数理解析研究所講究録
第 806 巻 1992 年 65-92

Mora-Viana による Hénon type strange attractor についての結果の紹介 II

愛媛大理　　平出 耕一 (Koichi Hiraide)

M.Hénon [H] は次の (*) で定義される 2 次元写像 $h_{a,b}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ の力学系を考察し, 数値実験によりパラメーター値 $a=1.4, b=0.3$ において複雑な構造を持つと思われる attractor を発見した。

(*) $$h_{a,b}(x,y)=(1-ax^2+y,bx)$$

これ以後、上の写像 (Hénon map) の力学系がいろいろな立場から研究されている (三波氏による「Hénon map について」を参照されたい)。しかしながら、Hénon が見つけた attractor の構造は、現在でもまだ理解されていない様である。

最近、M.Benedicks と L.Carleson は、 Hénon map に対し 'strange attractor' が、厳密な意味で、存在することを証明した。

定理 1 (Benedicks – Carleson[BC])

領域 $\{x>0,y>0\}\subset\mathbf{R}^2$ にある双曲型不動点の不安定多様体を W^u で表わす。 任意の $0<c<log2$ に対し $b_0>0$ が存在して、各 $0<b<b_0$ に対し Lebesgue 測度が正の集合 $E(b)$ を選ぶことが出来、すべての $a\in E(b)$ に対し次が成立する：

(i) 或る開集合 $U=U(a,b)\neq\emptyset$ があって、すべての $z\in U$ に対し

$$dist(h^n_{a,b}(z),\overline{W^u})\to 0,\qquad n\to\infty.$$

(ii) 点 $z_1\in W^u$ が存在して次の (a) と (b) が成り立つ：

(a) $\overline{\{h^n_{a,b}(z_1):n\geq 0\}}=\overline{W^u}$

(b) $\|Dh^n_{a,b}(z_1)(1,0)\|\geq e^{cn}$ $(\forall n\geq 0)$

上の定理の $\overline{W^u}$ は双曲型にはならない。このことは、双曲型 attractor の性質から得られる ([P])。また, 定理の証明からも分かる。

定義 1

M は曲面とし $f:M\to M$ は微分同相写像とする。f で不変なコンパクト部分集合 $\Lambda\subset M$ が f の attractor であるとは、Λ の安定集合

$$W^s(\Lambda)=\{x\in M:dist(f^n(x),\Lambda)\to 0,n\to\infty\}$$

の内部は int$W^s(\Lambda)\neq\emptyset$ となるときをいう。attractor Λ が strange であるとは、Λ は有限集合でなく、点 $z_1\in\Lambda$ が存在して次の (a) と (b) が成り立つときとする：

(a) $\overline{\{f^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$,

(b) 接ベクトル $v \in T_{z_1}M, v \neq 0$ と $\lambda > 1$ が存在して、$\|Df^n(v)\| \geq \lambda^n \|v\|$ $(\forall n \geq 0)$.

また、$f^{-1} : M \to M$ の attractor を f の repellor と呼び、strange repellor が定義される。

I を区間とし $F : M \times I \to M$ を C^r 写像とする。各 $\mu \in I$ に対し $F(\ ,\mu) : M \to M$ が C^r 微分同相写像であるとき、F を C^r 微分同相写像の one parameter family と呼ぶ。ここで、I は 0 を内点として含むとしておく。

L.Mora と M.Viana は、Benedicks-Carleson の方法を homoclinic bifurcation の枠組みの中に持込んで、次の定理2を証明した。

定理2 (**Mora – Viana[MV]**)

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし次の (A1), (A2), (A3) を仮定する。

(A1) f_0 は双曲型周期点 p_0 を持ち、微分 $Df_0^n(p_0)$ の 固有値λ_0, σ_0 について、$|\lambda_0\sigma_0| \neq 1$ であり、$\ell + m \leq r - 2$ となる自然数 ℓ, m に対し$\lambda_0^\ell \sigma_0^m \neq 1$ である。ここで、n は p_0 の周期を表わす。

(A2) 安定多様体 $W^s(p_0)$ と不安定多様体 $W^u(p_0)$ について、Homoclinic tangency の点 $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$ が存在し、q において $W^s(p_0)$ と $W^u(p_0)$ は 2 次の order で接している。

(A3) パラメーター μ に関して、$\frac{\partial f_\mu(q)}{\partial \mu}|_{\mu=0}$ は $W^u(p_0)$ の q における接線に横断的である。

このとき、r が十分大ならば （例えば、r=140)、Lebesgue 測度が正のパラメーター値 μ の集合 E が $\mu = 0$ の近くに存在して、すべての $\mu \in E$ に対し f_μ は、f_0 による q の軌道の近傍に strange attractor あるいは strange repellor を持つ。

定理2の strange attractor (strange repellor) は、定理1と同様、双曲型でない。

以下で、定理2の Mora-Viana による証明の概略を述べる。

§1 Renormalization と Hénon-like family

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし定理2の (A1), (A2), (A3) を仮定する。p_0 は f_0 の双曲的不動点としてよい。 陰関数定理よりμ が 0 に十分近ければ、f_μ は双曲型不動点 p_μ を持ち $\mu \to p_\mu$ は C^r 写像となる。λ_μ, σ_μ を $Df_\mu(p_\mu)$ の固有値とする。このとき λ_μ, σ_μ はそれぞれμ の C^{r-1} 関数である。(A1) と Gomozov の定理 ([B]) より $C^{[\frac{r-1}{2}]}$ 局所座標 $(U, (\xi, \eta))$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&U \supset \{(\xi, \eta) : |\xi| \leq 2, |\eta| \leq 2\}, \\
&p_\mu = (0, 0), \\
&f_\mu(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \lambda\eta), \quad \sigma = \sigma_\mu, \quad \lambda = \lambda_\mu.
\end{aligned}
$$

(A1) より $|\sigma_0\lambda_0| \neq 1$. 以後、$|\sigma_0\lambda_0| < 1, 0 < |\lambda_0| < 1 < |\sigma_0|$ の場合を考える。(A2) の homoclinic tangency の点 q は $q = (1, 0)$ であるとして一般性を失わない。また、$f_0^N(q) = r = (0, 1)$ となる $N > 0$ が存在するとしてよい。このとき (A2), (A3) より

$$
f_\mu^N(1 + \xi, \eta) = (\alpha\xi^2 + \beta\eta + v\mu + H_1(\mu, \xi, \eta), 1 + H_2(\mu, \xi, \eta))
$$

となる。ここで H_1, H_2 は $C^{[\frac{r-1}{2}]}$ 関数であり

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \alpha \neq 0, \beta \neq 0, v \neq 0, \dfrac{\partial}{\partial \xi} H_2(0,0,0) \neq 0 \\
(2) & H_1 = \partial_\xi H_1 = \partial_{\xi\xi} H_1 = \partial_\eta H_1 = \partial_\mu H_1 = H_2 = 0 \quad \text{at} \quad (\mu, \xi, \eta) = (0,0,0), \\
(3) & v = 1, \ \partial_{\mu\mu} H_1(0,0,0) = 0.
\end{array}
$$

ただし (3) に対しては parameter μ の座標変換を必要とする。上の (1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
H_1(\mu, \xi, \eta) &= C_1 \eta^2 + C_2 \mu \xi + C_3 \xi \eta + C_4 \mu \eta + O(3), \\
H_2(\mu, \xi, \eta) &= D_1 \mu + D_2 \xi + D_3 \eta + O(2), \ D_2 \neq 0.
\end{aligned}
$$

次で定義される座標変換を $\phi_n : (\mu, \xi, \eta) \to (a, x, y)$ で表わす。

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
a & = -\alpha(\sigma^{2n}\mu - \sigma^n + \beta \lambda^n \sigma^{2n}) \\
x & = -\frac{\alpha}{a} \sigma^n (\xi - 1) \\
y & = -\frac{\alpha}{a} \sigma^{2n} (\sqrt{\lambda \sigma})^{-n} (\eta - \lambda^n)
\end{array}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{array}{ll}
\mu & = -\frac{a}{\alpha} \sigma^{-2n} + \sigma^{-n} - \beta \lambda^n \\
\xi - 1 & = -\frac{a}{\alpha} \sigma^{-n} x \\
\eta & = -\frac{a}{\alpha} \sigma^{-2n} (\sqrt{\lambda \sigma})^n y + \lambda^n
\end{array}
\right.
$$

