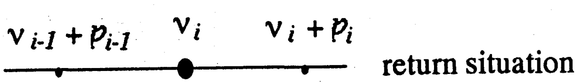
1. free period $\nu_{i-1}+p_{i-1} < j < \nu_i$ のあいだの部分和

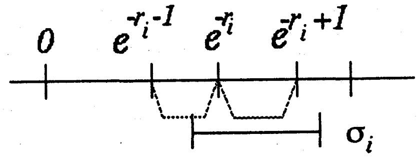
$$F_i = \sum_{j=\nu_{i-1}+p_{i-1}+1}^{\nu_i-1}\left|\frac{\gamma_j(b)-\gamma_j(a)}{\gamma_j(a)}\right|$$

の評価については、前に書いたremark により$|\gamma_j(b)-\gamma_j(a)| \le 36^2 e^{-c_0(\nu_i-j)} l(\sigma_i)$. また j は free period に属することから、

$$F_i \le \sum_{j=\nu_{i-1}+p_{i-1}+1}^{\nu_i-1}\frac{36^2 e^{-c_0(\nu_i-j)} l(\sigma_i)}{\delta} \le 36^2\frac{l(I_{r_i})}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-c_0 j}\frac{l(\sigma_i)}{l(I_{r_i})} \le a_2\frac{l(\sigma_i)}{l(I_{r,i})},$$

ここで $a_2 = 36^2\frac{l(I_{r_i})}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-c_0 j} = a_2(c)$ である。





2. return のところは

$$\left|\frac{\gamma_{\nu_i}(b)-\gamma_{\nu_i}(a)}{\gamma_{\nu_i}(a)}\right| \le \frac{l(\sigma_i)}{e^{-|r_i|-1}} \le a_3 \frac{l(\sigma_i)}{l(I_{r_i})},$$

ただし、$a_3 = e(e-1)$ である。

binding period

3. binding period $\nu_i + 1 \le j \le \nu_i + p_i$ の間の部分和

$$B_i = \sum_{i=1}^{p_i} \left|\frac{\gamma_{\nu_i+i}(b)-\gamma_{\nu_i+i}(a)}{\gamma_{\nu_i+i}(a)}\right|$$

については、j が binding period に属することから、$\left|\gamma_{\nu_i+i}(a)-\gamma_i(a)\right| \le e^{-\beta i}$, また、Basic assumption より $\left|\gamma_i(a)\right| \le e^{-\alpha i}$ が成り立つ。このことより、$\left|\gamma_{\nu_i+i}(a)\right| \ge a_4 e^{-\alpha i}$, ただし、$a_4 = 1-e^{(\alpha-\beta)}$である。また、$\varphi_i : \gamma_{\nu_i}(t) \mapsto \gamma_{\nu_i+i}(t)$ とすると、ある $t \in (a,b)$ があって、

$$\left|\gamma_{\nu_i+i}(b)-\gamma_{\nu_i+i}(a)\right| = \left|\varphi_i'(\gamma_{\nu_i}(t))\right|\left|\gamma_{\nu_i}(b)-\gamma_{\nu_i}(a)\right|,$$

従って、

(i)
$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\nu_i+i}(b)-\gamma_{\nu_i+i}(a)\right| &\le 36^2\left|(f_t^i)'(\gamma_{\nu_i}(t))\right|\cdot\left|\gamma_{\nu_i}(b)-\gamma_{\nu_i}(a)\right| \\ &\le 36^2\cdot 2t\left|\gamma_{\nu_i}(t)\right|\left|(f_t^{i-1})'(\gamma_{\nu_i+1}(t))\right|\cdot l(\sigma_i)\end{aligned}$$

(ii)
$$\left|\gamma_{\nu_i+i}(t)-\gamma_i(t)\right| = \left|(f_t^{i-1})'(\theta)\right|\cdot\left|\gamma_{\nu_i+1}(t)-\gamma_1(t)\right|$$

$$\ge \rho^2\left|(f_t^{i-1})'(\gamma_{\nu_i+1}(t))\right|\cdot t\cdot\left|\gamma_{\nu_i}(t)\right|^2 \quad (\because \text{Lemma 4})$$

$$\ge \frac{\rho^2}{2a_3}\left|(f_t^{i-1})'(\gamma_{\nu_i+1}(t))\right|\cdot 2t\cdot\left|\gamma_{\nu_i}(t)\right|\cdot l(I_{r_i})$$

$$\left(\because \left|\gamma_{\nu_i}(t)\right| \ge e^{-|r_i|-1} \ge \frac{l(I_{r_i})}{a_3}\right)$$

(i) (ii) と(BC)から、

$\gamma_{\nu_i+i}(b)-\gamma_{\nu_i}$

である。Lemma4 (Remark 2) より $l(\sigma_{i+1}) \geq 2l(\sigma_i)$ となり、$i(r) = \max\{i : |r_i| = r\}$ として、

$$\sum_1^s \frac{l(\sigma_i)}{l(I_{r_i})} \leq \sum_{r>\Delta} \frac{2l(\sigma_{i(r)})}{l(I_{r_i})} \leq 2\sum_{r>\Delta} \frac{1}{r^2} < \infty$$

が得られる。 ■

Remark 4 $n-1$ までの free return を $N = \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{\bar{s}} \leq n-1$ とすると、以上の証明で（特に free period の評価について）$1 \leq k \leq \nu_{\bar{s}} + p_{\bar{s}}$ のときは $l(I_{r_i}) < \delta$ であるから a_2 は c にしかよらないが、$k \geq \nu_{\bar{s}} + p_{\bar{s}} + 1$ のときには $\nu_{\bar{s}+1} \geq n$ となるために $(-\delta,\delta)$ 内のある区間に return するとは限らず、同様の方法では、$a_2 = \dfrac{36^2}{\delta}$ と少し悪い評価しか得られない。このため Proposition 1 の A は $1 \leq k \leq \nu_{\bar{s}} + p_{\bar{s}}$ では δ によらず（i.e. $A(\alpha,\beta,c)$），$\nu_{\bar{s}} + p_{\bar{s}} + 1 \leq k \leq n-1$ では $A(\alpha,\beta,c,\delta) \approx \dfrac{1}{\delta}$ となる。

