

ベクトル場のホモクリニック分岐と Lorenz-type attractor

京都大学理学部数学教室 国府寛司

目次

1. Introduction
2. Guckenheimer-Williams の geometric Lorenz attractor と Lorenz bifurcation
3. Robinson による invariant foliation の構成
4. Keller-Robinson による Lorenz map の不変測度の存在とその性質
5. Rychlik のホモクリニック分岐定理
6. Robinson のホモクリニック分岐定理

§1. Introduction

Massachusetts 工科大学で気象学を研究していた E. N. Lorenz は 1963 年に発表した論文 [Lor1] で、大気循環による気候変動を説明するために温度勾配を持つ 3 次元流体層における熱対流現象をあらわす偏微分方程式を Galerkin 近似して得られた Saltzman のモデルからさらに reduction を行って次のような常微分方程式系を導いた。

$$(L) \quad \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (\dot{} = \frac{d}{dt})$$

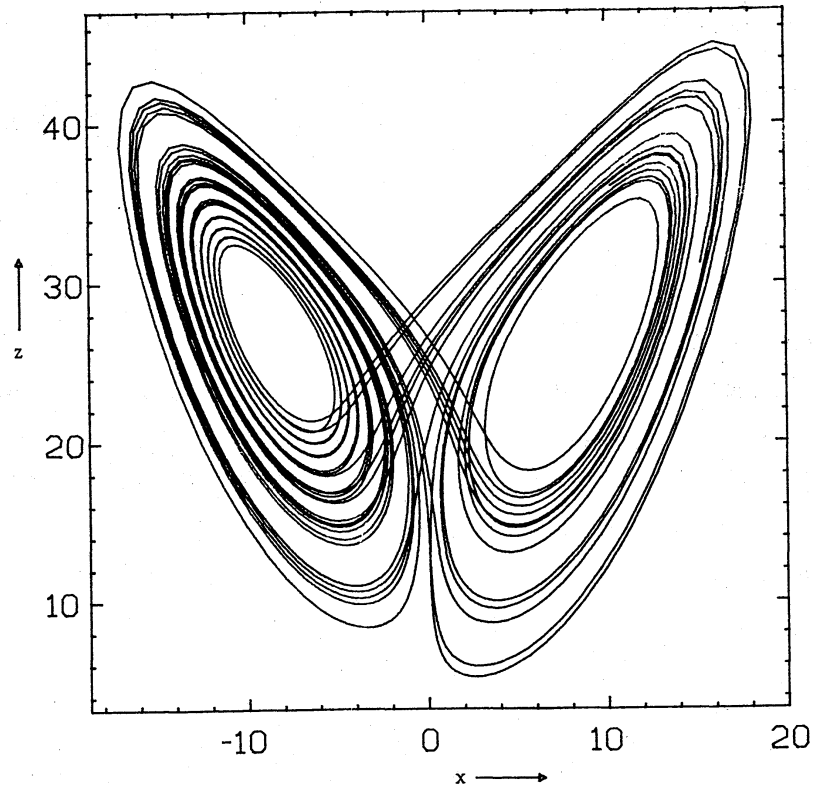
ここで σ, r, b はこの方程式のパラメータで、 σ は Prandtl 数、 r は Rayleigh 数と呼ばれる流体力学的定数を表わし、また b は対流現象を考えている領域の幾何学的形状によって決まる定数である。詳しくは丹羽 [Niw; 付録 2] を参照せよ。その後、Lorenz [Lor2] は W. Malkus が実験室中での water wheel の運動方程式からこの方程式を直接導いたことを報告している。これについては Sparrow [Spa; Appendix B] を参照せよ。

Lorenz がこの方程式で特に

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}$$

としてコンピュータによる数値実験を試みたところ、次の図のような解を発見した。この図 1 は次のようにして得られた：原点 $(0, 0, 0)$ の近く（例えば $(x, y, z) = (0, 0.01, 0)$ ）に初期値をとり、その点から方程式 (L) を数値積分によって解いて解 $(x(t), y(t), z(t))$ の描く近似曲線を求め、その $x-z$ 平面への射影を図示する。Lorenz の数値実験によればこの

図 1



曲線は時間刻みを $\Delta t = 0.01$ として約6000ステップまでの計算をしても、単純な解に収束することなく極めて不規則な仕方で2つの平衡点のまわりをまわり続けるように見える。コンピュータによる数値計算は誤差を必然的に含んでおりまたこの図形は初期値やパラメータの値を微小に変化させても依然として観察されることから、Lorenzはこのような不規則な解が方程式(L)において何らかの意味で安定に存在しており、それが実は大気循環の不規則性、ひいては気象現象の予測の困難さを示していると考えたようである。このような不規則性を持った解は今日ではカオス (chaos) - 渾沌 - 現象を示すものとして数学的考察の対象となっているが、Lorenzの発見した解はそのような研究の端緒を開いたものの一つであり、特にこの図にみられる奇妙な解は Lorenz attractor と呼ばれている。

i) Lorenz方程式の簡単な性質

(イ) 解の大域的存在と一意性：Lorenz方程式(L)は完備である。すなわち任意の初期値に対しそこを通る解が時間大域的かつ一意的に存在する。詳しくはCoomes [Coo; Lemma 3.1]を参照せよ。

(ロ) 不変領域：関数 $V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$ は方程式(L)に沿って

$$\frac{dV}{dt} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz)$$

をみます。そこで領域 D を

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{dV}{dt} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz) \geq 0 \right\}$$

と定めるとこれは \mathbf{R}^3 内の有界閉領域であり、 D 上での関数 V の最大値を M とするとき適当な正の数 ε に対して

$$E = \{ (x, y, z) \mid V(x, y, z) \leq M + \varepsilon \}$$

とすると、 E の境界上では $\frac{dV}{dt} \leq 0$ であるから方程式(L)の定めるベクトル場は E の境界上至るところ内向きである。さらに E の外の任意の点から出る軌道は有限時間のうちに E に到達する。従ってLorenz方程式にみられる漸近的挙動はすべて楕円体領域 E の内部に閉じ込められている。

(ハ) 負の発散：Lorenz方程式(L)の定めるベクトル場の divergence は $-(\sigma + b + 1)$ で至るところ負の一定値をとる。従って(ロ)で述べたこととあわせると、図1で観察されるLorenz attractorを含む方程式(L)のいわゆる極大コンパクト不変集合は体積0の連結な閉集合に含まれることがわかる。

(ニ) 対称性：方程式(L)は involution

$$I: (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$$

で不変である。またこの対称性から、特に z -軸は方程式(L)に関して不変である。

(ホ) 平衡点とその分岐：原点 $O = (0, 0, 0)$ はLorenz方程式の平衡点であり、 $r > 1$ のときはさらに2つの平衡点 $E_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ を持つ。これらおよび関連するLorenz方程式の分岐について簡単にまとめておく。以下ではパラメータの具体的な数値はとくに断らないかぎり $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ のときのものである。

[1] $0 < r < 1$ ----- 原点 O が唯一の attractor である。実際このときはLyapunov関数として

$$V(x, y, z) = x^2 + \sigma(y^2 + z^2)$$

がとれる。

[2] $r = 1$ ----- 原点 O が pitchfork 分岐を起こし、2つの安定な平衡点 E_{\pm} が出現する。このときの原点での固有値は $0, -b, -(1 + \sigma)$ である。

[3] $1 < r < \frac{470}{9}$ - 原点 O は不安定化し saddle となる。その固有値は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ -(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r} \right\}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ -(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r} \right\}, \lambda_3 = -b$$

であり、 $r > 1 + \frac{b(\sigma + 1 + b)}{\sigma} \approx 4.644$ のとき

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$$

となる。そこでこれらの固有値を $\lambda_1 = \lambda_u, \lambda_3 = \lambda_s, \lambda_2 = \lambda_{ss}$ と書くこともある。一方平衡点 E_{\pm} は $r > 1.346\dots$ では複素共役な固有値を持ち、またどの固有値も

$$r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} = \frac{470}{19} \approx 24.74$$