$f(\mu, \xi, \eta) = (\mu, f_\mu(\xi, \eta))$ とおいて

$$
\varphi_n(a, x, y) = \phi_n \circ f^n \circ f^N \circ \phi_n^{-1}(a, x, y)
$$

とする。このとき、$R = \{(a, x, y) : 1 \leq a \leq 3, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ に対し、$n > 0$ が十分に大ならば、$\varphi_n : R \to \mathbf{R}^3$ となる。$\psi : R \to \mathbf{R}^3$ を $\psi(a, x, y) = (a, 1 - ax^2, 0)$ で定義すると

$$
\|\varphi_n - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K(\sqrt{\lambda_0 \sigma_0})^n
$$

が成り立つ。実際、$\varphi_n : R \to \mathbf{R}^3$ は

$$
\begin{pmatrix} a \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto
\begin{pmatrix}
a \\
1 - ax^2 - \beta(\sqrt{\lambda \sigma})^n y + \sigma^{2n} H_1(\mu, \xi - 1, \eta) \\
-\frac{\alpha}{a}(\sqrt{\lambda \sigma})^n \sigma^n H_2(\mu, \xi - 1, \eta)
\end{pmatrix}
$$

で与えられる。$1 \leq a \leq 3$ に対し、$\varphi_a : [-2, 2]^2 \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi(a, x, y) = (a, \varphi_a(x, y))$ によって定義する。one parameter family $(\varphi_a)_a$ を (f_μ) の renormalization と呼ぶ。

定理3

(f_μ) を曲面の C^r 微分同相写像の one parameter family とし定理2の (A1), (A2), (A3) を仮定する。このとき $K > 0, t > 0$ が存在して任意の $b > 0$ に対し (f_μ) の $C^{[\frac{r-1}{2}]}$ renormalization $(\varphi_a)_a$ を次が成り立つ様に選ぶことが出来る：

(a) $\|\varphi - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K\sqrt{b}$,　特に　$\|\varphi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq 5 \leq K$,

(b) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D\varphi_a(x,y)$　とおいて

(i)

$$|A| \leq K \qquad \frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |B| \leq K\sqrt{b}$$

$$\frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |C| \leq K\sqrt{b} \qquad |D| \leq Db^{1+t}$$

(ii)

$$\frac{1}{K}b \leq |detD\varphi_a| \leq Kb \qquad \|D\varphi_a\| \leq K \qquad \|D\varphi_a^{-1}\| \leq \frac{K}{b}$$

$$\|D_{(a,x,y)}A\| \leq K \qquad \|D_{(a,x,y)}B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t}$$

$$\|D_{(a,x,y)}C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t} \qquad \|D_{(a,x,y)}D\| \leq Kb^{1+2t}$$

(iii)

$$\|D_{(a,x,y)}(detD\varphi_a)\| \leq Kb^{1+t} \qquad \|D^2\varphi_a\| \leq K$$

$$\|D^2_{(a,x,y)}A\| \leq Kb^t \qquad \|D^2_{(a,x,y)}B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t}$$

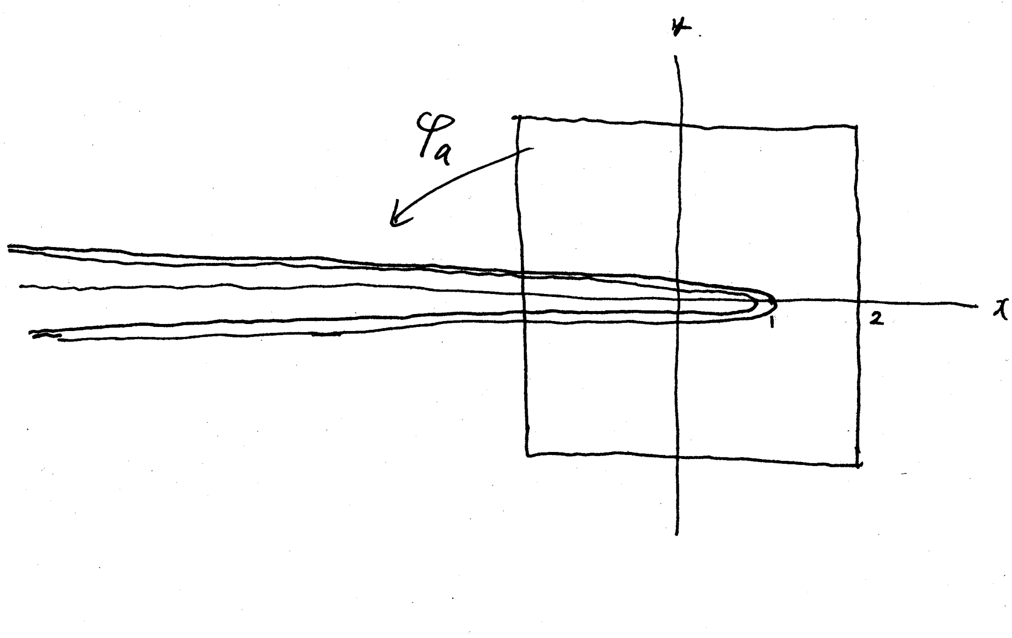
$$\|D^2_{(a,x,y)}C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t} \qquad \|D^2_{(a,x,y)}D\| \leq Kb^{1+3t}$$

$$\|D^2_{(a,x,y)}(detD\varphi_a)\| \leq Kb^{1+2t} \qquad \|D^3\varphi_a\| \leq Kb^t$$

定義2

定理3の性質を持つ one parameter family $(\varphi_a)_a$　ここで　$\varphi_a : \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\} \to \mathbf{R}^2$, $1 \leq a \leq 3$　を Hénon-like family と呼ぶ。ただし $b > 0$ は十分に小さいと考える。また Hénon-like family は次の形であるとイメージすることが出来る：

$$\varphi_a(x,y) = (1 - ax^2 \pm\sqrt{b}y, \pm\sqrt{b}x)$$



$\boxed{\text{定理4}}$

(φ_a) を C^r Hénon-like family とする。このとき任意の $0 < c < \log 2$ に対し $b_0 > 0$ が存在して、各 $b \in (0, b_0)$ に対し Lebesgue 測度正の集合 $E(b) \subset (1,2)$ がとれて、すべての $a \in E(b)$ に対し φ_a で不変なコンパクト集合$\Lambda = \Lambda_a$ が存在し次が成り立つ。

(1) $\mathrm{int}W^s(\Lambda) \neq \emptyset$,

(2) 点 $z_1 \in \Lambda$ が存在して

(a) $\overline{\{\varphi_a^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$,

(b) $\|D\varphi_a^n(z_1)(1,0)\| \geq e^{cn}, \quad (\forall n \geq 0)$.

上の Λ は、定理1と同様、ある双曲型不動点の不安定多様体の閉包である。また、定理4の r は次の不等式を満たしていればよい。

$$r \geq \frac{8\log \sigma_1^{-1}}{c}, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

定理3と定理4から、定理2が得られる。以下、定理4について説明する。

§2 Attractor Λ の構成

$\varphi = (\varphi_a)_a$ を Hénon-like family とし、$\psi_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ $(1 \leq a \leq 3)$ を $\psi_a(x,y) = (1 - ax^2, 0)$ で定義する。このとき $\|\varphi_a - \psi_a\|_{C^r([-2,2]^2)} \leq K\sqrt{b}$.