2-2. Eの構成：(2)　escape period

F_n は(BA)を満たすパラメータ集合であるが，その上で Lyapunov 指数が正になる（i.e. $|D_n(a)| \geq e^{cn}$）とは必ずしもいえない．そこでさらに部分集合 $E_n \subset F$ を構成し，Lyapunov 指数の条件が成り立つようにする．

$\{E_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を構成する．$n \leq N-1$ に対しては $E_n = F_n = \Omega$ とし，$n \geq N$ に対しては $E_1, E_2, \cdots E_{n-1}$ まで構成されたとして $E_n \subset (E_{n-1} \cap F_n)$ を P_n のpartition のいくつかの区間の和として帰納的に構成する．この構成法のアイデア は n までの binding period が $(1-\varepsilon)n$ 以上になるパラメータを取り除くことによって，$|D_n(a)| \geq e^{c_0(1-\varepsilon)n} \geq e^{cn}$ をみたすパラメータのみを拾いだすものである．よって ε は $\varepsilon \leq 1 - c/c_0$ であるように，選んでおけばよい．

帰納的構成方法

$\omega \in P_n$, s.t. $\omega \subset F_n$ に対して次のような列を考える：

$$N = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_s \leq n, \quad \Omega = \omega_0 \supset \omega_1 \supset \cdots \supset \omega_s = \omega$$

ただし　$1 \leq i \leq s$　として ν_i を ν_{i-1} の直後の ω_{i-1} のessential free return, ω_i を $\omega \subset \omega_i \subset \omega_{i-1}$ であるような P_{ν_i} の区間とする．

Definitions

1. ν_i が ω の <u>escape situation</u> とは、$l(\gamma_{\nu_i}(\omega_{i-1})) \ge \dfrac{(e-1)\delta}{e(\Delta+1)^2} = l(I_{\Delta+1,1})$ が成立することである。

2. ω の <u>escape period</u> $[\nu_i,\nu_k)$ とは、ν_i が escape situation でかつ ω_i が escape component に含まれ $|Q_a^j(0)| \ge \delta^2$, for $\forall j \in [\nu_i,\nu_k)$, for $\forall a \in \omega$ が満たされる最大の区間のことである。

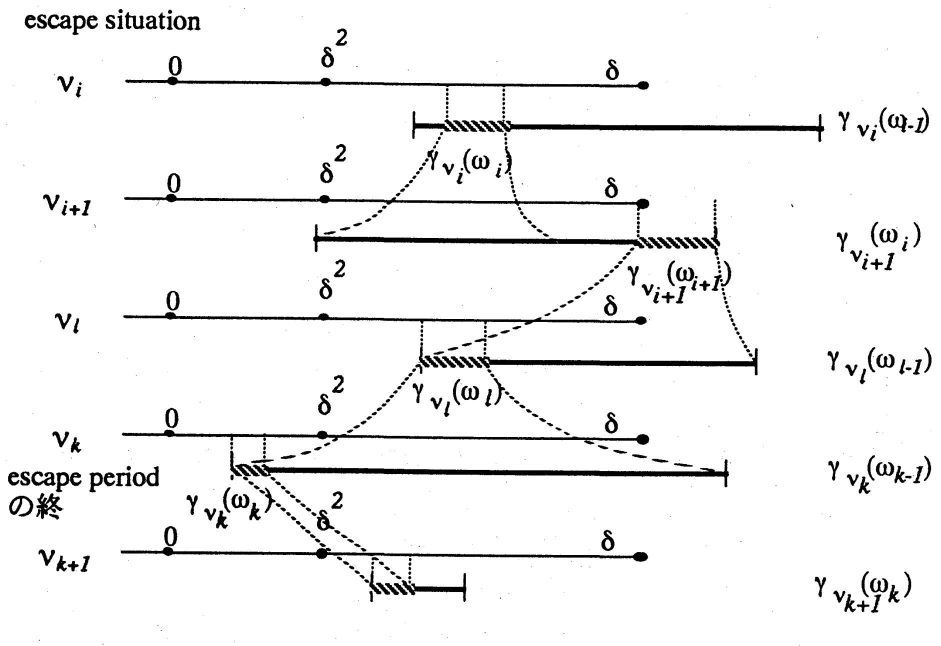
3. n までの essential free return の列が次の様なescape period :

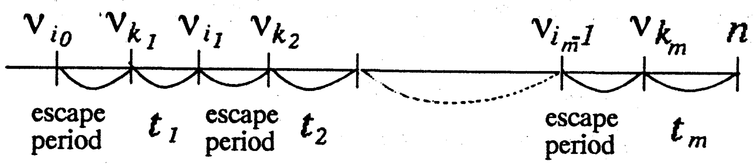
$$[\nu_{i_0},\nu_{k_1}),[\nu_{i_1},\nu_{k_2}),\cdots,[\nu_{i_{m-1}},\nu_{k_m})$$

を持つとき escape period にはいっていない total time を $T_n(\omega)$ とかく。

i.e. $T_n(\omega) = t_1 + t_2 + \cdots + t_m \quad (m = m(\omega))$

s.t. $t_j = \nu_{i_j} - \nu_{k_j}$ for $j = 1,2,\cdots,m-1$ $\quad t_m = n - \nu_{k_m}$





次の仮定

$$(FA)_n:\ T_n(\omega)\le \varepsilon n$$

をみたさないパラメータの集合 ω_n を F_n から取り除き E_n とする（i.e.$E_n = E_{n-1}\cap F_n - \omega$）。その結果、すべての $a\in E_n$ に対し、$|D_n(a)|\ge e^{cn}$ が成立することがわかる。