の範囲では負の実部を持つので平衡点 E_{\pm} はこの範囲で安定である。

数値実験によれば $1 < r < 24.06\dots$ ではこの平衡点 E_{\pm} が大域的にも安定であって、すべての軌道はこれに漸近するようである。しかし $r = 13.926\dots$ で原点のホモクリニック軌道が形成され、 $r > 13.926\dots$ ではそこから不安定な周期軌道が分岐する。この周期軌道は r が大きくなるにつれて次第に平衡点 E_{\pm} に近づき、 $r = 24.74\dots$ で E_{\pm} につぶれてしまう。周期軌道が十分に平衡点に近づくと、 $r < 24.06\dots$ であってほとんどの軌道は平衡点に収束する前に過渡的ではあるが極めて長い時間にわたって非周期的で複雑な動きをみせるようになる。このような現象はpreturbulence (Kaplan-Yorke [KaYo])またはmetastable chaos (Yorke-Yorke [YoYo])と呼ばれている。さらに $r = 24.06\dots$ をこえると、安定な平衡点以外にstrange attractorが出現する。(McLaughlin-Martin[McMa]はstrange attractorが出現するのは $r = 24.74\dots$ のHopf分岐の後であると述べたが、それは誤りである。)

[4] $r = \frac{470}{19}$ ---- このとき平衡点 E_{\pm} はsubcritical Hopf分岐を起こして不安定化し、それと同時に不安定な周期軌道が消滅する。このときの E_{\pm} の固有値は

$$-(\sigma+b+1), \pm i\sqrt{\frac{2\sigma(\sigma+1)}{\sigma-b-1}}$$

である。詳しい計算についてはMarsden-McCracken [MaMc]を参照せよ。

[5] $\frac{470}{19} < r$ ---- この範囲の r では $r < 30$ 程度まではstrange attractorが存在し、それ以外のattractorは数値実験では存在しないようである。一方十分大きい r については様々なattractorや分岐現象が調べられている。以下Sparrow [Spa;Chap.4]にしたがってその概略をまとめておく。

Franceschini [Fra] は $99.524\dots < r < 100.795\dots$ のときにみられる非対称周期軌道の周期倍分岐について調べた。

Manneville-Pomeau [MaPo1,2] は $145 < r < 166.07\dots$ のときにみられる対称周期軌道の周期倍分岐および $r = 166.07\dots$ の近くでみられるintermittent chaosについて調べた。

Robbins [Robb], Lorenz [Lor3] は $r > 214.364\dots$ のときにみられる対称周期軌道の周期倍分岐を調べた。また $r = \infty$ ではLorenz方程式が積分可能であることに注目して、これらの分岐を $r = \infty$ からの摂動として調べた。

さらにShimizu-Morioka [ShMo], Shimada-Nagashima [ShNa] は $\sigma = 16, b = 4$ の場合に同様の周期倍分岐を調べた。

(へ) Lorenz plot と 1次元写像：図1のLorenz attractor上の点から出る軌道 $(x(t), y(t), z(t))$ に対し、その z -座標 $z(t)$ の n 番目の極大値を z_n とするとき、点 (z_n, z_{n+1}) をプロットすると図2のような極めて1次元性の高い図形が得られる。このことは点 (z_n, z_{n+1}) はすべてある単一の1次元写像のグラフ上の点としてよく近似されることを示している。この図形をLorenz plotと呼ぶ。図1のLorenz attractor上でこのような極大値 z_n を達成する点の集合を考えるとこれはすべて $-bz + xy = 0$ で与えられる2次元曲面 S の上であって、そこから出発して再び S 上に戻る点を対応させる写像は非常に強い1次元性を持ち、その1次元部分が図2のような写像に支配されることを示唆する。

この図2の写像はLorenz方程式の対称性を良く反映したものでないので、図3のような断面 Σ に取りかえてそれについて上と同様の操作を行うと、数値実験ではやはり図

4のような1次元的図形が得られる。これを表現する1次元写像をLorenz mapと呼ぶ。断面 Σ が対称性 $\iota: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ で不変であるので、このLorenz mapは奇関数の対称性を持つ。

