数理解析研究所講究録
第806巻 1992年 117-128

C^1-closing lemma

都立大　守安　一峰

(Kazumine Moriyasu)

力学系理論の基礎となる定理にC^1-closing lemmaがある。この定理は微分同相写像に対してだけではなく正則写像に対しても成り立つことがL.Wen[6]によって解明された。L.Wenの証明は、C.Pugh－C.Robinson[5]やJ.Mai[2]の微分同相写像の場合の証明に比べ非常に簡潔なものとなっている。

ここでは、L.Wen の証明の概略を述べる。ただし、正則写像の場合には記号が煩雑になるので、微分同相写像に対して述べる。

§1. 定義と定理

いま、M を閉多様体とし、$\mathrm{Diif}^1(M)$を C^1微分同相写像全体の集合でC^1－位相を持つものとする。$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$に対してMの点 xが非遊走点であるとはxの任意の近傍 Uに対して $U\cap f^n(U)\neq \phi$ なる$n>0$が存在するときをいう。非遊走点の全体を

$\Omega(f)$で表す。このとき、$\Omega(f)$はf不変な閉集合である。Mの点xがある$n>0$に対して$f^n(x)=x$を満たすときxを周期点といい、周期点の全体を$P(f)$で表す。特に、$f(x)=x$を満たすときxを固定点という。

定理A. (C^1-closing lemma)

Mの点qを$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$の非遊走点とする。このとき、fの任意の近傍$\mathcal{U}(f)$に対してある$m>0$が存在して次を満たす。qの任意の近傍Uに対して

(1) $f(y)=g(y)\quad (y\in M-\bigcup_{i=0}^{m} f^{-i}(U))$

(2) $P(g)\cap U\neq \phi$。

を満たす$g\in\mathcal{U}(f)$が存在する。

定理B. (C^1-general density theorem)

集合$\mathcal{R}=\{f\in \mathrm{Diff}^1(M):\Omega(f)=\overline{P(f)}\}$は、$\mathrm{Diff}^1(M)$のresidual集合である。

§2. 定理Bの証明

この章では、定理Aを認めた上で定理Bの証明を与える。

いま、$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$とする。fの固定点pが双曲的であるとは、fの点pでの微分D_xfの固有値が大きさ1を持たないときを

いう。

補題2.1.(Hartman-Grobmann)

pを$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$の双曲型固定点とする。このとき、xの任意の近傍Uに対して次のことを満たすfの近傍$U(f)$が存在する。$U(f)$に属する任意のgは、Uの中にgの双曲型固定点を持つ。

補題2.2.(Franks[1])

$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$とする。このとき、fの任意の近傍$U_0(f)$に対してある$\varepsilon(1)>0$とfの近傍$U_1(f)$が存在して次のことを満たす。すべての$g\in U_1(f)$と互いに素な有限集合$\{x(1),x(2),\cdots,x(N)\}\subset M$と$\|L_i-D_{x(i)}g\|<\varepsilon(1)$を満たす線形同型写像$L_i:T_{x(i)}M\to T_{g(x(i))}M$ $(1\leqq i\leqq N)$に対してある$g'\in U_0(f)$と$B_{4\delta}(\{x(1),\cdots,x(N)\})\subset U$を満たす$\delta>0$が存在して

(1) $g'(x)=x$ $(x\in\{x(1),\cdots,x(N)\}$

$\cup\{M-B_{4\delta}(\{x(1),\cdots,x(N)\})\})$

(2) $g'(x)=\exp_{g(x(i))}\circ L_i\circ\exp^{-1}_{x(i)}(x)$ $(x\in B_\delta(x(i)))$

を満たす。ただし、$B_\delta(x)=\{y\in M:d(x,y)\leqq\delta\}$。

定理Bの証明. $\{W_k\}$をMの可算基とする。このとき、$\mathrm{Diff}^1(M)$の部分集合F_kとH_kを次のように定義する

$$F_k=\{f\in \mathrm{Diff}^1(M):P(f)\cap W_k=\phi\},$$

$$H_k=\{f\in \mathrm{Diff}^1(M):HP(f)\cap W_k\neq\phi\}。$$

ここで、HP(f)はfの双曲型周期点全体の集合である。

補題2.1.より、あきらかにH_kは$\mathrm{Diff}^1(M)$の中で開集合である。さらに、補題2.2.より、もし$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$がW_kの中に周期点pを持てばfにいくらでも近いgでpを双曲型周期点として持つものが存在することが解る。したがって、$H_k\cup\{\mathrm{int}F_k\}$は$\mathrm{Diff}^1(M)$の中で稠密な開集合である。