証明）$a\in\omega\subset E_n$ とする。まず、escape period の間に内にinessential return はおこらないことを注意しておく。

(i) n が a に対するreturn のとき、Lemma 1, Lemma4(3) および $(BA)_n$ より、

$$|D_n(a)|\ge e^{c_0(n-T_n(\omega))}\cdot e^{-\alpha n}\ge e^{c_0(1-\varepsilon)n}\cdot e^{-\alpha n} = e^{c_0(1-\varepsilon-\alpha)n}.$$

よって、$\varepsilon(c,c_0)$,$\alpha(c,c_0)$ を $c_0(1-\varepsilon-\alpha)>c$ となるように小さく選べば、

$$|D_n(a)|\ge e^{cn}$$

が導かれる。

(ii) n が binding period に属するとき、Lemma 1と Lemma 4(1) より、$|D_n(a)|\ge e^{c_0(n-T_n(\omega))}\cdot\rho\cdot e^{c(n-\nu_{k_m})}\ge e^{c_0(1-\varepsilon)n}\cdot\rho$. 従って、ε を $c_0(1-2\varepsilon)>c$ となるように小さく選び、N を十分大きく選び、$\rho>e^{-c_0N\varepsilon}$ とすると、$|D_n(a)|\ge e^{c_0(1-2\varepsilon)n}\ge e^{cn}$ が導かれる。

(iii) n がfree period に属するとき、Lemma 4、Lemma 1およびその後の注意と $(BA)_n$ より、δ を十分小さくとれば、

$$|D_n(a)|\ge e^{c_0(n-T_n(\omega))}\cdot e^{-\alpha\nu_{k_m}}\cdot e^{c_0(n-\nu_{k_m})}\ge e^{c_0(1-\varepsilon)n}\ge e^{cn}$$

がいえる。

§3. (BA)によって取り除かれた部分のmeasureの評価について

<u>**Proposition 3**</u> $n>N$, $\omega_{n-1}\subset F_{n-1}\cap E_{n-1}$, $\omega_{n-1}\in P_{n-1}$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\frac{l(\omega_{n-1}-F_n)}{l(\omega_{n-1})}\le B\exp(-\frac{1}{10}\alpha n)$$

ここで $F_n = E_{n-1}-\gamma_n^{-1}((-e^{-[\alpha n]+1},e^{-[\alpha n]+1}))$ であり、B は α,β,c,δ のみによる定数 $B=B(\alpha,\beta,c,\delta)$ である．

証明）まず、$a\in\omega_{n-1}$ に対してBasic assumption および、帰納法の仮定から、

$$|\gamma_j(a)|\ge e^{-\alpha j},\quad \text{for}\ \ 1\le j\le n-1$$
$$|D_j(a)|\ge e^{cj},\quad \text{for}\ \ 0\le j\le n-1$$

が成り立つことを注意しておく。

平均値の定理から、ある $a_1, a_2 \in \omega_{n-1}$ があって、

$$\frac{l(\omega_{n-1}-F_n)}{l(\omega_{n-1})} \le \frac{\left|\gamma_n'(a_1)\right|}{\left|\gamma_n'(a_2)\right|} \cdot \frac{2e^{-[\alpha n]+1}}{l(\Omega_{n-1})} .$$

ここで、$\Omega_{n-1} = \gamma_n(\omega_{n-1})$ である。Proposotion 1より、

$$\frac{l(\omega_{n-1}-F_n)}{l(\omega_{n-1})} \le A\frac{2e^{-[\alpha n]+1}}{l(\Omega_{n-1})} .$$

また v_0 を n の直前のessential return, p_0 を v_0 に付随したbinding period とすると、Lemma1 より、

$$l(\Omega_{n-1}) = l(\gamma_n(\omega_{n-1})) \ge l(\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega_{n-1}))$$

である。v_0 はessential returnであるので区間 $I_{r,i}$ を含むとすると、Lemma 4より

$$l(\gamma_{v_0+p_0+1}(\omega_{n-1})) \ge \frac{\tau}{36^2} e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)} \frac{e^{-|r|}(e-1)}{r^2}$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{l(\omega_{n-1}-F_n)}{l(\omega_{n-1})} \le A\frac{2e^{-[\alpha n]+1}}{l(\Omega_{n-1})} \le A\frac{2e^{-[\alpha n]+1}}{\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(p_0+1)}} \cdot r^2 e^{-|r|}(e-1) \le 2A\frac{36^2}{\tau}e^2 e^{-\alpha n}\frac{r^2 e^{|r|}}{e^{\frac{c-\beta}{2}p_0}} ,$$

$B = 2A\dfrac{36^2}{\tau}e^2$ と置くと、

$$\le Be^{-\alpha n}\frac{r^2 e^{|r|}}{e^{\frac{c-\beta}{2}\cdot\frac{|r|}{\log 4+\beta}}} \quad (\because \text{Lemma4}) \quad \le Be^{-\alpha n}(\alpha n)^2\frac{e^{|r|}}{e^{\frac{c-\beta}{2}\cdot\frac{|r|}{\log 4+\beta}}} \quad (\because r \le \alpha n\ )$$

$$\le Be^{-\alpha n}(\alpha n)^2 e^{(1-\frac{c-\beta}{2(\log 4+\beta)})|r|} ,$$

$c > \frac{21}{25}\log 2$, $\beta < \frac{1}{35}\log 2$ であれば、 $\dfrac{c-\beta}{2(\log 4+\beta)} \ge \dfrac{1}{5}$ が成り立ち、上式は、

$$\le Be^{-\alpha n}(\alpha n)^2 e^{\frac{4}{5}\alpha n} \le Be^{-\frac{1}{5}\alpha n}(\alpha n)^2$$

α に応じて、十分大きな N をとっておけば、$n \ge N$ に対して、

$$\le Be^{-\frac{1}{10}\alpha n}$$

と評価される。 ■

remark　Lemma 4を使うためには、$j=n$ に対しても、$|D_j(a)| \ge e^{cj}$ が成立している必要があるが、から取り除かれる集合がある場合は、n はbindされていないreturn であ

るから、$p_0+\nu_0<n$ となり,$|D_j(a)|\geq e^{cj}$, for $0\leq j\leq n-1$だけでLemma 4 の結論は導かれる。

§4. Eのmeasure の評価のための３つのLemma

$m(E)>0$を示すために３つのLemmaを述べる.