先ず ψ_2 について考える。ψ_2 の不動点は $P = (\frac{1}{2}, 0)$, $Q = (-1, 0)$ の2個で、$D\psi_2(P)$ の固有値は $-2, 0$ 、$D\psi_2(Q)$ の固有値は $4, 0$ となり、共に双曲型不動点である。陰関数定理より ψ_2 の C^r 近傍 $\mathcal{N} \subset \{C^k\text{写像} : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^2\}$ と C^∞ 写像 $P, Q : \mathcal{N} \to \mathbf{R}^2$ が存在して、各 $\varphi \in \mathcal{N}$ に対し $P(\varphi), Q(\varphi)$ は φ の双曲型不動点で、$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{P(\varphi), Q(\varphi)\}$ となる。さらに、これらの不動点の局所安定（不安定）多様体は、C^r 位相で φ に関して連続的に変化する。

$\boxed{\text{命題2.1}}$

U を $0 \in \mathbf{R}^n$ の近傍とし、$g_t : U \to \mathbf{R}^n$ $(t \in \mathbf{R}^m)$ を C^r 写像の m parameter family とする。また $0 \in \mathbf{R}^n$ は g_0 の双曲型不動点とし、接空間の splitting を $\mathbf{R}^n = E^s \bigoplus E^u$ で表わす。C^r 写像の m parameter family $h = (h_t)$ は $g = (g_t)$ に C^r (bounded) 位相で十分近いとし、$t \in \mathbf{R}^m$ は 0 の近傍にあるとする。このとき $0 \in U$ の近くに h_t の双曲型不動点 $P(h_t)$ がただ一つ存在し、その局所不安定多様体 $W^u_{loc}(P(h_t))$ に関し次が成り立つ：C^r 写像 $\phi_h(t, \ ) : B_\epsilon(0) \subset E^u \to E^s$ が存在して、$\phi_h(t, \ )$ のグラフが $W^u_{loc}(P(h_t))$ となり、さらに $\phi : (h,t,x) \mapsto \phi_h(t,x)$ は C^r 写像となる。特に $h \mapsto \phi_h(\ , \ ) \in C^{r-1}(V, E^s)$ は C^1 写像である。ここで V は $0 \in \mathbf{R}^m \times E^s$ の近傍を表わす。また、局所不安定多様体に関し同様のことが成立する。

$\psi_a(x,y) = (1 - ax^2, 0)$, $1 \leq a \leq 3$ の不動点 $P(\psi_a) = (P(\psi_a), 0)$, $Q(\psi_a) = (Q(\psi_a), 0)$ とその不安定多様体は、次のようになる。

$1 < a < 2$ の場合

$$\tfrac{1}{2} < P(\psi_a) < 1 \qquad W^u(P(\psi_a)) = [1-a, a]$$

$$Q(\psi_a) < -1 < 1 - a \qquad W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup [Q(\psi_a), 1]$$

$a = 2$ の場合

$$P(\psi_a) = \tfrac{1}{2} \qquad W^u(P(\psi_a)) = [-1, 1]$$

$$Q(\psi_a) = -1 \qquad W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, -1] \cup [-1, 1]$$

$2 < a < 3$ の場合

$$0 < P(\psi_a) < \tfrac{1}{2} \qquad W^u(P(\psi_a)) = (-\infty, 1]$$

$$1 - a < -1 < Q(\psi_a) \qquad W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup (-\infty, 1]$$

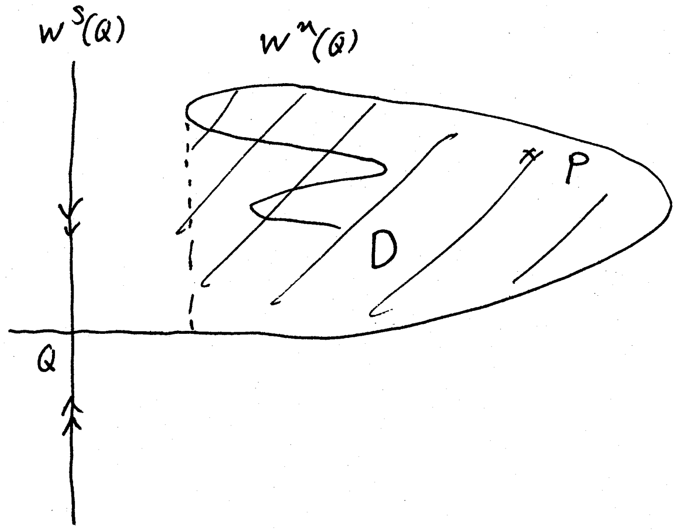
また安定多様体は

$$W^s(P(\psi_a)) = \{P(\psi_a)\} \times \mathbf{R}, \quad W^s(Q(\psi_a)) = \{Q(\psi_a)\} \times \mathbf{R}.$$

従って、$a = 2$ のとき、$Q(\psi_a)$ は、$Q(\psi_a)$ に対する homoclinic tangency の点であり、また $Q(\psi_a)$ と $P(\psi_a)$ に対する heteroclinic tangency の点である。 $a > 2$ のとき、これらは横断的になり、$a < 2$ のときは、消滅する。局所安定（不安定）多様体の変化の連続性より、Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ において、$b > 0$ が十分小さいならば、$a = 2$ の近くに $a_+ = a_+(\varphi)$ があって、$Q(\varphi_{a_+})$ に対し homoclinic tangency の点が存在し、$a < a_+$ ならばこれらの点は消滅する。同様に、$a_- = a_-(\varphi)$ があって、$Q(\varphi_{a_-})$ と $P(\varphi_{a_-})$ に対し heteroclinic tangency の点が存在し、$a < a_-$ ならばこれらの点は消滅する。

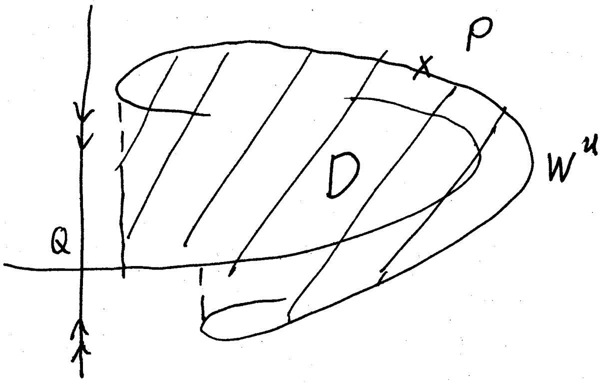
$(\varphi_a)_a$ が orientation preserving の場合：

$a < a_-$ について考える。$W^u(Q(\varphi_a)) - \{Q(\varphi_a)\}$ の右の separatrix は $[-1, 1] \times \{0\}$ の近傍に含まれていることが、容易に分かる。図の様に disc D を取ると、φ_a が orientation preserving であることから、$\varphi_a(D) \subset D$ となる。Brouwer の不動点定理より、φ_a は D の中に不動点をもつ。これは $P(\varphi_a)$ でなければならない。明かに、$P(\varphi_a) \in \mathrm{int}D$ である。従って、$W^u(P(\varphi_a)) \subset D$.



$(\varphi_a)_a$ が orientation reversing の場合：

$a < a_+$ について考える。このとき、$W^u(P(\varphi_a))$ は $[-1,1] \times \{0\}$ の近傍に含まれる。図の様に disc D を取り、$\varphi_a(D) \subset D$ を得る。



従って、次が成り立つ。

命題 2.2

Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ に対し、$\Lambda = \overline{W^u(P(\varphi_a))}$ とおき、上の様に $a = 2$ の近くの a_-, a_+ を定める。$(\varphi_a)_a$ が orientation preserving ならば、$a < a_-$ に対し $\mathrm{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ であり、$(\varphi_a)_a$ が orientation reversing ならば、$a < a_+$ に対し $\mathrm{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ である。

さらに、$P(\varphi_a)$ の安定多様体もあわせて考えると、次が得られる。

命題 2.3

$(\varphi_a)_a$ が orientation reversing ならば、$a < a_+$ に対し $W^s(\Lambda)$ は Λ の近傍である。

§3 Critical point

定理4（2）を示すために、 Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ に対し1次元写像 $Q_a(x) = 1 - ax^2$ の議論を適用する。考える parameter a の範囲は、$a = 2$ に近く、 $a < 2$ かつ $a < a_+$（または $a < a_-$ ）であるとする。ここで、a_+ と a_- は前節のものである。