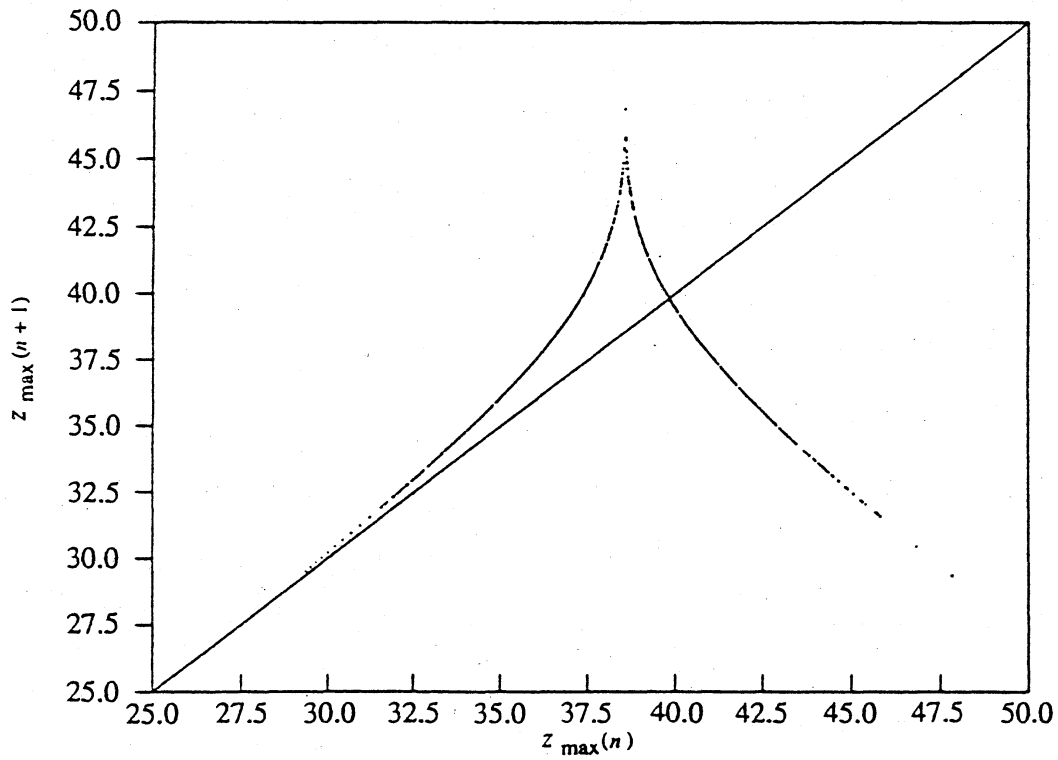


図 2

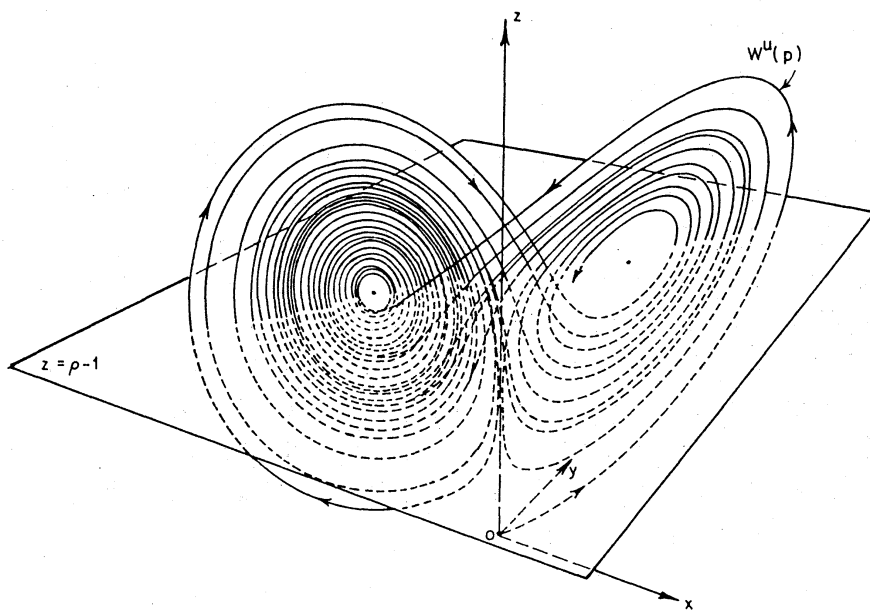
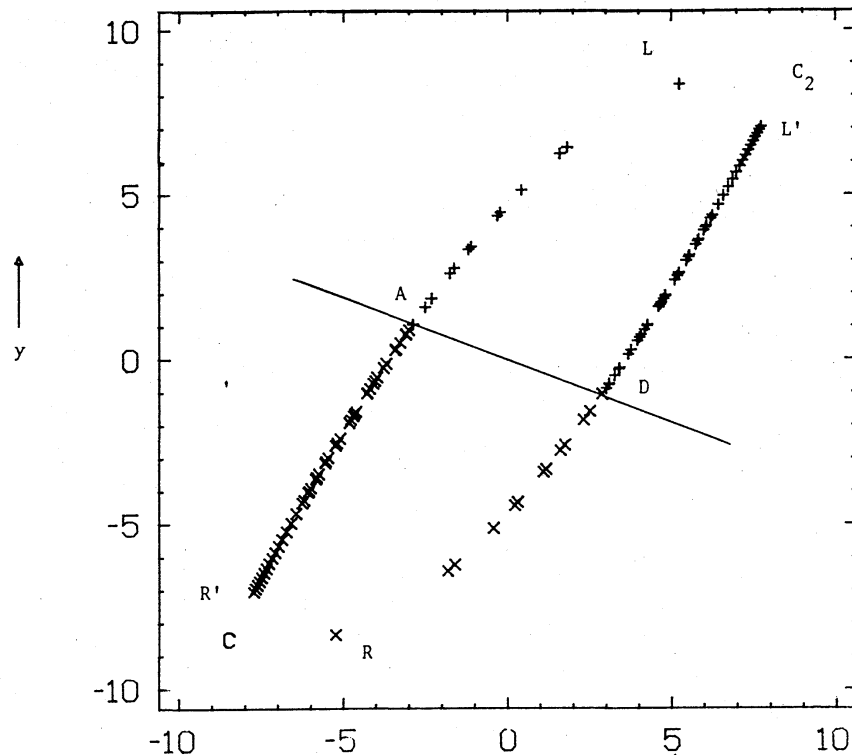


図 3

図 4



(ト) Lorenz mapの分岐 (ホ) 項で述べたLorenz方程式のパラメータ r を変えたときの分岐は図 5(a)–(e)にみられるようにLorenz mapに良く反映する. 実際, 図 5(a)は熊手型分岐によって安定な平衡点 E_{\pm} が発生した状況を示し, 図 5(b)では原点においてsaddle-loop分岐が起こり, そこから発生した不安定周期軌道がLorenz mapの不安定な不動点に対応する. それが図 5(c)の状況に近づくにつれて過渡的な非周期軌道がみられるようになることがわかる. さらに図 5(d)になると安定平衡点 E_{\pm} 以外に原点を含む閉区間が不変になり, その上ではLorenz mapは拡大的になる. これがLorenz attractorのLorenz mapにおける対応物であり, さらに逆向きのHopf分岐を経て図 5(e)に至ると, Lorenz attractorだけが唯一のattractorとして残る.

ii) 本稿の目的

このノートは, 最近 Lorenz attractor の数学的理論に関して得られた著しい成果である Rychlik [Ryc] と Robinson [Rob3,4] のホモクリニック分岐定理の紹介を中心にして, これまでLorenz方程式とそのattractorに関して得られた成果を概観することを目的とする.

第2節では Guckenheimer-Williams [GuWi] による geometric Lorenz attractor の理論と, その構造不安定性について述べる. 第3節では Robinson [Rob1] による geometric Lorenz attractor における strong stable foliation の摂動に対する存続性について紹介する. この strong stable foliation により geometric Lorenz attractor の研究は1次元のLorenz mapの研究に帰着されるが, 第4節ではそのLorenz mapの性質についての Keller [Kel] と Robinson [Rob2] の結果を中心にして述べる. 第5節と第6節ではそれぞれ Rychlik [Ryc] と Robinson [Rob3,4] の定理の概略を述べる.

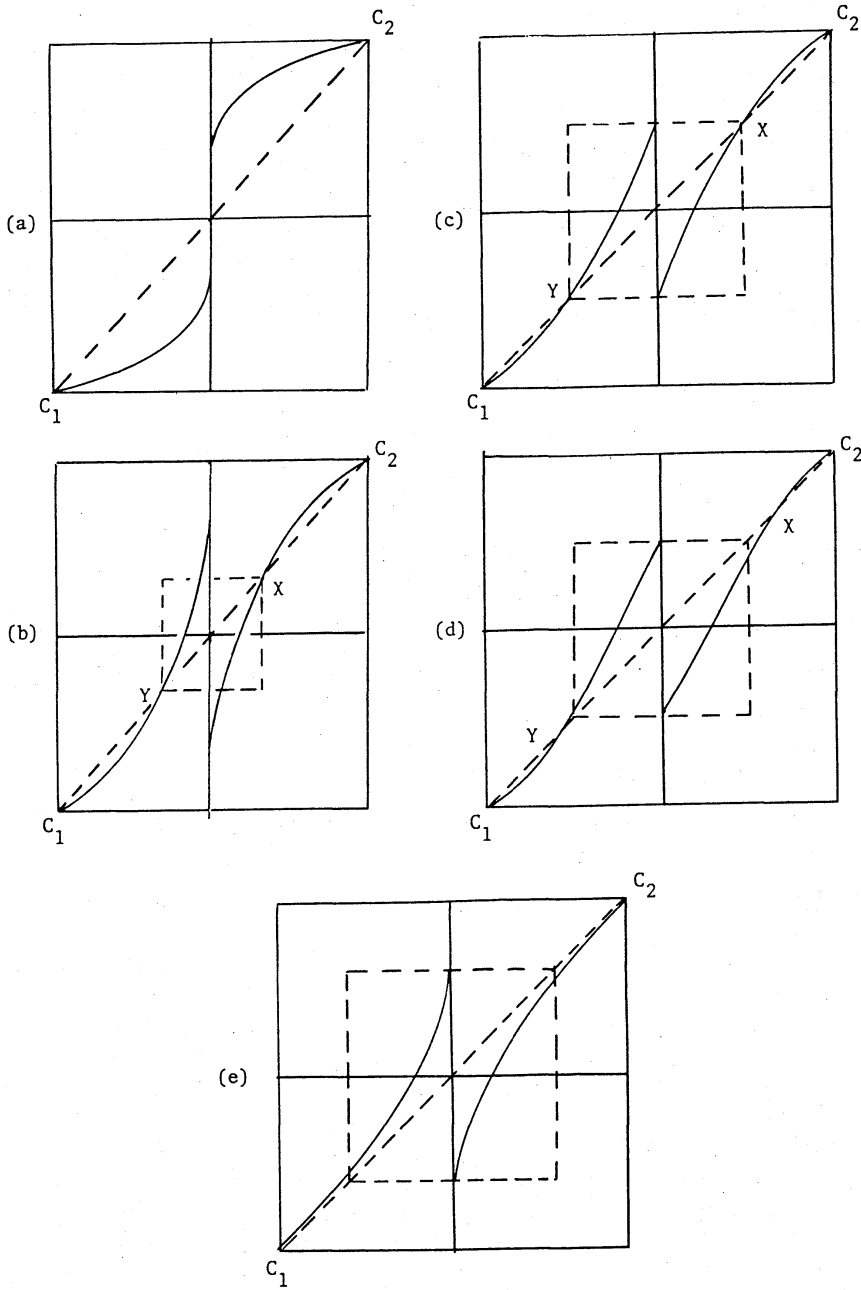


图 5

§2. Guckenheimer-Williamsのgeometric Lorenz attractorとLorenz bifurcation

Lorenz attractorの性質を数学的に解明するために Guckenheimer と Williams は論文 [Guc], [Wil], [GuWi] においてもとの Lorenz 方程式で数値的に観察される strange attractor の性質を抽象して幾何学的に定式化された model flow を提出し, さらにその model flow の持つ attractor の構造についてほぼ完全な記述を与えた. これを geometric Lorenz model と呼び, その attractor を Lorenz 方程式の attractor と区別して geometric Lorenz attractor と呼ぶ. ここではこの geometric Lorenz attractor の性質, 特にそれが Lorenz map と呼ばれる 1次元写像によってほぼ分類され, そのことから geometric Lorenz attractor の構造不安定性が導かれることを示す. この最後の結果は Guckenheimer-Williams [GuWi] によるもので, generic なベクトル場のほとんどすべての軌道は構造安定な attractor に漸近するであろうという Thom の予想 ([Tho;p.59]) を否定的に解いたものである.

i) geometric Lorenz model と geometric Lorenz attractor

\mathbb{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場 X が次の (FP) をみたすものとする.