Lemma 5

$r_i>\Delta$, $1\leq t_i\leq r_i^2$ に対して $\gamma_{\nu_i}(\omega_i)\supset I_{r_i,t_i}$ であるとすると

$$(\nu_{i+1}-\nu_i)\leq 10|r_i|$$

が成り立つ.

証明）$\nu_i=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_\kappa=\nu_{i+1}$ をとの間の inessential return とする。
φ_{μ_l} を $\varphi_{\mu_l}:\gamma_{\mu_l}(\theta)\mapsto\gamma_{\mu_{l+1}}(\theta)$ で定義すると、ある $\omega_i\ni\theta$ があって、

$$l(\gamma_{\mu_{l+1}}(\omega_i))=|\varphi'_{\mu_l}(\gamma_{\mu_l}(\theta))|l(\gamma_{\mu_l}(\omega_i))$$

が成り立つ。また、

$$|\varphi'_{\mu_l}(\gamma_{\mu_l}(\theta))|=\left|\frac{\gamma'_{\mu_{l+1}}(\theta)}{\gamma'_{\mu_l}(\theta)}\right|$$

$$\geq\frac{1}{36^2}|(Q_\theta^{\mu_{l+1}-\mu_l})'(\gamma_{\mu_l}(\theta))| \quad \text{(Lemma3 より)}$$

$$\geq\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(p_l+1)+c_0q_l} \quad \text{(Lemma 1, Lemma 4 より)}$$

である。ここで、p_l は μ のbinding period , $q_l=(\mu_{l+1}-\mu_l)-(p_l+1)$ である。よって、$\frac{c-\beta}{2}<c_0$ としておけば、

$$l(\gamma_{\mu_{l+1}}(\omega_i))\geq\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(p_l+1)+c_0q_l}l(\gamma_{\mu_l}(\omega_i))=\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(\mu_{l+1}-\mu_l)}l(\gamma_{\mu_l}(\omega_i)).$$

同じことを繰り返して、

$$l(\gamma_{\mu_\kappa}(\omega_i))=(\frac{\tau}{36^2})^\kappa e^{\frac{c-\beta}{2}(\mu_\kappa-\mu_0)}l(\gamma_{\mu_0}(\omega_i))$$

を得る。また、

$$l(\gamma_{\mu_\kappa}(\omega_i))=l(\gamma_{\nu_{i+1}}(\omega_i))<1$$

$$l(\gamma_{\mu_0}(\omega_i)) = l(\gamma_{\nu_i}(\omega_i)) > \frac{(r-1)e^{-|r_i|}}{r_i^2}$$

であるから、

$$1 \geq (\frac{\tau}{36^2})^{\kappa} e^{\frac{c-\beta}{2}(\mu_\kappa - \mu_0)}(e-1)\frac{e^{-|r_i|}}{r_i^2},$$

対数をとって、

（※３） $$0 \geq \kappa \log(\frac{\tau}{36^2}) + \frac{c-\beta}{2}(\nu_{i+1} - \nu_i) + \log(e-1) - |r_i| - 2\log|r_i| .$$

一方、p_l を μ_l のreturnで帰ってくる場所 i.e. $I^l_{p_l,t} \cup I_{p_l,t} \cup I^r_{p_l,t} \supset \gamma_{\mu_l}(\omega_i)$ として、

$$\mu_{l+1} - \mu_l \geq p_l \geq \frac{p_l}{\log 4 + \beta} \geq \frac{\Delta}{\log 4 + \rho}$$

が成り立つ。従って、$\nu_{i+1} - \nu_i \geq \frac{\Delta}{\log 4 + \beta} \cdot \kappa$ ．故に

$$\kappa \log \frac{\tau}{36^2} \geq \log \frac{\tau}{36^2} \frac{\log 4 + \beta}{\Delta}(\nu_{i+1} - \nu_i) \quad (\because \log \frac{\tau}{36^2} < 0 \text{ に注意})$$

$$\geq -\frac{c-\beta}{4}(\nu_{i+1} - \nu_i) \quad (\frac{\log 4 + \beta}{\Delta} \text{ を十分小さくとる。})$$