1次元写像と同様に、$\delta > 0$ を十分小さく取って固定する。$b > 0$ は必要に応じて十分小さいと考える。

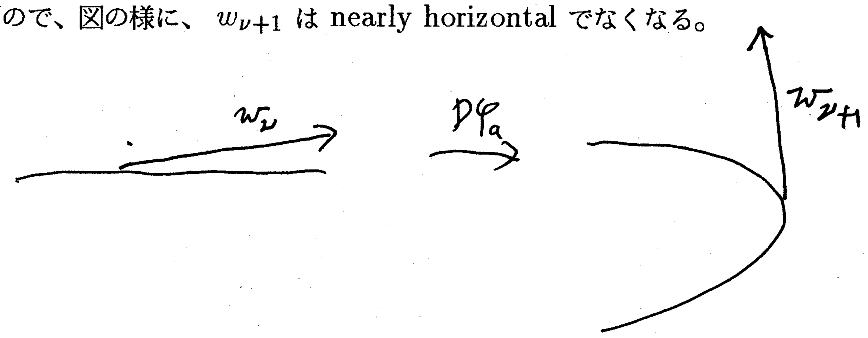
$z_1 \in W^u = W^u(P(\varphi_a))$ と $n \geq 0$ に対し、$z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \varphi_a^n(z_1)$ とおく。また、$w_n = w_n(z_1) = D\varphi_a^n(z_1) \cdot (1,0)$ とおく。

$$D\varphi_a \doteqdot \begin{pmatrix} -2ax & \pm\sqrt{b} \\ \pm\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$$

より、$|x_n| \geq \delta$ である限り、w_n はほとんど水平（ nearly horizontal ）であり、

$$\|w_n\| \doteqdot 2a|x_n|\|w_{n-1}\|$$

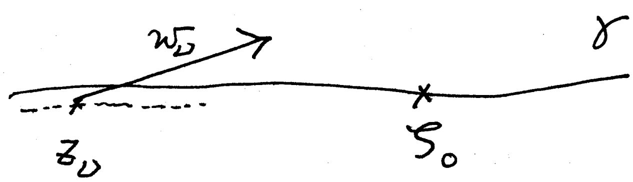
となる。$\nu > 0$ が return（すなわち、$|x_\nu| < \delta$ ）の場合を考えてみる。このとき、φ_a により "fold" が生ずるので、図の様に、 $w_{\nu+1}$ は nearly horizontal でなくなる。



領域 $\{|x| > \delta\}$ において、$D\varphi_a$ は y 軸方向に強い contraction の方向を持つ様に思える。そこで、この領域において contraction の方向 $e^{(\infty)}(z)$ (z における一つの単位ベクトル)　があったとしてみる。さらに、 z が W^u の "fold" の点であるとき、$e^{(\infty)}(z)$ は z における W^u の接線に平行な単位ベクトルであるとする。$w_{\nu+1}$ を水平なベクトル $\omega_{\nu+1}$ と $e^{(\infty)}(z_{\nu+1})$ に平行なベクトル $\sigma_{\nu+1}$ に分解する。

$$w_{\nu+1} = \omega_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$$

$\sigma_{\nu+1}$ を $D\varphi_a$ で写していくと、急激に 0 に収束していく。従って、$w_{\nu+1}$ と $\omega_{\nu+1}$ を $D\varphi_a$ で何回か写してやると、ほぼ同じになる。そこで、$\frac{\|\omega_{\nu+1}\|}{\|w_{\nu+1}\|}$ を評価したい。この為に、$z_{\nu+1}$ の近くで "critical point" $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in W^u$、$|\xi_0| < \delta$ を取る。ここで、ζ_0 が "critical point" であるとは、$\varphi_a(\zeta_0)$ が W^u の "fold" の点のときをいう。z_ν と ζ_0 の関係は図の様であるとする。



すなわち、γ は W^u の中の nearly flat な曲線であり、z_ν と γ の距離 $dist(z_\nu, \gamma)$ は

$$dist(z_\nu, \gamma) \ll |z_\nu - \zeta_0| \tag{3.1}$$

を満たすとする。このとき、w_ν は γ に接していると思うこと出来るので、$D\varphi_a(\zeta_0)\cdot w_\nu$ は $e^{(\infty)}(\varphi_a(\zeta_0))$ にほぼ平行、従って、$\sigma_{\nu+1} \doteqdot D\varphi_a(\zeta_0)\cdot w_\nu$ となり

$$\begin{aligned}
\|\omega_{\nu+1}\| &\doteqdot \|D\varphi_a(z_\nu)\cdot w_\nu - D\varphi_a(\zeta_0)\cdot w_\nu\| \\
&\doteqdot 2a|z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\| \\
&\cong |z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\|
\end{aligned}$$

このことから、1次元写像 Q_a と同様の議論が可能となり、$\|w_n\|$ の増大を計算することが出来る。

上の筋書きで問題になるのは、contraction の方向 $e^{(\infty)}(z)$ の存在である。実際、$e^{(\infty)}(z)$ の存在と $\|w_n\|$ が指数的に増大することは、双対的な関係になっている。そこで、上の議論を、反復の回数（以後、時間と呼ぶ） n に関する帰納法によって進める。

$\|w_k\|$ が時間 n-1 まで指数的に増大すると仮定して、contraction 方向の近似 (contractive approximation) $e^{(n-1)}$ と critical point の近似 (critical approximation) $z_0^{(n-1)}$ を構成する。また、return に対して (3.1) を満たす critical approximation の点 ζ_0 を選びたいので、ある程度たくさんの critical approximation の点を用意しなければならない。そこで、critical approximation の点の集合 $\mathcal{C}_n$ を構成する。この後、1次元写像と同様の議論によって、 parameter a に関する条件 (BA) 、(FA) を仮定して、$\|w_k\|$ が時間 n まで指数的に増大することを証明する。

すべての時間 n にわたって (BA) 、(FA) を満たす parameter a の集合 E が Lebesgue 測度正であることは、1次元写像の場合と同様、"bounded distorsion" を示すことにより得られる。ただし、critical approximation の点 $z_0^{(n-1)}$ は $W^u = W^u(P(\varphi_a))$ に属しているので、 parameter a に依存する。しかし、$z_0^{(n-1)} : a \mapsto z_0^{(n-1)}$ は C^{r-1} 写像であり、微分は $\|\dot{z}_0^{(n-1)}\| \leq b^\tau$ であることが証明され、1次元写像の場合と同じような議論ができる。ここで $\tau > 0$ は、 critical approximation の点、時間 n 等に依存しない定数である。この証明において、Hénon-like family $(\varphi_a)_a$ の高い微分可能性が必要になる。

最後に、各 $a \in E$ に対し、$n \to \infty$ として $\mathcal{C}_n$ の集積点を一つ取って z_0 とする。このとき、$z_1 = \varphi_a(z_0)$ は定理 4 (2) の (ii) を満たしている。 E の Lebesgue 測度が正であることから、背理法により、(i) が成り立つ parameter a の集合 $\subset E$ も Lebesgue 測度正であることが証明される。

以下では、contractive approximation 、critical approximation 、帰納法の構造をもう少し具体的に説明する。E の Lebesgue 測度が正の証明は、1次元写像 Q_a の場合とほぼ同じなので、省略する。

§4 Contractive approximation

λ を次の不等式を満たす実数とする。ここでは、$\lambda \geq 1$ を仮定しないでおく。

$$\lambda \geq \left(\frac{\delta}{10K}\right)^{10} \gg b > 0$$

定義 3

z_1 が時間 n まで λ-expanding であるとは

$$\|w_k(z_1)\| \geq \lambda^k \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

が成り立つときをいう。

z_1 における接平面の上の単位円 $\mathrm{S} = \{v : \|v\| = 1\}$ は、$D\varphi_a^k(z_1)$ によって楕円 S' に写される。そこで単位ベクトル $e^{(k)} \in \mathrm{S}$ を、$D\varphi_a^k(e^{(k)})$ が楕円 S' の短軸にある様に取る。また、$f^{(k)} \in \mathrm{S}$ を $D\varphi_a^k(f^{(k)})$ が楕円　S' の長軸にある様にとる。このとき、$e^{(k)}$ と $f^{(k)}$ は直交する。従って

$$\|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \cdot \|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| = |det D\varphi_a^k| \leq (Kb)^k.$$

z_1 が時間 n まで λ-expanding であるとすると

$$\|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| \geq \lambda^k, \qquad \|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \leq \left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^k$$

ここで $0 < \frac{Kb}{\lambda} \ll 1$ に注意する。

補題 4.1

z_1 は時間 n まで λ-expanding であるとする。このとき、任意の $1 \leq \mu \leq k \leq n$ に対し、次が成り立つ。

(a) $|angle(e^{(\mu)}, e^{(k)})| \leq \frac{3K}{\lambda}\left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^\mu$