$B=\bigcap_k\{H_k\cup\{\mathrm{int}F_k\}\}$とする。このとき、Bはresidual集合である。さらに、$f\in B$ならば$\Omega(f)=\overline{P(f)}$が成り立つ。なぜなら、Uを$x\in\Omega(f)$の任意の近傍とする。このとき、ある$W_k\in\{W_k\}$が存在して$x\in W_k\subset U$を満たす。定理Aよりある$g\in H_k\cup\{\mathrm{int}F_k\}$が存在して$P(g)\cap W_k\neq\phi$を満たす。さらに、$f\in H_k\cup\{\mathrm{int}F_k\}$なので、$f\in H_k$となる。従って、$U\cap P(f)\neq\phi$。Uは任意の近傍だったので$x\in\overline{P(f)}$すなわち$\Omega(f)=\overline{P(f)}$。

§3. 定理Aの証明

まず、基本的な摂動方法を２つ準備する。$\|\cdot\|$はTMのリーマン計量、そして$T_pM(\xi)=\{v\in T_pM:\|v\|\leq\xi\}$とする。このとき、ある$\xi>0$が存在してすべての点$p\in M$に対して$\exp_p:T_pM(\xi)\to M$を埋め込み写像とすることが出来る。

補題3.1.　任意の$\eta>0$に対してある$\varepsilon>0$が存在して次を満たす。すべての$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$とMの点pと $B(v(2),\|v(1)-v(2)\|/\varepsilon)\subset T_pM(\xi)$を満たす$T_pM$の点$v(1),v(2)$に対してある微分同相写像$h=h(p,\varepsilon,v(1),v(2)):M\to M$が存在して

(1) $h(\exp_p(v(2)))=\exp_p(v(1))$,

(2) $\mathrm{supp}(h)\subset \exp_p(B(v(2),\|v(1)-v(2)\|/\varepsilon))$,

(3) $d_1(hf,f)<\eta$。

ただし、 $B(v,r)=\{u\in T_pM:\|v-u\|<r\}$,

d_1は$\mathrm{Diff}^1(M)$上の距離。

$q\in M$を$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$の周期点ではない点とする。このとき、$m>0$と$\lambda>0$に対して$f_1=f_1(q,m,\lambda):M\to M$を次のように定義する。$W(x)=\{y\in M:d(x,y)\leqq\lambda\}$, $V(x)=\{y\in M:d(x,y)\leqq\lambda/4\}$とおく。さらに、 $x=f^{-n}(q)$ $(1\leqq n\leqq m)$に対して

$$F_x(y)=\begin{cases}\exp_{f(x)}(D_xf)\exp_x^{-1}(y) & (y\in V(x))\\ f(y) & (y\notin W(x))\end{cases}$$とする。