（※３）とあわせて、

$$\frac{c-\beta}{4}(\nu_{i+1} - \nu_i) < |r_i| + 2\log|r_i| \leq 2|r_i| ,$$

$c > 1$ なので $\beta < c-1$ とすれば、$\frac{8}{c-\beta} < 8 < 10$ となり、

$$(\nu_{i+1} - \nu_i) < \frac{8}{c-\beta}|r_i| < 10|r_i|$$

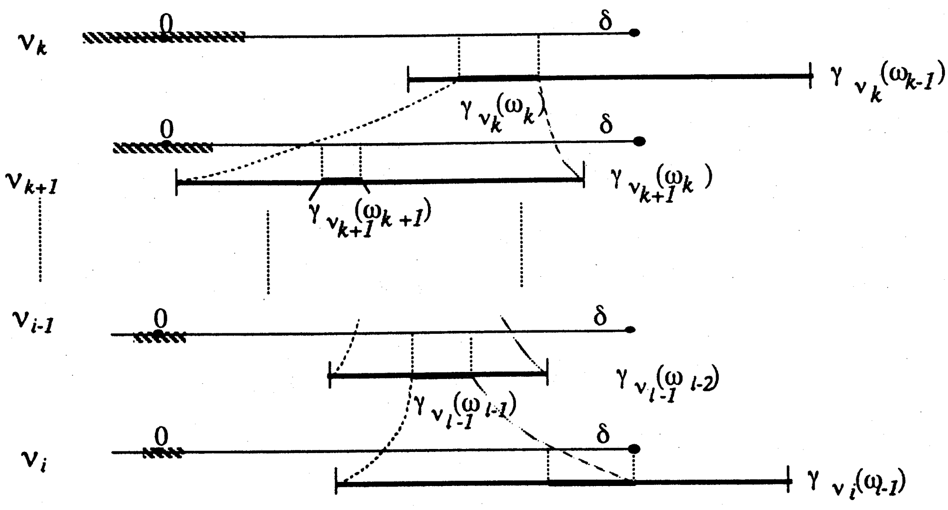
を得る。■

Lemma 6

$1 \leq k \leq i \leq s$ とする．$\gamma_{\nu_k}(\omega_k) \subset (-\delta, \delta)$ であり，またある $r_k > \Delta$ に対して $\gamma_{\nu_k}(\omega_k) \supset I_{r_k, t_k}$ for $1 \leq t_k \leq r_k^2$ であるとき

$$\sum \frac{l(\omega_i)}{l(\omega_k)} \leq C \exp\left(2|r_k| - \frac{(\nu_i - \nu_k)}{100}\right)$$

が成立する．ここで C は定数，和は ν_i と ν_k との間にいかなる escape situation ももたないすべての $\omega_i \in P_{\nu_i}$ についてとる．



証明）$k<l<i$ の間は escaping situation でないので、

$$\gamma_{\nu_l}(\omega_{l+1})\subset(-\delta,\delta)$$

が成立する。

$$\frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_k)}=\frac{l(\omega_{k+1})}{l(\omega_k)}\cdot\frac{l(\omega_{k+2})}{l(\omega_{k+1})}\cdots\frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_{i-2})}$$

として各項 $\frac{l(\omega_{l+1})}{l(\omega_l)}$ を評価する。ω_l を $\omega_k\supset\omega_l\supset\omega_i$ となる P_{ν_l} の元とする。Lemma 1, Lemma4 から、

$$l(\gamma_{\nu_{l+1}}(\omega_l))\ge\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2}(p_l+1)}l(\gamma_{\nu_l}(\omega_l))$$

ここで、p_l は ν_l の binding periodである。r_l を ν_l のreturn する場所とすると、Lemma 4 より、 $p_l\ge\frac{|r_l|}{\log 4+\beta}$ であるから、

$$l(\gamma_{\nu_{l+1}}(\omega_l))\ge\frac{\tau}{36^2}e^{\frac{c-\beta}{2(\log 4+\beta)}|r_l|}l(\gamma_{\nu_l}(\omega_l)).$$

従って、

$$\frac{l(\omega_{l+1})}{l(\omega_l)}=\frac{|\gamma'_{\nu_{l+1}}(a)|}{|\gamma'_{\nu_{l+1}}(b)|}\frac{l(\gamma_{\nu_{l+1}}(\omega_{l+1}))}{l(\gamma_{\nu_{l+1}}(\omega_l))}\le A\frac{l(\gamma_{\nu_{l+1}}(\omega_{l+1}))}{\frac{\tau}{36^2}\exp(\frac{c-\beta}{2(\log 4+\beta)}|r_l|)l(\gamma_{\nu_l}(\omega_l))}$$

$$\le\frac{36^2A}{\tau}\exp(-\frac{c-\beta}{2(\log 4+\beta)}|r_l|)\frac{5(e-1)\frac{e^{-|r_{l+1}|}}{|r_{l+1}|^2}}{(e-1)\frac{e^{-|r_l|}}{|r_l|^2}},$$

$a_1 = \dfrac{36^2 \times 5 \times A}{\tau}$ として、

$$\leq a_1 \exp((1 - \frac{c-\beta}{2(\log 4 + \beta)})|r_i| - |r_{i+1}|)(\frac{|r_i|}{|r_{i+1}|})^2 \ .$$

$c > \dfrac{21}{25}\log 2$ と $\beta < \dfrac{1}{35}\log 2$ とれば、$1 - \dfrac{c-\beta}{2(\log 4 + \beta)} < \dfrac{4}{5}$ となり、

$$\leq a_1 \exp(\frac{4}{5}|r_i| - |r_{i+1}|)(\frac{|r_i|}{|r_{i+1}|})^2 \ .$$

を得る。繰り返しによって、

$$\frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_k)} \leq a_1^{\mu-1} \exp(\frac{4}{5}\sum_{l=k}^{i-2}|r_l| - \sum_{l=k+1}^{i-1}|r_l|)(\frac{|r_k|}{|r_{i-1}|})^2$$

$$\leq a_1^{\mu-1} \exp(-\frac{1}{5}\sum_{l=k}^{i-2}|r_l| + |r_k| - \frac{4}{5}|r_{i-1}|)(\frac{|r_k|}{|r_{i-1}|})^2$$

$$\leq a_1^{\mu-1} \exp(-\frac{1}{5}\sum_{l=k}^{i-2}|r_l| + |r_k| + 2\log|r_k| - \frac{14}{5}|r_{i-1}|)$$

$$\leq a_1^{\mu-1} \exp(-\frac{1}{5}\sum_{l=k}^{i-2}|r_l| + 2|r_k|) \ .$$

ここで、$\mu = i - k$ である。

さて、$\eta(R)$ を $\sum_{l=k}^{i-1}|r_l| = R$ （ただし、$r_l > \Delta$ ）となるの組の個数とすると、

$\eta(R) \leq \dfrac{R!}{\mu!(R-\mu)!}$. Stirling の公式 $\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+1}$ を使うと、

$$\eta(R) \leq \frac{\sqrt{2\pi}R^{R+1/2}e^{-R+1}}{\sqrt{2\pi}\mu^{\mu+1/2}e^{-\mu+1}\sqrt{2\pi}(R-\mu)^{R-\mu+1/2}e^{-(R-\mu)}}$$

$$\leq \frac{e}{\sqrt{2\pi}}(\frac{R}{\mu(R-\mu)})^{1/2}(\frac{R}{\mu})^{\mu}(\frac{R}{R-\mu})^{R-\mu}$$

$$\leq \frac{2e}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{(\frac{\mu}{R})^{\frac{\mu}{R}}(1-\frac{\mu}{R})^{(1-\frac{\mu}{R})}})^R \ .$$