(b) $\|D\varphi_a^\mu(z_1)e^{(k)}\| \frac{4K}{\lambda}\left(\frac{K^2b}{\lambda^2}\right)^\mu$

もし z_1 が、すべての n について、時間 n まで λ-expanding であると仮定すると、補題 4.1(a) から $e^{(n)}$ はある単位ベクトル $e^{(\infty)}$ に収束し、(b) から $e^{(\infty)}$ は z_1 における contraction の方向となる。

定義 4

z_1 が時間 n まで λ-expanding であるとき、上の $e^{(n)}(z_1) = e^{(n)}$ を z_1 における n 次の contractive approximation と呼ぶ。$e^{(n)}(z_1)$ は nearly vertical である。実際、y 軸と $e^{(n)}(z_1)$ の角度は $\sqrt[4]{b}$ 以下である。

定義 5

$z_1 = \varphi_a(z_0) \in W^u$ は時間 n まで λ-expanding とし、$e^{(n)}(z_1)$ を z_1 における n 次の contractive approximation とする。$e^{(n)}(z_1)$ が z_1 において W^u に接しているとき、z_0 を n 次の critical approximation と呼ぶ。

補題 4.2

$z_1 = \varphi_a(z_0)$ は時間 n まで λ-expanding であるとし、$\sigma = \frac{\lambda}{4K^2}$ とする。このとき、$|z_0 - \zeta_0| \leq \sigma^n$ となるすべての $\zeta_1 = \varphi_a(\zeta_0)$ に対し

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|w_k(z_1)\|}{\|w_k(\zeta_1)\|} \leq 2 \qquad (1 \leq \forall k \leq n)$$

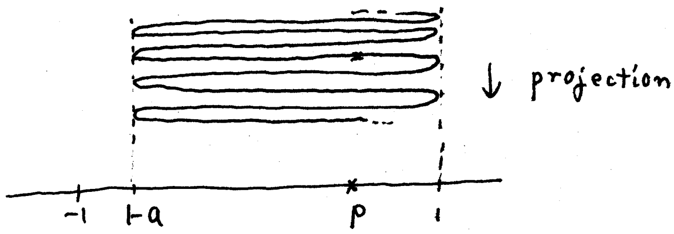
補題 4.3

$K_0 = K_0(K, \lambda) > 0$ が存在して

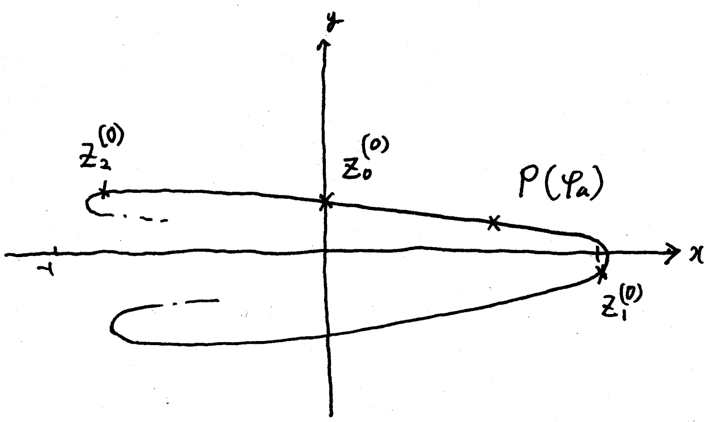
$$\|e^{(k)}\|_{C^2(a,x,y)} \leq K_0 b \qquad (1 \leq \forall k \leq n)$$

§5 帰納法の為の準備

パラメーター値 $a=2$ の近くに、区間 $\Omega_0 \subset (1,2)$ を $\sup \Omega_0 < a_+$ あるいは $\sup\Omega_0 < a_-$ となる様に取る。§2で見た様に，双曲型不動点 $P(\varphi_a)$ の不安定多様体 $W^u = W^u(P(\varphi_a))$ は $[-1,1]\times\{0\}$ の近傍に含まれている。また、$\psi_a(x,y) = (1-ax^2, 0)$ の不安定多様体 $W^u(P(\psi_a)) = [1-a, 1]$ は



の様に埋め込まれているので、局所不安定多様体の変化の連続性（命題2.1）より、$b>0$ が十分小さいとき，$W^u = W^u(P(\varphi_a))$ は



の様になる。W^u の中で $P=P(\varphi_a)$ に最も近い $W^u \cap \{x=0\}$ の点を $z_0^{(0)}$ で表わす。$z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$，$z_2^{(0)} = \varphi_a^2(z_0^{(0)})$ とおいて、$z_1^{(0)}$ と $z_2^{(0)}$ を端点とする W^u の中の弧を $G_0 = [z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$ で表わす。G_0 の点の generation は 0 であるという。さらに $g \geqq 1$ に対し、$G_g = \varphi_a^g(G_0) - \varphi_a^{g-1}(G_0)$ とおき，

G_g の点の generation は g であるという。

$\boxed{\text{定義 6}}$ γ が $C^2(b)$-curve であるとは、γ はある関数 $y = y(x)$ のグラフであり、微分について、$|\dot{y}|, |\ddot{y}| \leqq \sqrt[4]{b}$ となるときをいう。

$\delta_0 = 5(2-a) > 0$ とおく。$G_0 \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ は $C^2(b)$-curve となる。実際、$G_0 \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ が関数 $y = y(x) = y_\varphi(a, x)$ のグラフであるとすると、

$$\|y_\varphi\|_{C^2(a,x)} \leqq \text{const}\sqrt{b} << \sqrt[4]{b}$$

となる。また、$n \geqq 1$ が与えられたとき、任意の $g \leqq n$ に対し $G_g \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ は 2^{g-1} 個の成分からなり、それぞれの成分は $C^2(b)$-curve となる。ここで、n を大きく取る為には，$b > 0$ を十分小さくしなければならない。

$0 < c_0 < \log 2$ を固定する。次の補題より，$z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$ は時間 N-1 まで e^{c_0}-expanding となる。

$\boxed{\text{補題 6.1}}$ $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(c_0, \delta) > 0$，$b_0 = b_0(c_0, \delta) > 0$ が存在して、$a \in [2-\varepsilon_0, 2+\varepsilon_0]$，$0 < b < b_0$ ならば、φ_a は次の性質をもつ。z_0 に対し、$(x_k, y_k) = z_k = \varphi_a^k(z_0)$ $(k \geqq 0)$ とおく。$|x_k| \geqq \delta$ $1 \leqq {}^\forall k \leqq n$ ならば、z_1 における単位ベクトルで $|\text{slope}(v)| \leqq \sqrt[4]{b}$ となる v に対し

(a) $|\text{slope } D\varphi_a^k(z_1) \cdot v| \leqq \sqrt[4]{b}$,

$$\| D\varphi_a^{k}(z_1)\cdot v\| \leqq a\,|x_k|\,\| D\varphi_a^{k-1}(z_1)\cdot v\|$$
$$(1 \leqq {}^\forall k \leqq n)$$

(b) $|x_0| \leqq \delta$ または $|x_{n+1}| \leqq \delta$ ならば、

$$\| D\varphi_a^{n}(z_1)\cdot v\| \geqq e^{nc_0}$$

従って、§4で見たように、$z_1^{(0)}$ における k 次の critical approximation $e^{(k)}(z_1^{(0)})$　$(1 \leqq {}^\forall k \leqq N-1)$ が定義される。

$$\sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

とおき，$\sigma = \sigma_1^{N-1}$ とする。補題4.2から，$|x| < \sigma$ となる $z = z(x) = (x, y(x)) \in G_0$ に対し $\varphi_a(z(x))$ は $N-1$ まで expanding である。$1 \leqq k \leqq N-1$ とし、$e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$ を $\varphi_a(z(x))$ における k 次の critical approximation とする。$g^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ を $(g^{(k)}(x), 1)$ が $e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$ に平行になる様にとる. critical approximation は nearly vertical であるから、