(FP) [fundamental properties of Lorenz attractor]

- (a) $X(O) = 0$ かつ $DX(O)$ の固有値 $\lambda_u, \lambda_s, \lambda_{ss}$ は実で $\lambda_u > 0, \lambda_s, \lambda_{ss} < 0$ をみたす;
 (b) X は involution

$$i: (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$$

で不変である;

- (c) z -軸は λ_s の固有空間である;
 (d) $|\lambda_{ss}| \geq |\lambda_u| + |\lambda_s| \geq 2|\lambda_s|$.

Lorenz 方程式はこれらの性質を確かにみたしており, さらに適当な定数 C, δ について決まる長方形

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| < C, z = \delta\}$$

が Lorenz 方程式の定める flow の局所断面を与える. 以下では座標を規格化して

$$\Sigma = I \times I = [-1, 1]^2$$

とする. 図1のような数値実験によればこの局所断面 Σ について次の性質を仮定することはもっともらしい.

(GL0) [confinement of Poincaré map]

Σ 上の点は flow により再び Σ 上に戻る. これにより定まる Poincaré 写像を Π であらわす. Π は $x=0$ でのみ不連続である.

(GL1) [existence of strong stable foliation]

Σ 上に Π で不変な曲線の族 F が存在する. $W^s(O) \cap \Sigma$ は F に属する. この F を Σ 上の strong stable foliation という.

(GL2) [hyperbolicity]

Poincaré 写像 Π は F の方向に縮小し, F に横断的な方向に拡大的である.

これは解析的には次のように定式化される。

- (GL0) Poincaré 写像 Π は Σ からそれ自身への C^2 級写像で $x=0$ 以外では 1 対 1, $x=0$ でのみ不連続である。
- (GL1) Σ 上に $x=\text{const.}$ が Π で不変な曲線族 F を定めるような適当な座標系 (x, y) がとれる。 $W^s(O) \cap \Sigma$ は $x=0$ に対応する。 Poincaré 写像 Π は適当な関数 f, g を用いて

$$\Pi(x, y) = (f(x), g(x, y)) \text{ for } x \neq 0$$

と表現される。 また対称性より

$$\Pi(-x, -y) = -\Pi(x, y)$$

がなりたつ。

- (GL2) 関数 f, g は

$$f'(x) > \exists \kappa > 1, \quad 0 < \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) < \exists c < 1 \text{ for } x \neq 0$$

$$f'(x) \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow 0$$

をみたす。

この flow の様子は図 6 のようなものである。

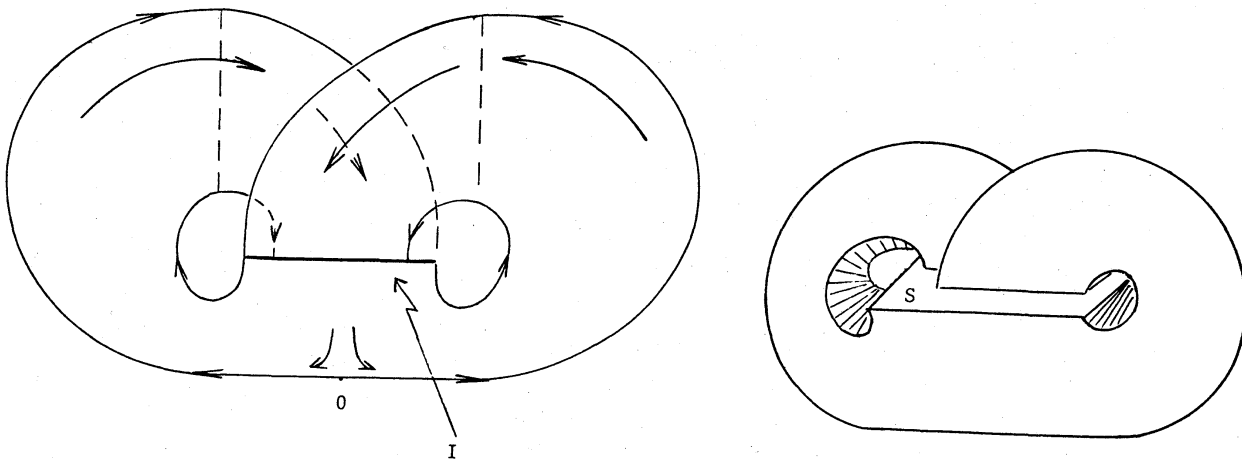


図 6

逆にこれらの性質を持つ \mathbf{R}^3 内の flow ϕ' が与えられれば, 図 6 に示される集合 V はこの flow について正の方向に不変であり,

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi'(V)$$

は attractor を定める. 上の条件 (FP), (GL0)-(GL2) をみたす flow を geometric Lorenz model と呼び, それから上式によって与えられる attractor Λ を geometric Lorenz attractor と呼ぶ. もとの Lorenz 方程式 (L) が条件 (GL0)-(GL2) をみたすかどうかは数学的に確かめられていないので図 1 の attractor が geometric Lorenz attractor であることはいまのところ証明されていない.

ii) geometric Lorenz attractor の逆極限による表現

Williams は geometric Lorenz model に対し 2次元 branched surface およびその上の semi-flow を定め, geometric Lorenz attractor はその逆極限として記述されることを示した. それによれば, geometric Lorenz model が与えられればその strong stable foliation の leaf に沿った射影による商空間をとることにより 2次元 branched surface が得られ, 逆に 2次元 branched surface とその上の semi-flow からその逆極限をとることにより geometric Lorenz model と位相同値な flow が得られる. さらにこの逆極限で与えられる flow の性質から geometric Lorenz attractor の構造が数学的に調べられる. ここではその詳細に立ち入らない. 詳しくは Williams [Wil] を参照せよ.

iii) Lorenz map の位相的性質について

ここでは幾何的 Lorenz attractor が対応する Lorenz map によってほぼ完全に分類され, そのことから幾何的 Lorenz attractor の構造不安定性が導かれることを示す.

(イ) Lorenz map の性質: geometric Lorenz attractor の定義 (GL1), (GL2) で与えられる 1次元写像 $f(x)$ を Lorenz map と呼ぶ. 第1, 4節も参照せよ. この写像を規格化して区間 $I = [-1, 1]$ からそれ自身への写像と考えたとき, これは次の性質をみたす.

(LM1) $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である.

(LM2) $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = +1, \lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1, f(0) = 0$.

(LM3) $f \in C^1$ on $[-1, 1] \setminus \{0\}$, and $\exists \kappa > 1$ s.t. $\frac{\partial f}{\partial x}(x) > \kappa$ ($\forall x \neq 0$).

(LM4) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x) = +\infty$.

このうち, 条件 (LM3), (LM4) は第 i) 項の条件 (GL2) に対応している. Lorenz map はこれ以外にも対称性などの性質を持つが, 以下この項では主としてこれらの性質を持つ写像を扱う.