$\dfrac{\mu}{R} \to 0$ のとき、$(\dfrac{\mu}{R})^{\frac{\mu}{R}}(1-\dfrac{\mu}{R})^{(1-\frac{\mu}{R})} \to 1$ となるから、R を十分大きくとって、（$\Delta \to \infty$ とすると $R \to \infty$ ）$\dfrac{2e}{\sqrt{2\pi}} \leq e^{\frac{R}{80}}$, $(\dfrac{\mu}{R})^{\frac{\mu}{R}}(1-\dfrac{\mu}{R})^{(1-\frac{\mu}{R})} \leq e^{\frac{1}{80}}$ となるようにしておくと、

$$\eta(R) \leq e^{\frac{R}{40}}$$

となる。$r_k + \cdots + r_{i-1} = R$ となる組み合わせの数 $\eta_1(R)$ は、$\eta(R)r_k^2 \cdots r_i^2$ で評価される

から、Δ を大きくとっておくことによって、

$$\eta_1(R) \le e^{\frac{R}{20}}$$

を得る。

一方、Lemma 5 より、$\sum_{l=k}^{i-1} |\gamma_l| \ge \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_k)$ であるから、

$$\sum_{\omega_{i-1}} \frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_k)} \le \sum_{R \ge \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_k)} \eta(R) a_1^{\mu-1} \exp(-\frac{R}{5} + 2|\gamma_k|)$$

$$\le e^{2|\gamma_k|} \sum_{R \ge \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_k)} \exp(\mu \log a_1 + \frac{R}{20} - \frac{R}{5})$$

Lemma 4 より、$p_l \le \dfrac{\Delta}{\log 4 + \beta}$ ，　また $\nu_{l+1} - \nu_l \ge p_l$ であるから

$$\mu \le \frac{\nu_{i-1} - \nu_k}{(\frac{\Delta}{\log 4 + \beta})} .$$

従って、

$$\mu \log a_1 \le \frac{(\nu_{i-1} - \nu_k)(\log 4 + \beta)}{\Delta} \cdot \log a_1$$
$$\le \frac{10R \cdot (\log 4 + \beta)}{\Delta} \cdot \log a_1 \le \frac{R}{20} .$$

これを使って、

$$\sum_{\omega_{i-1}} \frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_k)} \le e^{2|\gamma_k|} \sum_{R \ge \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_k)} e^{-\frac{R}{10}} \le \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{10}}} e^{2|\gamma_k| - \frac{\nu_i - \nu_k}{100}} .$$

結局、

$$\sum_{\omega_i} \frac{l(\omega_i)}{l(\omega_k)} \le \sum_{\omega_{i-1}} \frac{l(\omega_{i-1})}{l(\omega_k)} \le c e^{2|\gamma_k| - \frac{\nu_i - \nu_k}{100}} .$$

■

Lemma 7

$\gamma = 1/500$ として次が成り立つ：

$$I = \sum_{\omega \in P_n, \omega \subset E_{n-1}} e^{\gamma T_n(\omega)} l(\omega) \le \exp\left(\frac{\gamma \varepsilon n}{2}\right) \cdot l(\Omega)$$

従って

$$m\left(\bigcup_{T_n(\omega) \ge \varepsilon n} \omega\right) \le \exp\left(-\frac{\varepsilon n}{1000}\right) \cdot l(\Omega) .$$

（証明）$T_n(\omega)=t_1(\omega)+\cdots+t_m(\omega)$，　（ただし、 $m=m(\omega)$）であるから、

$$I=\sum_{\omega_{i_{m-1}}}\sum_{\omega\subset\omega_{i_{m-1}}}e^{\gamma(t_1+\cdots+t_{m-1}+t_m)(\omega)}l(\omega)=\sum_{\omega_{i_{m-1}}}e^{\gamma(t_1+\cdots+t_{m-1})(\omega_{i_{m-1}})}l(\omega_{i_{m-1}})\sum_{\omega\subset\omega_{i_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}\frac{l(\omega)}{l(\omega_{i_{m-1}})}\ .$$

$\tilde{I}(\omega_{i_{m-1}})=\sum_{\omega\subset\omega_{i_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)$ とおき、$\tilde{I}(\omega_{i_{m-1}})$ に対する次の評価を示す。

$$\tilde{I}(\omega_{i_{m-1}})\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-i_{m-1}}\cdot l(\omega_{i_{m-1}})$$

$\omega\subset\omega_{i_{m-1}}$ は $v_{i_{m-1}}$ 回目のreturn でescape situationになっているが、その後に続くescape periodが v_{k_m} 回までとする。ただし、$k_m=k_m(\omega)$ である。上の評価を k_m に関するinductionで 示す。まず、$\omega\subset\omega_{i_{m-1}}$ の中で $k_m(\omega)$ が最大となるω に対し、

（＃）
$$\sum_{\omega\subset\omega_{k_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)$$
$$=l(\omega_{k_m-1})\sum_{\omega_{k_m}\subset\omega_{k_m-1}}\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m}-1)}\sum_{\omega\subset\omega_{k_m}}\frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)}{l(\omega_{k_m})}\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})l(\omega_{k_m}-1)$$