(5、1)
$$|g^{(k)}(x)| \leqq \sqrt{b}$$

また 補題4.3より

(5、2)
$$|\dot{g}^{(k)}(x)| \leqq 2KK_0\sqrt{b}$$

$\varphi_a(z(x))$ における W^u の接線の方向を $(t(x), 1)$ とおくと

$$t(x) = \frac{A(z(x)) + B(z(x))\,\dot{y}(x)}{C(z(x)) + D(z(x))\,\dot{y}(x)}$$

ここで $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D\varphi_a$。 これより

(5.3) $$|\dot{t}(x)| \geqq \frac{1}{K\sqrt{b}}$$

$z(0) = (0, y(0))$ であるから、明らかに

(5.4) $$|t(0)| \leqq 2K^2$$

上の (5.1)〜(5.4) より

$$|t(0) - g^{(1)}(0)| \leqq 3K^2$$
$$|\dot{t}(0) - \dot{g}^{(1)}(0)| \geqq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

$b > 0$ は十分小だから、$x^{(1)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して

$$t(x^{(1)}) = g^{(1)}(x^{(1)})$$

ここで $|x^{(1)}| \leqq 6K^3\sqrt{b}$ となる。 $z_0^{(1)} = (x^{(1)}, y(x^{(1)}))$ とおく。構成から $\varphi(z_0^{(1)})$ は 1次の critical approximation となる。

補題4.1 (a) より

$$|g^{(2)}(x^{(1)}) - g^{(1)}(x^{(1)})| \leqq 3K^2 b$$

(5.2), (5.3) より

$$|t(x^{(1)}) - g^{(2)}(x^{(1)})| \leqq 3K^2 b$$
$$|\dot{t}(x) - \dot{g}^{(2)}(x)| \geqq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

よって、$x^{(2)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して

$$t(x^{(2)}) = g^{(2)}(x^{(2)})$$

ここで $$|x^{(2)} - x^{(1)}| \leqq 6K^3 K\sqrt{b}$$

$z_0^{(2)} = (x^{(2)}, y(x^{(2)}))$ とおく。これは2次の critical approximation である。以下同様にして、各 $1 \leqq k \leqq N-1$ に対し

$z_0^{(k)} = (x^{(k)}, y(x^{(k)}))$, $x^{(k)} \in (-\sigma, \sigma)$ がただ一つ存在して，k 次の critical appraximation となる。また，

$$|z_0^{(k+1)} - z_0^{(k)}| \leqq 10\sqrt{b}\; K^{k+2}\, b^k \leqq (Kb)^k$$

以上で，N-1 までの次数の critical approximation が G_0 の中の y 軸に近い所に構成された。

次に，すでにある critical approximation から次の critical approximation を構成する為のアルゴリズム A, B について述べる。

$0 < c < c_0$ となる c を固定する。

アルゴリズム A　γ は W^u の中の $C^2(b)$-curve で，$z_0^{(n-1)} \in \gamma$ とする。$z_1^{(n-1)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$ は時間 n まで e^c-expanding であり，$z_0^{(n-1)}$ は $n-1$ 次の critical approximation であるとする。さらに，γ の両端点は，$z_0^{(n-1)}$ から σ_1^n の距離にあると仮定する。このとき，補題4.2より，γ のすべての点 z は時間 n まで expanding であり，$\varphi_a(z)$ における n 次の contractive approximation $e^{(n)}(\varphi_a(z))$ が定まる。上で述べた議論から，n 次の critical approximation $z_0^{(n)} \in \gamma$ が存在して

$$|z_0^{(n)} - z_0^{(n-1)}| \leqq (Kb)^n \quad (\leqq \sigma_1^n)$$

となる。 □

アルゴリズム B　γ, $\bar{\gamma}$ を W^u の中の $C^2(b)$-curve とする。$|x - x_0| \leqq l$ となる x に対し，γ の点は $z(x) = (x, y(x))$ で表わされ，$\bar{\gamma}$ の点は $\bar{z}(x) = (x, \bar{y}(x))$ で表わされているとする。

$z_0 = z(x_0) \in \gamma$, $\zeta_0 = \bar{z}(x_0) \in \bar{\gamma}$ とおく。次の B1, B2 B3 を仮定する。

B1　$\zeta_1 = \varphi_a(\zeta_0)$ は時間 n まで e^c-expanding であり ζ_0 は n 次の critical approximation である。

B2.　$d := |z_0 - \zeta_0| \leqq \dfrac{\sigma_1^{\;2n}}{100\,K^3}$

このとき，補題4.2から $z_1 = \varphi_a(z_0)$ は時間 n まで expanding となる。

B3.　$\ell \geqq 200\,K^3\sqrt{d}$

この仮定より，上で述べた議論が適用でき，n 次の critical approximation $z_0^{(n)} = (x^{(n)}, y(x^{(n)})) \in \gamma$ が存在し，

$$|x^{(n)} - x_0| \leqq 50\,K^3\sqrt{d} \leqq \frac{\ell}{4}$$

が成り立つ。 □

$1 \leqq k \leqq N-1$ に対し，$z_0^{(k)} \in G_0 \cap \{|x| < 1-\delta_0\}$ を上で構成した k 次の critical approximation とし，$\bar{\gamma} = G_0 \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ $\gamma = G_1 \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ とおく。このとき，$\zeta_0 = z_0^{(k)} \in \bar{\gamma}$ に対し，上のアルゴリズムBの仮定がすべて成り立つ。従って k 次の critical approximation $w_0^{(k)} \in \gamma$ が構成される。今，$k \leqq N-1$ に対し k 次の critical set $\mathcal{C}_k$ を

$$\mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}, w_0^{(k-1)}\}$$

で定義する。

§6 帰納法の構造

$n \geqq N$ とし、各 $1 \leqq k \leqq n-1$ に対し k 次の critical set $\mathcal{C}_k$ が定義されているとする。以下で述べる仮定 1〜7 が $\mathcal{C}_k$ $(1 \leqq \forall k \leqq n-1)$ に対し仮定されている。

$\boxed{\text{仮定 1}}$ $\mathcal{C}_k$ は $k-1$ 次の critical approximation から成る集合で，各 $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ の generation $\leqq \Theta k$ である。ここで

$$\Theta = \Theta(b) = \frac{100 \cdot 3^r \cdot \log \sigma_1^{-1}}{\log \frac{1}{b}}$$

さらに $z_1^{(k-1)} = \varphi_a(z_0^{(k-1)})$ は時間 k まで e^c-expanding である。 □

$\boxed{\text{仮定 2}}$ $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ とし その generation を $0 \leqq g \leqq \Theta k$ とする。$C^2(b)$-curve $\gamma = \gamma(z_0^{(k-1)}, \rho^{\Theta k})$ が存在し，γ の両端点と $z_0^{(k-1)}$ との距離はそれぞれ $\rho^{\Theta k}$ であり，$\gamma \subset G_g$。ここで

$$\rho = \left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^6 \sigma_2 \qquad \lambda_0 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 \qquad \sigma_2 = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^8}{10K^2}$$

さらに $g \geqq 1$ ならば，$\gamma_0 = \varphi_a^{1-g}(\gamma) \subset G_1 \cap \{|x| \leqq 1-\delta_0\}$ であり，γ_0 に接するベクトルは φ_a^{g-1} で expand する。 □

仮定 2 より，$\gamma(z_0^{(k-1)}, \frac{1}{4}\rho^{\Theta k}) \cap \mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}\}$ となる。従って $\mathcal{C}_k$ の元の数は

$$\# \mathcal{C}_k \leqq 8\left(\frac{K}{\rho}\right)^{\Theta k} \tag{6.1}$$

$\boxed{\text{定義 7}}$ ξ_0 が時間 p まで $\mathcal{C}_k$ に bind されるとは、

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ が存在して

(BC 1) $$|\xi_j - z_j| \leqq h_k e^{-\beta j} \quad 1 \leqq {}^{\forall} j \leqq p$$

ここで $\beta > 0$ は十分小さいとし

$$h_k = 3 - \sum_{i=1}^{k-1} (e^{\beta} \sigma_1)^i \in (2, 3)$$

特に $p = k$ のときは単に、ξ_0 は $\mathcal{C}_k$ に bind されるという。

$\boxed{\text{仮定 3}}$ ξ_0 が $\mathcal{C}_k$ に bind されているならば、$\xi_1 = \varphi_a(\xi_0)$ は時間 k まで e^c-expanding である。 □

$\boxed{\text{仮定 4}}$ $\mathcal{C}_k$ に bind されている点は、$\mathcal{C}_{k-1}$ にも bind されている。 □

§6.1 $\mathcal{C}_n$ の構成.