(ロ) Lorenz map のカオスと拡大性: 一般に区間 $I = [-1, 1]$ 上の写像 f が 初期値に敏感に依存する (sensitive dependence on initial conditions) または chaotic であるとは, ある定数 $\delta > 0$ が存在して区間 I の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対し

$$(2.1) \quad |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$$

となるような U 内の点 y と自然数 n が必ず存在することをいう。すなわちどの点のどんなに小さな近傍にも f を何回か施すことによりやがてはある一定の距離以上離れてしまう点が見つかるということである。写像 f が 拡大的 (expanding) であるとはこれよりさらに強く、点 x の近傍 U のすべての点 y について (2.1) が成り立つような自然数 n が存在することをいう。

Lorenz map については次が成り立つ。

命題2.1 (1) Lorenz map は拡大的であり、したがって特にカオス的である。

(2) Lorenz map の周期点は区間 $I = [-1, 1]$ の中で稠密である。

(ハ) kneading invariant : $x \in I$ に対し

$$k_0(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

とし、Lorenz map $f(x)$ に対し

$$k_i(x) = k_0(f^i(x))$$

と定める。 t についての形式べき級数 $k(x)$ を

$$k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(x) t^i$$

と定義し、これを $x \in I$ の kneading series と呼ぶ。1変数形式べき級数環 $\mathbf{Z}[[t]]$ に辞書式順序、すなわち

$$\sum \theta_i t^i < \sum \theta'_i t^i \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum (\theta'_i - \theta_i) t^i \text{ の最初の零でない係数が正}$$

によって順序を定めると、写像 $x \mapsto k(x)$ は狭義単調増加である。従って

$$f^n(x) = x \Leftrightarrow k(x) : \text{periodic} \Leftrightarrow k(x) = P_{n-1}(t)(1-t^n)^{-1}$$

がなりたつ。ここで $P_{n-1}(t)$ は $(n-1)$ 次以下の多項式である。

1変数形式べき級数環 $\mathbf{Z}[[t]]$ 上の距離を

$$d(\sum \theta_i t^i, \sum \theta'_i t^i) = \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i - \theta'_i| 2^{-i}$$

で定義し、

$$k(x+) := \lim_{y \downarrow x} k(y) \quad k(x-) := \lim_{y \uparrow x} k(y)$$

と定める。特に $k_{\pm}(f) = k_{\pm} := k(0\pm)$ とするとき、組 (k_+, k_-) を f の kneading invariant と言う。

定理2.2(Rand, Williams) 2つの Lorenz map f, g が同じ kneading invariant を持つ、すなわち

$$(k_+(f), k_-(f)) = (k_+(g), k_-(g))$$

であるならば, f と g は向きを保って位相共役である. また,

$$(k_+(f), k_-(f)) = (-k_-(g), -k_+(g))$$

であるならば, f と g は向きを逆にする同相写像で位相共役である.

(二) Lorenz map と Lorenz attractor の関係: geometric Lorenz model においては Lorenz map が geometric Lorenz attractor の位相型を決定する. したがって上の定理よりつぎが得られる.

系2.3 (LM3)の定数 κ が $\kappa > \sqrt{2}$ をみたすならば, $\{k_+, k_-, -k_+, -k_-\}$ は geometric Lorenz attractor の位相型の完全不変量を与える.

実際, Williams [Wil] は (LM3) の定数 κ が $\kappa > \sqrt{2}$ をみたすならば Lorenz map は locally eventually onto (LEO) であり, したがってその invariant set は 1 つの区間でその上で Lorenz map は位相推移的であることを示した. よって上の定理2.2より Lorenz map が位相共役であることと geometric Lorenz attractor が位相同値であることが 1 対 1 に対応する. 第 4 節も参照せよ.

特に対称性を考慮して奇関数のみ考えるならば, $\{k_+, k_-\}$ が完全不変量となる.

iv) geometric Lorenz attractor の構造不安定性

Guckenheimer-Williams [GuWi] および Robinson [Rob1] によれば, geometric Lorenz model の条件は C^2 -open である. したがって geometric Lorenz model flow の C^2 近傍に属する flow はやはり geometric Lorenz model であり, それには Lorenz map が対応する. この摂動された Lorenz map はもとの Lorenz map の C^0 近傍にある. ところが Williams [Wil], Rand [Ran] により, つぎの結果が示されている.

定理2.4 2つの Lorenz map f, g が

$$f(x) > g(x) \text{ for } \forall x \neq 0$$

を満たすならば, その kneading invariant は

$$k_+(f) > k_+(g), \quad k_-(f) > k_-(g)$$

である. したがって特に任意の Lorenz map の C^0 近傍には非可算無限個の異なる位相型を持つ Lorenz map が存在する.

以上の結果をあわせると, つぎの geometric Lorenz model の構造不安定性定理が証明される.

定理2.5 (Guckenheimer-Williams [GuWi]) geometric Lorenz model の C^2 近傍に非可算無限個の異なる位相型を持つ geometric Lorenz attractor を持つ flow が存在する.

§3. Robinsonによるinvariant foliationの存続性

geometric Lorenz model を与える条件が open であることを示すためにはその摂動において strong stable foliation が存続し, Poincaré 写像から 1 次元の Lorenz map が得られることを示さなければならない. この strong stable foliation の存続性に関して Robinson [Rob1] はつぎの 2 つの定理を与えた.

定理3.1 geometric Lorenz model の原点における固有値が (FP-d) を満たすならば, その geometric Lorenz model に C^2 位相で近い flow は geometric Lorenz attractor の近傍で C^1 級の strong stable foliation を持つ.

この定理の証明の概略は次のとおりである. まず geometric Lorenz model は自明な strong stable foliation を持つ. その存在と微分可能性は flow の positive invariance と hyperbolicity estimate から保証される. 実際, strong stable 方向の縮小率はそれに transversal な方向の縮小率よりも大きい. また foliation が C^1 になるにはさらに最大の拡大率と最大の縮小率の積も 1 より小さいことが必要である. これらの条件はすべて open なので, 摂動された flow についてもやはり同様の条件が成り立ち, 従って strong stable foliation が存続する.

定理3.2 正方形領域 Σ 上の写像 Π が (GL0)-(GL2) に加えてつぎの性質を満たすとする.

- (a) $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right| \leq 1$;
- (b) $g|_{\{|x| \leq 1\}} \rightarrow \text{constant function } b^\pm$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \pm 0$;
- (c) $x \rightarrow \pm 0$ とするとき次はすべて一様有界である.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1}$$

このとき写像 Π' で Π と同じ性質を満たし Π に C^2 位相で近いものと C^2 級写像 J で恒等写像に C^1 位相で近いものに対し $\Phi = J \circ \Pi'$ と定めると, Φ は Π の strong stable foliation の近くに C^1 級の strong stable foliation を持つ.

この定理の証明にはいわゆるグラフ変換の方法を用いる. すなわち求める invariant foliation を適当な関数空間の上のグラフ変換の不動点としてとらえ, 縮小写像定理を用いてその存在を証明する. その foliation の微分可能性はグラフ変換の微分で定義される写像に対しファイバー縮小写像定理を適用することによりわかる. いずれにおいても Lipschitz 定数の評価にはもとの写像の hyperbolicity が重要な役割を果たす. ただし写像 Π は不連続点を持つので求められた invariant foliation がそのまわりで C^1 級になっていることを確かめることは注意する必要がある.

定理3.1, 3.2の証明の詳細は [Rob1], [HiPu], [HPS] を参照せよ.

定理3.2から定理3.1を証明することができる. 実際 geometric Lorenz model を摂動した flow に対しその Poincaré 写像を, 原点近傍において C^1 級微分同相写像で線形化することにより $\Phi = J \circ \Pi'$ の形の写像にとることができる. したがって定理3.2より, その写像は再び geometric Lorenz model を与える. しかし, 摂動した flow が原点の近傍で C^1 級の線形化が可能であるためにはもとの geometric Lorenz model の原点での固有値についてのある種の非退化条件が必要である. 実際の Lorenz 方程式の原点での固有値は

$$\lambda_u = 11.83, \lambda_s = -2.67, \lambda_{ss} = -22.83$$

であり, この値から C^1 級の線形化のためには摂動が少なくとも C^{14} 級にとらなければならないことがしたがう. さらに定理3.2を適用するためには写像 Π' が C^2 級でなければならない, そのためには摂動は C^{20} であることが必要である. ただしこの条件は少し改良することもできる. 例えば Rychlik [Ryc; Appendix I] をみよ.