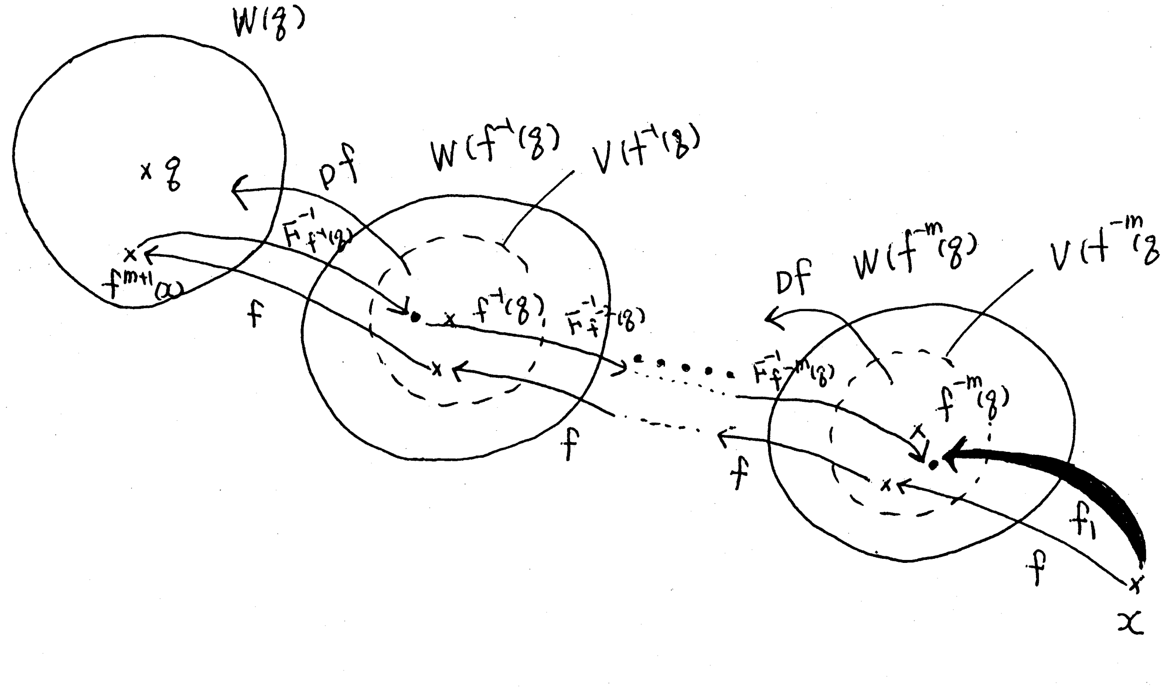
このとき、

$$f_1(y)=\begin{cases}F_{f^{-n}(q)}(y) & (y\in f^{-n}(W(q)))\ (1\leqq n\leqq m)\\ F^{-1}_{f^{-m}(q)}\circ F^{-1}_{f^{-m+1}(q)}\circ\cdots\circ F^{-1}_{f^{-1}(q)}f^{m+1}(y) & \text{その他}\end{cases}$$

とする。補題2.2.より$\lambda>0$を十分小さくとればfとf_1はいくらでも近くとれる。この摂動を局所線形摂動という。

L. Wenのアイデアは、このf₁の構成と次の定理3.2.である。f_1は、局所的に線型部分を持つというだけではなく、次のような性質を持つ。もし$z, f_1^k(z) \notin \bigcup_{n=0}^{m} \bigcup_{i=0}^{m-n} f^{-i}(W(f^{-n}(q)))$ならば$f_1^k(z) = f^k(z)$が成り立つ。この性質を使うことにより周期点を構成するために行う写像の摂動は、非常に簡単なものとなる。

注意）補題2.2.はC^1-位相に対してのみ成り立つ結果である。従って、f_1をC^2－位相でfに近いものとしてとることは出来ない。



次の定理3.2.は、摂動の基準となる点を決定する結果である。この定理は楕円形の最長部分と最短部分の長さを比較するという初等的な計算によって示されている。

定理3.2.　Mの点qは$f\in\mathrm{Diff}^1(M)$の周期点ではない点とする。このとき、任意の$\varepsilon>0$に対してある$\rho>2$と$m\geqq1$が存在してT_qM上の任意の有限集合$P=\{p(0),p(1),\cdots,p(t)\}$に対して次を満たす点$y\in P\cap B(p(t),\rho\|p(0)-p(t)\|)$と$w\in P\cap B(p(t),\rho\|p(0)-p(t)\|)$と$c(0),c(1),\cdots,c(m)\in B(p(t),\rho\|p(0)-p(t)\|)$が存在する