$\mathcal{C}_{n-1}$ から n 次の critical set $\mathcal{C}_n$ を次の様に構成する。仮定 1 より、$z_0^{(n-2)} \in \mathcal{C}_{n-1}$ に対し、$z_1^{(n-2)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$ は時間 $n-1$ まで e^c-expanding である。また、仮定 2 より、g を $z_0^{(n-2)}$ の generation とすると、$C^2(b)$-curve $\gamma(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-2)}) \subset G_g$ が存在する。$z_0^{(n-2)}$ に §5 のアルゴリズム A を適用し、$n-1$ 次の critical approximation $\zeta_0^{(n-1)} \in \gamma(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-1)})$ を作る。このとき、

(6.2) $$|\zeta_0^{(n-1)} - z_0^{(n-2)}| \leqq (Kb)^{n-2} \leqq \sigma_1^{n-1}$$

となる。$\mathcal{C}_n' = \{\zeta_0^{(n-1)} : z_0^{(n-2)} \in \mathcal{C}_{n-1}\}$ とおく。

次に，各 $\zeta_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'$ に §5 のアルゴリズム B を適用する（適用できない場合はこれを行わない）：$\theta(n-1) < g \leq \theta n$ とし，$\tilde{\gamma}$ を G_g の $C^2(b)$-curve とする。$\tilde{\gamma}$ と $\gamma = (\zeta_0^{(n-1)}, \rho^{\theta n})$ はアルゴリズム B の仮定を満たしていて

$$\mathrm{dist}(\zeta_0^{(n-1)}, \tilde{\gamma}) \leq b^{\frac{1}{20}g} \leq b^{\frac{1}{20}\theta(n-1)} \leq \sigma_1^{n-1}$$

であるとする。このとき，アルゴリズム B によって $n-1$ 次の critical approximation $z_0^{(n-1)} \in \tilde{\gamma}$ が構成され，

(6.3) $$|z_0^{(n-1)} - \zeta_0^{(n-1)}| \leq b^{\frac{1}{50}g} \leq b^{\frac{1}{50}\theta(n-1)} \leq \sigma_1^{n-1}$$

が成り立つ。$\mathcal{C}_0'' = \{z_0^{(n-1)} : \zeta_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'\}$ とおく。

n 次の critical set を $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n' \cup \mathcal{C}_n''$ により定義する。

(6.2)と(6.3) より，時間 n において 仮定 4 が成り立つ。

また 仮定 1 と仮定 2 の前半が成立する。従って，われわれの目的は，時間 n において，仮定 3 を示すことである。この為に，1次元写像と同様，(BA) と (FA) を仮定する必要がある。

§6.2 return, binding point, binding period.

$1 \leq k \leq n-1$ とする。各 $z_0 \in \mathcal{C}_k$ と時間 $\leq k$ に対し，return, binding point, binding period が定義されているとする。

ζ_0 が $\mathcal{C}_k$ に bind されているならば，定義より

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$ が存在して (BC1) が成立する。そこで、ζ_0 の return, binding point, binding period は、z_0 のものと同じであると定義する。

ζ_0 が $\mathcal{C}_n$ に bind されているとする。このとき、ζ_0 は $\mathcal{C}_{n-1}$ に bind されている。従って、この様な ζ_0 と時間 $\leqq n-1$ に対し return, binding point, binding period がすでに定義されている。

$z_0 \in \mathcal{C}_n$ と時間 n に対し return, binding point, binding period を次の様に定める。

z_0 の return $\nu \leqq n-1$ があって、その binding period に n が属している場合：$\nu < n$ をその様な return の中の最大のものとし、ζ_0 を z_ν の binding point とする。$n-\nu$ が ζ_0 の return ならば（このとき、$\zeta_0 \in \mathcal{C}_{n-\nu}$ で、$n-\nu$ は後で述べる ζ_0 の free-return である。)、n を z_0 の bounded return と呼ぶ。$\zeta_{n-\nu}$ の binding point が $\mathcal{C}_{n-\nu}$ から選ばれている（帰納法の仮定）。この点が、z_n の binding point となる。z_n の binding period $[n+1, n+p]$ を、$\zeta_{n-\nu}$ の binding period $[n-\nu+1, n-\nu+p]$ によって定義する。

上の場合でないとき：$|x_n| < \delta$, $z_n = (x_n, y_n)$ であるならば、n を z_n の free return と呼ぶ。この場合、

z_n に対し、ある アルゴリズムで $\mathcal{C}_n$ から ζ_0 をただ一つ選ぶことが出来る。この後で、次が仮定される。

(BA) $$d_n(z_0) := |z_n - \zeta_0| \geqq e^{-\alpha n}$$

ここで $\alpha > 0$ は十分小で $0 < \alpha \ll \beta$ である。

この仮定 (BA) の下で、§3 で述べた (3.1) 等が証明される。ζ_0 を z_n の binding point と定める。binding period $[n+1, n+p]$ を定義する為に、先ず primary binding period $p_0 \geqq 1$ を次を満たす最大の数とする:

(BC2) $$|z_{n+j} - \zeta_j| \leqq h\, e^{-\beta j} \qquad 1 \leqq j \leqq p_0$$

$$h = \frac{1}{10} \exp\left(-50K \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\varepsilon j}\right) \leqq 1.$$

このとき

(6.4) $$p_0 \leqq 5 \log d_n(z_0)^{-1} \leqq 5\alpha n < n$$

が証明される。これは時間 $k \leqq n-1$ に対して仮定されている (仮定 6)。(BC2) より、z_n は時間 p_0 まで ζ_0 に bind される。したがって $[1, p_0]$ において、z_n の return, binding period が定義されている。p を

- p は z_n に対する free iterate すなわち、p は z_n の (定義より ζ_0 の) 任意の binding period に属さない。
- $1 \leqq p \leqq p_0$ の中で最大.

により定める。このとき, $p = p_0$ 又は p は return で

ある。 $p \fallingdotseq p_0$. 正確には $p_0 - p \leqq 10\alpha p_0$ であることが帰納法の仮定により容易に証明される。 また,

$$(6.5) \quad |z_{n+p+1} - \zeta_{p+1}| \geqq |z_{n+p_0+1} - \zeta_{p_0+1}|\, K^{-10\alpha p_0}$$
$$\geqq h\, e^{-\beta(p_0+1)}\, K^{-10\alpha p_0}$$
$$\geqq h\, e^{-2\beta(p+1)}$$

が成り立つ。

$z_0^{(n-1)} \in \ell_n$ が n まで e^c-expanding を示すには, $k \leqq n-1$ に対し binding period $[k+1, k+p]$ において $z_0^{(n-1)}$ は expanding であることが帰納法の仮定から導かれなければならない。 そこで, fold, splitting algorithm について述べる。

§6.3 fold.