§4. Keller-Robinson による Lorenz map の不変測度の存在とその性質

第2節で見たように geometric Lorenz model から得られる Poincaré 写像は

$$\Pi(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

の形をしていた。これから導かれる1次元写像 $f(x)$ が geometric Lorenz model の性質をほぼ決定するが、とくにこの写像が Lebesgue 測度に同値な不変測度を持ち、それに関してこの写像が ergodic であるならば、もとの geometric Lorenz model は strange attractor を持つといえるであろう。この節では Lorenz map を含む1次元写像のあるクラスについてこのような性質が得られるための条件を与える。

i) Lorenz map に対する ergodic な不変測度の存在

Lorenz map を含む区分的に単調な1次元写像に対する不変測度の存在は Keller [Kel] によって与えられた。ここでは [Kel] の論文における定理3.3と定理3.5をまとめたつぎの形で述べておく。

定理4.1 区間 I 上の区分的に単調な写像 f がつぎの条件を満たすとする。

- (a) f は各単調区間上で微分可能；
- (b) $1/f'$ は指数 $0 < \theta \leq 1$ の Hölder 連続関数である；
- (c) $\exists \kappa > 1 \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $|(f^n)'| \geq \kappa$.

このとき Lebesgue 測度に関して絶対連続な f -不変確率測度が存在し、つぎが成り立つ。

区間 I の分割 $\{L_{k,l}\}_{1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq p_k}$ が取れて

$$f(L_{k,l}) = L_{k,l+1} \pmod{p_k}$$

かつ $f^{p_k}|_{L_{k,l}}$ はすべての k, l について weakly mixing, したがって ergodic である。

実際, geometric Lorenz model から導かれる Lorenz map については上の3つの条件は満たされると考えてよい。

ii) Lorenz map の locally eventually onto property

上の Keller の定理の結論に加えてつぎの locally eventually onto property があれば得られた不変測度は f の定義域上の Lebesgue 測度と同値であり、その上で写像が位相推移的であることが保証される。

定義4.2 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ が locally eventually onto (LEO) とは区間 $[-1, 1]$ の任意の開部分区間 J に対し自然数 k が存在して $f^k(J) = [-1, 1]$ となることをいう。

定義4.3 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ が 位相推移的 (topologically transitive) とは区間 $[-1, 1]$ 内の点でその ω -極限集合が $[-1, 1]$ 全体になるものが存在することをいう。

写像 f が LEO ならば位相推移的である。より強く、区間 $[-1, 1]$ 内の residual set R が存在して R に属する点の ω -極限集合はすべて $[-1, 1]$ 全体になる。実際、区間 $[-1, 1]$ の有

限開被覆の列 \mathbf{O}_n で任意の元 $U \in \mathbf{O}_n$ はその長さが $1/n$ 以下であるものをとると,

$$R = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{U \in \mathbf{O}_n} \bigcup_{k \in \mathbf{N}} f^{-k}(U)$$

で与えられる.

第2節でみたように Lorenz map $f(x)$ はつぎの性質を持っていた.

- (LM1) $f(x)$ は区間 $[-1, 1]$ 内のある点 $x=0$ で不連続である;
- (LM2) $f(0-) = 1, f(0+) = -1, f(-1) < 0 < f(1)$;
- (LM3) $f \in C^1$ on $[-1, 1] \setminus \{0\}$ かつ $\exists \kappa > 1$ s.t. $f'(x) > \kappa$ for $\forall x \neq 0$;
- (LM4) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f'(x) = +\infty$.

この写像 f が LEO になるための条件として, Williams [Wil] は次を示した.

定理4.4 条件 (LM1)-(LM3) のもとで $f'(x) > \sqrt{2}$ ($\forall x \neq 0$) ならば f は LEO である.

この定理は写像 f が LEO になるための簡潔な条件を与えているが, 数値実験によれば Lorenz 方程式については $f'(x)$ は端点の近くで 1 に近く, したがって上の定理の仮定が成り立つことは期待できない. そこで Robinson [Rob2] は f が LEO になるためのより弱い条件を与えた.

定理4.5 条件 (LM1)-(LM3) およびつぎの条件のもとで f は LEO である.

2 以上の自然数 k について $f^j(-1) \leq 0$, and $f^j(1) \geq 0$ for $0 \leq j \leq k$ であり,
 $f(B^\pm) = 0$ かつ $-1 \leq B^- \leq 0 \leq B^+ \leq 1$ を満たす B^-, B^+ に対し

$\exists \Lambda > 0$ s.t. $M(f')(x) \geq \Lambda$ for $B^- \leq \forall x \leq B^+$, $f'(x) \geq \kappa > 1$ for $\forall x \neq 0$
 かつ $\Lambda \lambda^k > 2$ が成り立つ. ここで $M(f')(x)$ は f' の 0 から x への平均値

$$M(f')(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f'(t) dt = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

である.

ここで上の条件は必要である. 実際 (LM1)-(LM3) だけでは f が LEO にならない例がある. 詳しくは [Spa] または [Rob2; p.607] を参照せよ.

iii) geometric Lorenz model の transitive attractor

Robinson [Rob2] は第1項の Keller [Kel] の結果を用いて, geometric Lorenz model から導かれる Lorenz map は Lebesgue 測度に同値な不変測度を持ち, それに関して ergodic かつ位相推移的になることを示した.

定理4.6 geometric Lorenz model の原点 0 での固有値 $\lambda_u, \lambda_s, \lambda_{ss}$ が適当な正の数 α

に対し

$$0 < -\lambda_s < \lambda_u < -\lambda_{ss}, 0 < -\lambda_{ss} + \lambda_s - (1 + \alpha)\lambda_u, 0 < \lambda_u + (1 + \alpha)\lambda_s$$

を満たし、かつ O の近傍で C^2 -線型化可能（であるような固有値の非退化条件が満たされる）ならば、geometric Lorenz model の C^2 -近傍が存在してその中のすべての flow はやはり geometric Lorenz model となり、それから導かれる 1 次元写像 f は次の性質を満たす。

- (a) f は Lebesgue 測度 m に絶対連続な不変測度 $\mu = hdm$ を持つ。
- (b) 密度関数 $h \in L^1$ の support は f の定義域全体に一致する。
- (c) f は不変測度 $\mu = hdm$ に関して ergodic である。
- (d) f は LEO 従って位相推移的である。

証明の概略はつぎのとおり。まず、第 3 節の Robinson の結果から geometric Lorenz model に C^2 位相で近い flow はやはり strong stable foliation をもち、第 2 節第 i) 項の条件 (GL0)-(GL2) を満たす。従って、それから導かれる 1 次元写像も第 2 節第 iii) 項で挙げた条件 (LM1)-(LM4) を満たす。一方上の定理 4.5 の条件は自然数 k を固定すれば open な条件であるから C^2 位相で近い flow に対しても成り立ち、その 1 次元写像は LEO になる。Keller による第 1 項の定理 4.1 を適用するためにはその条件 (b) を確かめなければならないが、これは $\exists \alpha > 0$ s.t. f^{-1} は区間 $J_- = [f(-1), 1]$, $J_+ = [-1, f(1)]$ 上でそれぞれ $C^{1+\alpha}$ 級関数に拡張することと同値であり、このことは strong stable foliation の微分可能性から導かれる。これにより定理 4.1 が適用できて不変測度の存在が導かれるが、さらに Lorenz map はただ 1 つの不連続点しか持たないので、Li-Yorke [LiYo] の定理により不変測度の support は disjoint な区間であってそれぞれの区間は少なくとも 1 つの不連続点を含まねばならないことから、support は実は 1 つの区間をなすことがわかり、しかもその上の不変測度の一意性も導かれる。この support は、写像 f が LEO であることから f の定義域全体となり、従って不変測度は Lebesgue 測度と同値である。また f が LEO であることから位相推移的であることもしたがう。詳しくは Robinson [Rob2] を参照せよ。