が成立する。ただし、$\omega\subset\omega_{k_m}\subset\omega_{k_m-1}$, $\omega_{k_m}\in P_{v_{k_m}}$, $\omega_{k_m-1}\in P_{v_{k_m}-1}$ である。これによって、$\tilde{I}(\omega_{i_{m-1}})=\sum_{\omega\subset\omega_{i_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)$ における $\omega\subset\omega_{k_m-1}\in P_{v_{k_m}-1}$ である区間 ω についての和は、上式右辺で置き換えてよいことになる。即ち、$(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})$倍しておけばよい。
escaping periodが次に最大のもの $v_{k'_m}$ についての和 $\sum_{\omega\subset\omega_{k'_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)$ を考える。
$\omega\subset\omega_{k'_m}\subset\omega_{k'_m-1}$ として、$\omega_{k'_m-1}$ が ω_{k_m-1} を含んでいない場合は、上と同様に

$$l(\omega_{k'_m-1})\sum_{\omega_{k'_m}\subset\omega_{k'_m-1}}\frac{l(\omega_{k'_m})}{l(\omega_{k'_m}-1)}\sum_{\omega\subset\omega_{k'_m}}\frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)}{l(\omega_{k'_m})}\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})l(\omega_{k'_m}-1)、$$

含んでいる場合は、

$$l(\omega_{k'_m-1})\sum_{\omega_{k'_m}\subset\omega_{k'_m-1}}\frac{l(\omega_{k'_m})}{l(\omega_{k'_m}-1)}\sum_{\omega\subset\omega_{k'_m}}\frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)}{l(\omega_{k'_m})}\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^2 l(\omega_{k'_m}-1)$$

と評価されるので、いずれにしても

$$\sum_{\omega\subset\omega_{k'_{m-1}}}e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^2 l(\omega_{k'_m}-1)$$

と評価できる。これを $v_{i_{m-1}}$ まで繰り返せば、上の評価式

$$\tilde{I}(\omega_{i_{m-1}})\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-i_{m-1}}l(\omega_{i_{m-1}})\sum_{\omega_{i_{m-1}-1}\subset\omega_{i_{m-1}}}l(\omega_{i_{m-1}}-1)\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-i_{m-1}}\cdot l(\omega_{i_{m-1}})$$

が得られる。

このことから、

$$l \le \sum_{\omega_{i_{m-1}}} e^{\gamma(t_1+\cdots+t_{m-1})(\omega_{i_{m-1}})} l(\omega_{i_{m-1}})(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-i_{m-1}} \ ,$$

これを m について帰納的に $i_0 = N$ まで繰り返すことにより、

$$l \le \sum_{\omega_{i_0}} l(\omega_{i_0})(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-N} \le (1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})^{n-N} l(\Omega),$$

Δ を十分大きくとって、$(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}}) \le e^{\frac{\varepsilon}{1000}} \le e^{\frac{\gamma}{2}\varepsilon}$ とすれば、$l \le e^{\frac{\gamma\varepsilon n}{2}}$. $(\because l(\Omega) \le 1)$.
$e^{\gamma\varepsilon n} \cdot m(\bigcup_{T_n(\omega)\ge\varepsilon n} \omega) \le l$ であるから、

$$m(\bigcup_{T_n(\omega)\ge\varepsilon n} \omega) \le e^{-\frac{\gamma\varepsilon n}{2}} = e^{-\frac{\varepsilon n}{1000}} .$$

を得る。

（＃）の証明） v_{k_m} 回目のreturnの場所を p_m と書くと $p_m > 2\Delta$ である。

$$\sum_{\omega\subset\omega_{k_m}} \frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)} l(\omega)}{l(\omega_{k_m})} = \sum_{t_m(\omega)\le 200|p_m|} \frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)} l(\omega)}{l(\omega_{k_m})} + \sum_{t>200|p_m|} e^{\gamma\cdot t} \sum_{t_m(\omega)=t} \frac{l(\omega)}{l(\omega_{k_m})}$$

$$\le e^{\gamma\cdot 200|p_m|} + \sum_{t>200|p_m|} e^{\gamma\cdot t} C e^{2|p_m| - \frac{t}{100}} \le e^{\gamma\cdot 200|p_m|} + Ce^{2|p_m|} \sum_{t>200|p_m|} e^{(\gamma-\frac{1}{100})t}$$

$(\because$ Lemma 6)

$$\le e^{\gamma\cdot 200|p_m|} + \frac{C}{e^{(\gamma-\frac{1}{100})}-1} e^{2|p_m|} e^{(\gamma-\frac{1}{100})200|p_m|} \le a_{11} e^{\frac{2}{5}|p_m|} .$$

ここで、$a_{11} = 1 + \frac{C}{e^{(\gamma-\frac{1}{100})}-1}$ である。escape period の終りかたには次の２通りがある。

1.　１つまえの essential return が escape situation であるとき
もし、$\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m-1}) \subset (-\delta,\delta)$ なら $\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m}) \subset (-\delta^2,\delta^2)$ なる ω_{k_m} に対して、

$$\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m-1})} = \left|\frac{\gamma'_{v_{k_m}}(a)}{\gamma'_{v_{k_m}}(b)}\right| \cdot \frac{l(\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m}))}{l(\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m-1}))} \le A \frac{5(e-1)\frac{e^{-|p_m|}}{p_m^2}}{(e-1)\frac{\delta}{(\Delta+1)^2}} \le 5A\frac{e^{-|p_m|}}{\delta}$$

が成立する。ここで、$a \in \omega_{k_m-1}, b \in \omega_{k_m}$ である。
もし $\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m-1}) \not\subset (-\delta,\delta)$ なら $\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m}) \subset (-\delta^2,\delta^2)$ となる ω_{k_m} に対しては $l(\gamma_{v_{k_m}}(\tilde{\omega}_{k_m-1})) > \delta - \delta^2$ となる $\tilde{\omega}_{k_m-1}$ が存在する。ω_{k_m} と $\tilde{\omega}_{k_m-1}$ に対して、同様の評価が出来て、

$$\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m-1})} \le \frac{l(\omega_{k_m})}{l(\tilde{\omega}_{k_m-1})} = \left|\frac{\gamma'_{v_{k_m}}(a)}{\gamma'_{v_{k_m}}(b)}\right| \cdot \frac{l(\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m}))}{l(\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m-1}))} \le 5A\frac{e^{-|p_m|}}{\delta}.$$