(1) $y=p(s),w=p(s')$とすると$s'<s$となる

(2) $c(0)=w,c(m)=y$

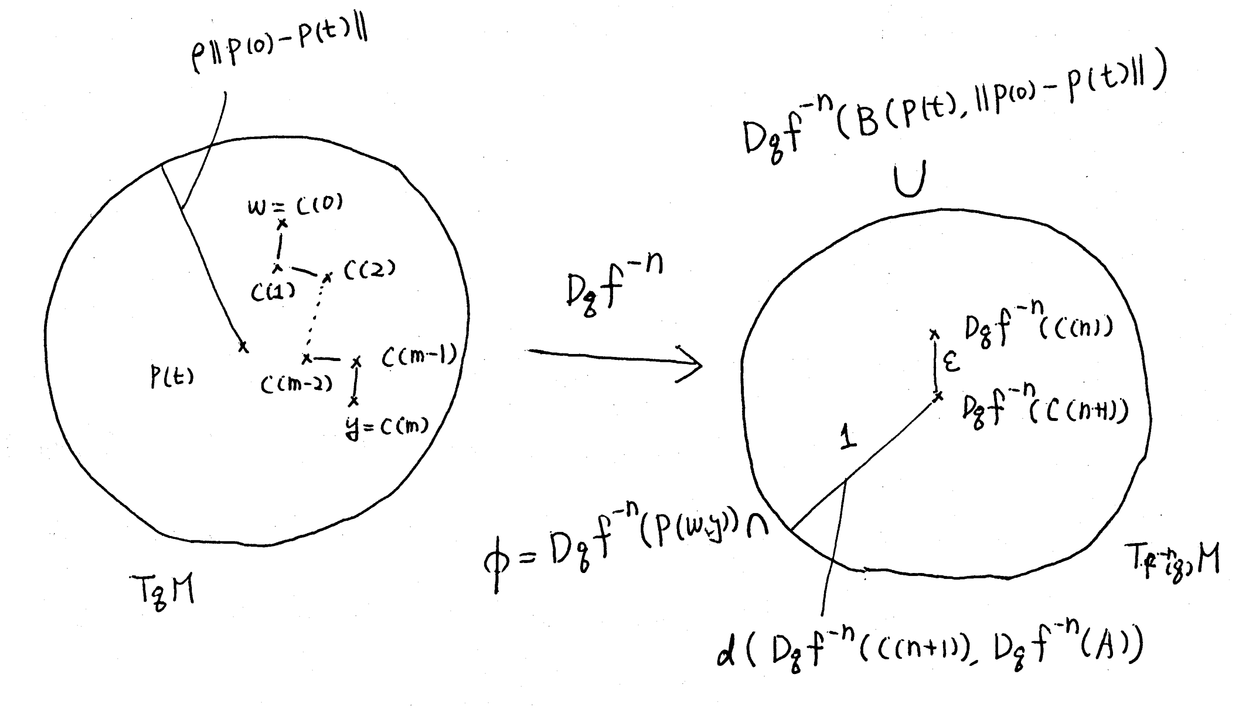
(3) $\|D_qf^{-n}(c(n))-D_qf^{-n}(c(n+1))\|$

$$\leqq\varepsilon\, d(D_qf^{-n}(c(n+1)),D_qf^{-n}(A))\quad(0\leqq n\leqq m-1)。$$

ここで、$A=P(w,y)\cup\partial B(p(t),\rho\|p(0)-p(t)\|)$,

$P(w,y)=\{p(s'+1),\cdots,p(s-1)\}$,

dは$\|\cdot\|$によって与えられたT_qM上の距離。



定理Aの証明

$q\in\Omega(f)$は周期点ではないとしてよい。与えられたfの近傍$U(f)$に対して$\eta>0$を、もし$d_1(f,g)<2\eta$を満たせば$g\in U(f)$となるようにとれる。$\varepsilon>0$は補題3.1.のもの、$\rho>2$と$m\geqq 1$は定理3.2.のものとする。また、mに対して次を満たすように$\lambda>0$を十分小さくとる

(1) $d_1(f_1,f)<\eta$,

(2) $W(q)\subset U$,

(3) $W(f^{-n}(q))\cap W(f^{-n'}(q))=\phi \quad (1\leqq n\neq n'\leqq m)$。

$W(q)$上の距離d'を次のように定義する

$$d'(x,y)=\|\exp_q^{-1}x-\exp_q^{-1}y\| \quad (x,y\in W(q))。$$

qの近傍Vを$f^{-n}(\overline{V})\subset V(f^{-n}(q))$かつ$f^{-n}(\overline{V})\subset V(f^{-n}(q))$ $(0\leqq n\leqq m)$を満たすようにとる。このとき、$q\in\Omega(f)$より、ある$a\geqq 1$と$p\in\overline{V}$が存在して$B(f^a(p),\rho d'(p,f^a(p));d')\subset\overline{V}$を満たす。いま、$P=\{p,f^1(p),\cdot\cdot\cdot,f^a(p)\}\cap\overline{V}$ $(=\{p(0),p(1),\cdot\cdot\cdot,p(t)\})$とおく($p(i)=f^{a_i}(p)$としたとき$i<j$ならば$a_i<a_j$)。このとき、$B(p(t),\rho d'(p(0),p(t));d')\subset\overline{V}$が成り立つ。さらに、$P'=\exp_q^{-1}(P)$そして$p'(i)=\exp_q^{-1}p(i)$とすると,$P'=\{p'(0),\cdot\cdot\cdot,p'(t)\}$かつ$B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|)\subset\overline{V}'=\exp_q^{-1}\overline{V}$が成り立つ。従って、定理3.2.より$y'\in P'\cap B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|)$と$w'\in P'\cap B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|)$と$c'(0)$,