$z_0 \in \ell_k$ とし, k は z_0 の free return とする。このとき, primary folding period $[k+1, k+l_0]$ を

$$l_0 = \frac{10 \log K}{\log \frac{1}{b}} \log d_k(z_0)^{-1} + i$$

で定める。ここで $0 \leqq i \leqq 4$ は $k+l_0+1$ が return でなく $2\delta < |x_{k+l_0+1}| < 1-2\delta_0$ を満たすように選ぶ。

p を z_k に対する binding period の長さとすると, (6.5) より

$$p \geqq \frac{\log d_k(z_0)^{-1}}{2(\log K + 2\beta)}$$

よって　$l_0 << p$　となる。　$F = [k+1, k+l]$　が folding period であることを

- $[k+1, k+l]$ の中の任意の return ν に対し ν の perimary folding period の end $\leqq k+l$ である
- $l \geqq l_0$ の中で最小

なより定める。　このとき

- $[k'+1, k'+l']$ が folding period であり，$l'+1 \in F$ ならば　$k'+l' \in F$
- $k+l$ は return でなく，$2\delta < |x_{k+l+1}| < 1-2\delta_0$

が成り立つ。さらに

$$\frac{10 \log K}{\log \frac{1}{b}} \log d_k(z_0)^{-1} \leqq l \leqq \frac{20 \log K}{\log \frac{1}{b}} d_k(z_0)^{-1} + 4$$

となり，　$l \fallingdotseq l_0$ が成り立つ。

binding period と同様，γ_k に bind されている任意の ξ_0 とその return に対し，folding period が定義される。

§6.4　splitting algorithm

§3で述べた分解を正確に述べると次の様になる。

$1 \leqq k \leqq n-1$ とし，ξ_0 は　γ_k に bind されているとする。

各　$0 \leqq \mu \leqq k$　に対し，　$w_\mu = w_\mu(\xi_1) = D\varphi_a^\mu(\xi_1) \cdot (1,0)$

とおく。 w_μ を次の様に分解する。

$$w_\mu = \omega_\mu + \sigma_\mu$$

ここで

1. $\omega_0 = w_0 = (1,0)$, $\sigma_0 = 0$

2. $\tilde{\omega}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu)\cdot\omega_{\mu-1}$, $\tilde{\sigma}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu)\cdot\sigma_{\mu-1}$

3. μ が ξ_0 の return のとき,

$$\tilde{\omega}_\mu = \alpha_\mu\cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) + \beta_\mu\cdot(1,0)$$

ここで l は folding period で,
$e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$ は l 次の contractive
approximation.

とおいて.

$$\omega_\mu = \tilde{\omega}_\mu - \alpha_\mu\cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) = \beta_\mu\cdot(1,0)$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu + \alpha_\mu\cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$$

4. μ が folding period の end $\mu = \mu_1 + l_1$ のとき,

$$\omega_\mu = \tilde{\omega}_\mu + \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1})\cdot e^{(l_1)}(\xi_{\mu_1+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1})\cdot e^{(l_1)}(\xi_{\mu_1+1})$$

一般に $s \geqq 1$ として
$[\mu_1, \mu_1+l_1]$, ⋯ , $[\mu_s, \mu_s+l_s]$ が μ で終るとき,

$$\omega_\mu = \tilde{\omega}_\mu + \sum_1^s \alpha_{\mu_i}\cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1})\cdot e^{(l_i)}(\xi_{\mu_i+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \sum_1^s \alpha_{\mu_i}\cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1})\cdot e^{(l_i)}(\xi_{\mu_i+1})$$

5. 3. , 4. 以外のとき, $\omega_\mu = \tilde{\omega}_\mu$, $\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu$

$\boxed{\text{補題 6.1}}$ $1 \leqq k \leqq n-1$ とし，ξ_0 が $\mathcal{C}_k$ に bind されているならば，各 $0 \leqq \mu \leqq k$ に対し

$$|\mathrm{slope}\ \omega_\mu(\xi_1)| \leqq \sqrt[3]{b}$$

$c_0, c, c_1, \alpha, \varepsilon > 0$ は次の様な関係であるとする。

$$0 < c < c + 2\varepsilon < c_1 < c_0(1-\varepsilon) - \alpha < c_0 < \log 2.$$

各 $1 \leqq k \leqq n-1$ に対し，次の仮定 5，6，7 が仮定されている。

$\boxed{\text{仮定 5}}$ $z_0 \in \mathcal{C}_k$ とし，k が z_0 の free return ならば，binding point $\xi_0 \in \mathcal{C}_k$ が選ばれていて

$$(\mathrm{BA}) \qquad d_k(z_0) := |z_k - \xi_0| \geqq e^{-\alpha k}.$$

ξ_0 が上の ξ_0 に bind されているならば，

$$|\alpha_k(\xi_1)| \leqq 4K\sqrt{b}\,\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|$$

$$\frac{3}{2}a\,d_k(\xi_0) \leqq \frac{|\beta_k(\xi_1)|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} = \frac{\|\omega_k(\xi_1)\|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} \leqq \frac{5a}{2}d_k(\xi_0)$$

さらに，$\mathcal{C}_k$ に bind されている ξ_0 の bounded return $\nu \leqq k$ に対し，

$$|\alpha_k(\xi_1)| \leqq 5K\sqrt{b}\,\|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|$$

$$a\,d_\nu(\xi_0) \leqq \frac{|\beta_\nu(\xi_1)|}{\|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|} \leqq 3a\,d_\nu(\xi_0).$$

$\boxed{\text{仮定 6}}$ $\nu \leqq k$ を $z_0 \in \ell_k$ の return とし $[\nu+1, \nu+p]$ を binding period とすると，

$$p \leqq 5\alpha\nu < \nu$$

さらに，定数 $\tau_1, \tau_2 > 1$ が存在して，ξ_0 が z_0 に時間 $\nu + j \leqq \nu+p-1$ まで bind されているならば，

$$\frac{1}{\tau_1} \leqq \frac{\|\omega_{\nu+j}(\xi_1)\|}{|\beta_\nu(\xi_1)|\ \|\omega_j(\xi_1)\|} \leqq \tau_1$$

ここで ξ_1 は binding point.

時間 $\nu+p$ まで z_0 に bound されているならば

$$\frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\|\ d_\nu(\xi_0)}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} \geqq \tau_2\, e^{\frac{c_1}{3}(p+1)} \geqq 1$$

$\boxed{\text{仮定 7}}$ $F_k(a; z_0)$ を $[1, k]$ における z_0 の free iterate の個数とすると，

(FA) $\quad F_k(a; z_0) \geqq (1-\varepsilon)k$

仮定 5, 6, 7 の下で，仮定 3 を示すことが出来る。実際，$k \leqq n-1$ とし，ξ_0 は ℓ_k に bind されているとする。

$$\|\omega_k(\xi_1)\| = \prod_1^k \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|}$$

である．$1 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_s \leqq k$ を ξ_0 の free return とし，$\nu = \nu_i$ に対する binding period を $p = p_i$ とすると，

仮定 5, 6 より $\quad \displaystyle\prod_{\nu}^{\nu+p} \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|} \geqq \frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\|}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} d_\nu(\xi_0) \geqq 1$

$\mu = \nu_{i+1}$, $q = \mu - \nu - p - 1$ とおいて, 補題6.1より.

$$\prod_{\nu+p+1}^{\mu-1} \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|} = \frac{\|\omega_{\mu-1}(\xi_1)\|}{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\|} = \frac{\|\bar{w}_{\mu-1}(\xi_1)\|}{\|\bar{w}_{\nu+p}(\xi_1)\|} \geqq e^{c_0 q}.$$

ゆえに.

$$\|\omega_k(\xi_1)\| \geqq e^{c_0 F_k - \alpha k} \geqq e^{c_1 k}$$

また $\omega_k(\xi_1)$ と $\bar{w}_k(\xi_1)$ の関係は.

$\boxed{\text{補題6.2}}$ $1 \leqq \mu \leqq k \leqq n-1$ とし, ξ_0 は ℓ_k に bind されているとすると,

$$K^{-5} e^{-\varepsilon\mu}\|\omega_\mu(\xi_1)\| \leqq \|\bar{w}_\mu(\xi_1)\| \leqq K^6 e^{(\varepsilon+\alpha)\mu}\|\bar{w}_\mu(\xi_1)\|$$

ゆえに

$$\|\bar{w}_k(\xi_1)\| \geqq K^{-5} e^{(c_1-\varepsilon)k}$$
$$\geqq e^{ck} \qquad (N\text{は十分大}).$$

§6.1で構成された ℓ_n に対し, 仮定5, 6が成立することを(BA)を仮定して, 証明し, その後に, (BA)と(FA)によって除かれるparameter a の評価を行う。そして時間 $n+1$ に進む。すべての時間において, (BA)と(FA)が成り立っていれば帰納法が完結する。

References

[B] G. Belitskii Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings, Russian Math. Surveys 33, 1 (1978) 107-177.

[BC] M. Benedicks and L. Carleson, The dynamics of the Hénon map, Ann. Math. 133 (1991), 73-169.

[H] M. Hénon A two dimensional mapping with a strange attractor, Comm. Math. Phy. 50 (1976), 69-77

[MV] L. Mora and M. Viana, Abundance of strange attractors, preprint.

[P] R. Plykin, On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades, Russian Math. Surveys 39, 6 (1984), 85-131.