これに関連する結果として、Bunimovich と Sinai [BuSi] は、2 次元 Poincaré 写像がある種の双曲性条件を満たすならばいわゆる Bowen-Ruelle-Sinai measure が存在することを示した。しかしこれから上に述べた性質がただちに導かれるかどうかは明らかではない。また Parry [Par] は区分解線形写像で Lorenz map と位相共役なものについては Lebesgue 測度に絶対連続な不変測度が存在することを示したが、それがもとの Lorenz map の不変測度になるためには位相共役写像に適切な微分可能性の条件が必要である。

§5. Rychlik のホモクリニック分岐定理

1985年頃 Rychlik は geometric Lorenz attractor がある種のホモクリニック軌道から分岐して出現することを証明したと発表した。この証明には誤りがあったが、1989年頃にはそれは修正された ([Ryc]). ほぼ同じころ Robinson [Rob3] も Rychlik の結果にヒントを得て同様の分岐に関する結果を証明した。ホモクリニック軌道からの Lorenz-type attractor の分岐を考えるのは非常に自然なことに思われる (例えば Afraimovich-Bykov-Shilnikov [ABS] にもこのようなアイデアがのべられている) が、実際にこれを証明しようとする generic なホモクリニック軌道からは Lorenz attractor は分岐せず preturbulence においてみられるような双曲型不変集合しか出現しない。そこで attractor が分岐するようにもう1つパラメータを導入して余次元2の分岐として考えようというのが Rychlik や Robinson の方法である。この第2の余次元のとりかたに複数の可能性があり、Rychlik は安定多様体の幾何学的配置に関する退化の条件を、また Robinson は原点における固有値についての共鳴の条件を課した。この節ではまず Rychlik によるホモクリニック分岐定理を述べ、つぎの節で Robinson の定理を述べる。

i) geometric Lorenz attractor from critically twisted double homoclinic loop

\mathbf{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場 X が次の条件 (FP) をみたすものとする。

(FP) [fundamental properties]

(a) $X(O) = 0$ かつ $DX(O)$ の固有値 $\lambda_u, \lambda_s, \lambda_{ss}$ は実で $\lambda_u > 0, \lambda_s, \lambda_{ss} < 0$ をみたす；

(b) X は involution

$$\iota: (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$$

で不変である；

(c) z -軸は λ_s の固有空間である；

(d) $|\lambda_{ss}| \geq |\lambda_u| + |\lambda_s| \geq 2|\lambda_s|$.

Ξ^∞ を \mathbf{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場で、involution

$$\iota: (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z)$$

で不変なもの全体とし、 Ξ_0^∞ を Ξ^∞ の中で上の (FP) をみたすベクトル場 X (と C^∞ 同値なもの) 全体とする。 Ξ_0^∞ に属するベクトル場 X に対しては次の4種類の不変多様体が存在する。

2次元安定多様体 $W^s(O)$ および 1次元不安定多様体 $W^u(O)$ ；

1次元不変多様体 $W^{ss}(O) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \exists C > 0, C^{-1} \leq \|\phi^t(x)\| e^{-\lambda_{ss} t} \leq C \text{ for } \forall t \geq 0\}$ ；

2次元不変多様体 $W^{us}(O) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \exists C > 0, C^{-1} \leq \|\phi^t(x)\| e^{-\lambda_s t} \leq C \text{ for } \forall t \leq 0\}$ 。

またこれから次のような2次元平面場も定義される。

P^s = 安定多様体 $W^s(O)$ の接平面場

P^u = 不安定多様体 $W^u(O)$ の接平面場

不変多様体 $W^u(O)$ は一意的ではないが平面場 P^u は一意に存在する. 詳しくは Hirsch-Pugh-Shub [HPS] を参照せよ.

$\Xi_1^\infty \subset \Xi_0^\infty$ を次の条件をみたすベクトル場の全体とする.

(HB1) [existence of homoclinic loop]

O に関する double homoclinic loop が存在する, すなわち $W^u(O) \subseteq W^s(O)$;

(HB2) [principal homoclinic loop]

$W^u(O) \neq W^{ss}(O)$;

(HB3) [critical twist condition]

$P^u = P^s$ on $W^u(O) \setminus \{O\}$;

(HB4) [non-resonance condition]

$|\lambda_u| \neq |\lambda_s|$;

(HB5) $\lambda_u < 2|\lambda_s|$.

ここで条件 (HB2) と (HB4) は (HB1) のもとで generic な条件であるが (HB1) と (HB3) はそれぞれ余次元 1 の条件であり, 従って Ξ_1^∞ は Ξ_0^∞ の余次元 2 の部分多様体になる. また条件 (HB5) は strange attractor が存在するために必要な open condition である. 以上の条件をみたす double homoclinic loop をここでは critically twisted double homoclinic loop と呼ぶ.

\mathbf{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場の s -パラメータ族 X_μ ($\mu \in U \subset \mathbf{R}^3$) が次の意味で非退化であるとする.

(PD) [non-degeneracy of the parameter dependence]

$\forall \mu \in U, X_\mu \in \Xi_0^\infty$ かつ $\exists \mu_0 \in U, X_{\mu_0} \in \Xi_1^\infty$ and $(\mu \mapsto X_\mu) \not\subset \Xi_1^\infty$

このとき critically twisted double homoclinic loop から geometric Lorenz attractor が分岐する. すなわち

定理5.1 \mathbf{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場の s -パラメータ族 X_μ が条件 (PD) をみたすならば, μ_0 にいくらでも近い μ で X_μ が geometric Lorenz attractor を持つものが存在する.

ii) Poincaré 写像の構成

Rychlik は Poincaré 写像を構成するために Roussarie の結果に基づいた smooth linearization の方法を用いているが, それには原点における固有値についての非共鳴条件が必要である. ここではそれを用いなくて, Shilnikov-Deng [Shi1-4, Den1-3] の方法を使って Poincaré 写像を表現する.

Poincaré 写像を考えるためにまず局所断面 $\Sigma_\pm^u = \{x = \pm\delta\}$, $\Sigma^s = \{z = \delta\}$ をとる. また

$$v = \frac{-\lambda_s}{\lambda_u}, \quad \eta = v + \omega, \quad \omega < \min\left(\frac{-\lambda_s}{\lambda_u}, 1, \frac{\lambda_s - \lambda_{ss}}{\lambda_u}\right)$$

とおく. 定数 ω を上の条件を満たす範囲で十分大きくとるならば仮定 (FP) および (HB5) より $\frac{1}{2} < v < 1 < \eta < 2$ となる.

命題5.2 適当なパラメータの変換 $\mu \mapsto \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ が存在して, $(x, y) \in \Sigma^s$ に対し Poincaré 写像 $\Pi: \Sigma^s \rightarrow \Sigma^s$ は次のような形で与えられる.

$$\Pi(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ p_2(\varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ r_2(\varepsilon) \end{pmatrix} h(y, \varepsilon) x^{v(\varepsilon)} + \mathbf{k}(x, y, \varepsilon) x^{\eta(\varepsilon)}$$

さらに

$$p_2(0) = 0, \quad r_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}, \quad h(0, 0) = 1$$

が成り立つ.

パラメータ空間の 0 の近傍をスケール集合

$$M_\sigma(c) = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_2 = -\sigma \frac{c}{h(0, \varepsilon)} |\varepsilon_1|^{1-v(\varepsilon)}, \quad \sigma = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) \right\}$$

によって分割する.