$c'(1),\cdots,c'(m)\in B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|)$が存在して次を満たす。

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{cases}
(1)\ y'=p'(s),\ w'=p'(s')\text{とすると}\ s'<s\ \text{となる}\\
(2)\ c'(0)=w',\ c'(m)=y'\\
(3)\ \|D_q f^{-n}(c'(n))-D_q f^{-n}(c'(n+1))\|\\
\qquad \leqq \varepsilon\, d(D_q f^{-n}(c'(n+1)),D_q f^{-n}(A))\quad (0\leqq n\leqq m-1)\text{。}
\end{cases}
$$

いま、$y=\exp_q y'$, $w=\exp_q w'$とすると、ある$b>m+1$が存在して$f^b(w)=y$, $f^i(w)\neq y$ $(1\leqq i\leqq b-1)$を満たす。

(I)(3)と補題3.1.よりある微分同相写像$h_{f^{-n}(q)}:M\to M$ $(0\leqq n\leqq m-1)$が存在して

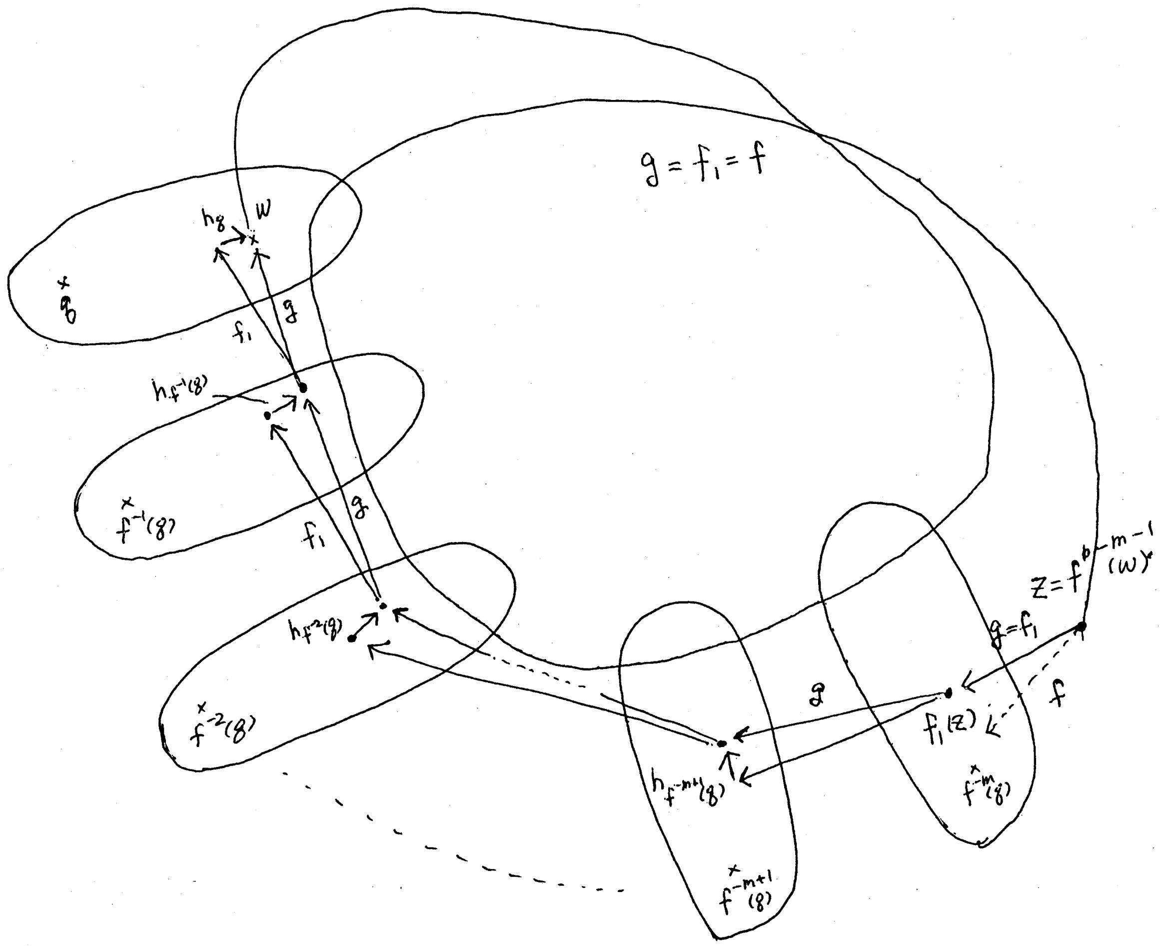
$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{cases}
(1)\ h_{f^{-n}(q)}(\exp_{f^{-n}(q)}\circ D_q f^{-n}(c'(n+1))=\exp_{f^{-n}(q)}\circ D_q f^{-n}(c'(n)),\\
(2)(\mathrm{i})\ \mathrm{supp}(h_{f^{-n}(q)})\cap \exp_{f^{-n}(q)}(D_q f^{-n}(A))=\phi,\\
\qquad (\mathrm{ii})\ \mathrm{supp}(h_{f^{-n}(q)})\\
\qquad\qquad \subset \exp_{f^{-n}(q)}\circ D_q f^{-n}(B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|),\\
(3)\ d_1(h_{f^{-n}(q)}\circ f_1,f_1)<\eta
\end{cases}
$$