上式と合わせて、

$$l(\omega_{k_m-1})\sum_{\substack{\omega_{k_m}\subset\omega_{k_m-1}\\ \gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m})\subset(-\delta^2,\delta^2)}}\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m-1})}\sum_{\omega\subset\omega_{k_m}}\frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)}{l(\omega_{k_m})}$$

$$\le l(\omega_{k_m-1})\sum_{\substack{\omega_{k_m}\subset\omega_{k_m-1}\\ \gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m})\subset(-\delta^2,\delta^2)}} 5A\frac{e^{-|p_m|}}{\delta}a_{11}e^{\frac{2}{5}|p_m|}$$

$$\le l(\omega_{k_m-1})\frac{5A\times 2a_{11}}{\delta}\sum_{p>2\Delta}e^{-\frac{3}{5}p}\le l(\omega_{k_m-1})\frac{10Aa_{11}}{e^{\frac{3}{5}}-1}e^{\Delta}\cdot e^{-\frac{6}{5}\Delta}\le a_{10}e^{-\frac{1}{5}\Delta}l(\omega_{k_m-1})\ .$$

また $\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m})\not\subset(-\delta^2,\delta^2)$ なる ω_{k_m} も加え合わせると、

$$l(\omega_{k_m-1})\sum_{\omega\subset\omega_{k_m}}\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m-1})}\sum_{\omega\subset\omega_{k_m}}\frac{e^{\gamma\cdot t_m(\omega)}l(\omega)}{l(\omega_{k_m})}\le(1+a_{10}e^{-\frac{\Delta}{5}})l(\omega_{k_m-1})\ .$$

を得る。ここでProposition 2 を使っているが、この場合、定数 A は δ に依存しないように選べることに注意する。

2.　１つまえの essential return が escape situation でないとき、まず、次のことが成り立つことを注意する。

十分小さい δ に対して、ある a_0 が存在し、$a\in(a_0,2)$ なる a に対して、次が成り立つ。
$|Q_a^n(x)|>\delta$, for $x\in(-\delta,\delta)$, $1\le n\le\tilde{N}$　かつ　$e^{c\tilde{N}}>\frac{1}{\delta}$.

従って、a_0 ,δ をこのように選んでおけば、

$$l(\gamma_{v_{k_m}}(\omega_{k_m-1}))=\gamma_{v_{k_m}-v_{k_m-1}}(\gamma_{v_{k_m-1}}(\omega_{k_m-1}))\ge\frac{1}{\delta}l(\gamma_{v_{k_m-1}}(\omega_{k_m-1}))\ge\frac{(e-1)e^{-2\Delta}}{\delta(2\Delta)^2}$$

であるから、

$$\frac{l(\omega_{k_m})}{l(\omega_{k_m-1})}\le A\frac{5(e-1)\dfrac{e^{-|p_m|}}{p_m{}^2}}{(e-1)\dfrac{e^{-2\Delta}}{\delta(2\Delta)^2}}\le 5Ae^{\Delta-|p_m|}$$

あとは1. と同様にして（#）が得られる。ここでの定数 A も δ に依存しないように選べる。■

§5. Eの Lebesgue measure の評価

$m(E_n)>0$ を示す.

（1）§3の評価から，すべての$\omega\in P_{n-1}$, $\omega\subset E_{n-1}$ に対し

$$\frac{m(\omega \cap F_n)}{m(\omega)} \geq 1 - B\exp(-\alpha n/10),$$

従って

$$\frac{m(E_{n-1} \cap F_n)}{m(E_{n-1})} \geq 1 - B\exp(-\alpha n/10)$$

が成立する.

（2）§4 : Lemma 7 より,

$$m((F_n \cap E_{n-1}) - E_n) \leq \exp(-\frac{\varepsilon n}{1000}) \cdot l(\Omega).$$

従って

$$m(E_n) \geq m(F_n \cap E_{n-1}) - \exp(-\frac{\varepsilon n}{1000}) \cdot l(\Omega)$$

が成立する.

以上より

$$\begin{aligned} m(E_n) &\geq (1 - B\exp(-\alpha n/10))m(E_{n-1}) - \exp(-\frac{\varepsilon n}{1000}) \cdot l(\Omega), \\ &\geq \left\{ (\prod_{n=N}^{\infty}(1 - B\exp(-\alpha n/10)) - \sum_{n=N}^{\infty}\exp(-\frac{\varepsilon n}{1000}) \right\} l(\Omega). \end{aligned}$$

ここで $N \to \infty$ とするとき { } 内第1項 $\to 1$, { } 内第2項 $\to 0$. であるから N を十分大きくとって

$$m(E_n) \geq \frac{1}{2} l(\Omega) \quad \text{for} \quad \forall n \geq N \qquad \text{すなわち} \quad m(E) \geq \frac{1}{2} l(\Omega) > 0$$

とできる. 以上で定理が証明された. （証明終）

参考文献

[1] P. Collet & J.-P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkauser, 1980.

[2] M. Benedicks & L. Carleson, On iterations of $1\text{-}ax^2$ on (-1,1), Ann. Math., **122** (1985), 1-25.

[3] M. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps, Comm. Math. Phys., **81** (1981), 39-88.

[4] L. Mora & M. Viana, Abundance of strange attractors, Preprint.

[5] D. Singer, Stable orbits and bifurcations of maps of the interval, SIAM J. Appl. Math., **35** (1978), 260

[6] M. Tsujii, A proof of Benedicks-Carleson-Jacobson Theorem for the Quadratic Family, preprint

[7] de Melo and van Strien, 1-dimensional Dynamical Systems, preprint (to be published by Springer-Verlag)