命題5.3 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M_\sigma(c)$ ならば変数 (x, y) の適当な変換によって命題5.2の Poincaré 写像 Π は正方形領域 $Q = (-1, 1)^2$ 上の次のような形に帰着される.

$$\Pi(x, y) = \Pi_0(x, y) + H(x, y)$$

ここで, Π_0 および H は

$$\begin{aligned} \Pi_0(x, y) &= \sigma \operatorname{sgn}(x) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ p_2(\varepsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} h(\operatorname{sgn}(x)y, \varepsilon) |x|^{v(\varepsilon)} \right\} \\ H(x, y) &= \sigma \operatorname{sgn}(x) \mathbf{k}(|x|, \operatorname{sgn}(x)y, \varepsilon) |x|^{\eta(\varepsilon)} \end{aligned}$$

であり, さらに適当な正の数 ζ に対して次が成り立つ.

$$p_2(\varepsilon) = O(|\varepsilon_1|^\zeta), \quad h(0, \varepsilon) = 1, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(y, \varepsilon) = O(|\varepsilon_1|^\zeta), \quad \left\| \frac{\partial^{k+l} H}{\partial x^k \partial y^l} \right\| \leq \operatorname{const} |\varepsilon_1|^\zeta |x|^{\eta-k}$$

iii) 不変葉層の存在

以下では $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M_\sigma(c)$ が $\frac{1}{2} < \nu < 1$ をみたす場合について考える. Poincaré 写像 $\Pi: Q \rightarrow Q$ の不変葉層は Π で不変に保たれる Q 上の曲線族として与えられる. それを求めるために, 次のようなグラフ変換を考える.

$$\Gamma(u)(x, y) = \frac{d(x, y)u(\Pi(x, y)) - c(x, y)}{a(x, y) - b(x, y)u(\Pi(x, y))}$$

参 考 文 献

- [ABS] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, & L. P. Shilnikov, On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type, *Trans. Moscow Math. Soc.* (1983), 2, pp. 153 - 216.
- [AfSi] V. S. Afraimovich & L. P. Shilnikov, Strange attractors and quasiattractors, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds. G. I. Barenblatt, G. Iooss, & D. D. Joseph), 1983, Pitman, pp. 1 - 34.
- [Bun] L. A. Bunimovich, Statistical properties of Lorenz attractors, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds. G. I. Barenblatt, G. Iooss, & D. D. Joseph), 1983, Pitman, pp. 71 - 92.
- [BuSi] L. A. Bunimovich & Ja. G. Sinai, Stochasticity of the attractor in the Lorenz model, in *Nonlinear Waves* (Ed. A. V. Gaponov-Grekhov), 1979, Nauka, pp. 212 - 226.
- [Coo] B. A. Coomes, The Lorenz system does not have a polynomial flow, *J. Diff. Eq.* (1989), 82, pp. 386 - 407.
- [Fra] V. Franceschini, A Feigenbaum sequence of bifurcations in the Lorenz model, *J. Stat. Phys.* (1980), 22, pp. 397 - 406.
- [Guc] J. Guckenheimer, A strange strange attractor, in *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, *Appl. Math. Sci.*, Vol. 19, (1976), Springer-Verlag, pp. 368 - 381.
- [GuHo] J. Guckenheimer & P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, *Appl. Math. Sci.*, Vol. 42, (1983), Springer-Verlag.
- [GuWi] J. Guckenheimer & R. F. Williams, Structural stability of Lorenz attractors, *Publ. Math. IHES* (1979), 50, pp. 59 - 72.
- [HiPu] M. W. Hirsch & C. C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets, in *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 14, (1970), pp. 133 - 163.
- [HPS] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, & M. Shub, *Invariant Manifolds*, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 583, (1977), Springer-Verlag.
- [KaYo] J. L. Kaplan & J. A. Yorke, Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz, *Comm. Math. Phys.* (1979), 67, pp. 93 - 108.
- [Kel] G. Keller, Generalized bounded variation and applications to piecewise linear transformations, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* (1985), 69, pp. 461 - 478.
- [LiYo] T.-Y. Li & J. A. Yorke, Ergodic transformations from an interval into itself, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1978), 235, pp. 183 - 192.
- [Lor1] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atom. Sci.* (1963), 20, pp. 130 - 141.
- [Lor2] E. N. Lorenz, On the prevalence of aperiodicity in simple systems, in *Global Analysis* (Eds. M. Grmela & J. E. Marsden), *Lecture Notes in Math.*, Vol. 755, (1979), Springer-Verlag, pp. 53 - 75.
- [Lor3] E. N. Lorenz, Noisy periodicity and reverse bifurcation, in *Nonlinear Dynamics* (Eds. R. H. G. Helleman), *New York Acad. Sci.*, 357, (1980), pp. 1685 - 1699.
- [MaMc] J. Marsden & M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, *Appl.*

- Math. Sci., Vol. 19, (1976), Springer-Verlag.
- [MaPo1] P. Manneville & Y. Pomeau, Intermittency and the Lorenz model, *Phys. Lett.* (1979), 75A, p. 1.
- [MaPo2] P. Manneville & Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica 1D* (1980), pp. 216 - 226.
- [McMa] J. B. McLaughlin & P. C. Martin, Transitions to turbulence in a statistically stressed fluid system, *Phys. Rev.* (1975), A12, pp. 186 - 203.
- [Niw] 丹羽敏雄, 微分方程式と力学系の理論入門, 遊星社, 1988.
- [Par] W. Parry, The Lorenz attractor and a related population model, in *Ergodic Theory Conference Oberwolfach* (Eds. M. Denker & K. Jacobs), *Lecture Notes in Math.*, Vol. 729, Springer-Verlag, pp. 169 - 187.
- [Ran] D. Rand, The topological classification of Lorenz attractors, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1978), 83, pp.451 - 460.
- [Robb] K. Robbins, Periodic solutions and bifurcation structure at high r in the Lorenz system, *SIAM J. Appl. Math.* (1979), 36, pp. 457 - 472.
- [Rob1] C. Robinson, Differentiability of the stable foliation for the model Lorenz equations, In *Dynamical Systems and Turbulence* (Eds. D. Rand & L.-S. Young), *Lecture Notes in Math.* Vol. 898 (1981), Springer-Verlag, pp. 302 - 315.
- [Rob2] C. Robinson, Transitivity and invariant measures for the geometric model of the Lorenz equations, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1984), 4, pp.605 - 611; Errata, *ibid* (1986), 6, p.323.
- [Rob3] C. Robinson, Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, *Nonlinearity* (1989), 2, pp.495 - 518.
- [Rob4] C. Robinson, Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, II, *IMA Preprint Series #719*, 1990.
- [Rue] D. Ruelle, The Lorenz attractor and the problem of turbulence, in *Turbulence and Navier-Stokes equations* (Ed. R. Temam), *Lecture Notes in Math.*, Vol. 565, (1976), Springer-Verlag, pp. 146 - 155.
- [Ryc] M. Rychlik, Lorenz attractors through Sil'nikov-type bifurcation, Part I, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1989), 10, pp. 793 - 821.
- [ShNa] I. Shimada & T. Nagashima, The iterative transition phenomenon between periodic and turbulent states in a dissipative dynamical system, *Prog. Theor. Phys.* (1979), 59, pp. 1605 - 1616.
- [ShMo] T. Shimizu & N. Morioka, Chaos and limit cycles in the Lorenz equations, *Phys. Lett.* (1978), 66A, p. 182.
- [SiVu] Ja. G. Sinai & E. B. Vul, Hyperbolicity conditions for the Lorenz model, *Physica 2D* (1980), pp. 3 - 7.
- [Spa] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, *Applied Mathematical Sciences Vol.41*, (1982), Springer-Verlag.

[Tho;p.59]

[YoYo] E. D. Yorke & J. A. Yorke, Metastable chaos: transition to sustained chaotic behavior in the Loren model, *J. Stat. Phys.* (1979), 21, pp. 263 - 277.

[Wil] R. F. Williams, Structure of Lorenz attractors, *Publ. Math. IHES* (1979), 50, pp. 73 - 100.

[Won1] S. Wong, Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1978), 246, pp. 493 - 500.

[Won2] S. Wong, Hölder continuous derivatives and ergodic theory, *London Math. Soc.* (1980), 22, pp. 506 - 520.