を満たす。

また、$B(p'(t),\rho\|p'(0)-p'(t)\|)\subset\overline{V}'$なので(II)(2)(ii)よりもし$n\neq n'$ならば$\mathrm{supp}(h_{f^{-n}(q)})\cap\mathrm{supp}(h_{f^{-n'}(q)})=\phi$である。

微分同相写像gを次のように定義する

$$
g(x)=\begin{cases}
h_{f^{-n+1}(q)}\circ f_1(x) & (x\in W(f^{-n}(q))\ (1\leqq n\leqq m))\\
f_1(x) & (x\notin \bigcup_{n=1}^{m} W(f^{-n}(q)))\text{。}
\end{cases}
$$



このとき、

$$d_1(f,g) \leqq d_1(f,f_1)+d_1(f_1,g) < 2\eta$$

よって、$g \in U(f)$を満たす。

また、$z=f^{b-m-1}(w)$としたとき、次が成り立つ

(a) $g^{b-m-1}(w)=z$,

(b) $g^{m+1}(z)=w$。

なぜなら、

(a):(Ⅰ)(3)と(Ⅱ)(2)(ii)よりすべての$0\leqq l\leqq b-m-1$と$0\leqq n\leqq$

m-1に対して $f_1^j(w) \notin \mathrm{supp}(h_{f^{-n}(q)})$、さらに f_1 の構成方法よりもし $x, f_1^k(x) \notin \bigcup_{n=0}^{m} \bigcup_{i=0}^{m-n} f^{-i}(W(f^{-n}(q)))$ ならば $f_1^k(x)=f^k(x)$ が成り立つ。従って、

$$g^{b-m-1}(w)=f_1^{b-m-1}(w)=f^{b-m-1}(w)=z。$$

(b): $z=f^{-m-1}(y) \in f^{-m-1}(\overline{V})$ なので f_1 の構成方法より

$$\begin{aligned} g(z) &= f_1(z) \\ &= \exp_{f^{-m}(q)} \circ D_q f^{-m} \exp_q^{-1} f^{m+1}(z) \\ &= \exp_{f^{-m}(q)} \circ D_q f^{-m}(y')。\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} g^{m+1}(z) &= g^m(g(z)) \\ &= h_q \circ f_1 \circ h_{f^{-1}(q)} \circ f_1 \circ \cdots \circ h_{f^{-m+1}(q)} \circ f_1(g(z)) \\ &= w。\end{aligned}$$

従って、(a),(b)より $w \in P(g) \cap U$。

REFERENCES

[1] J.Franks,Necessary conditions for stability of diffeomorphisms,Trans.A.M.S.,158(1971),301-308.

[2]J.Mai,A simpler proof of C^1 closing lemma,Scientica Sinica(Series A),Vol.XXIX No.10(1986),1021-1031.

[3]C.Pugh,The closing lemma,Amer.J.Math.,89(1967),956-1009.

[4]C.Pugh,An improved closing lemma and a general density theorem,Amer.J.Math.,89(1967),1010-1021.

[5]C.Pugh and C.Robinson,The C^1 closing lemma, including Hamiltonians,Ergodic Th.and Dynam.Sys.,3 (1983),261-313.

[6]L.Wen,The C^1 closing lemma of non-singular endomorphisms,Ergodic Th.and Dynam.Sys.,11(1991),393-412.