

## Fusion rule of A type WZW model and level-rank duality

中西知樹 (名大理)

(河野俊丈 (東大数理) 記)

このノートは、中西氏の講演に基づき記録者がその要旨をまとめたものである。第 1 節では、A 型の fusion algebra の定義と基本的な性質を述べる。第 2 節で、fusion rule を記述する Kac-Walton formula, Verlinde formula を紹介し、さらに第 3 節で数理解析との関係、level-rank duality について触れる。

### 1. Fusion algebra for $\widehat{sl}(n)_l$

この節では、Goodman-Wenzl[GW] に従い A 型 Lie 環に対応した fusion algebra の定義と主な性質を述べる。整数  $n \geq 2, l \geq 0$  を固定する。Lie 環  $sl(n, C)$  の表現環を  $R_n$  とおく。  $sl(n)$  の基本ウェイトを  $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_{n-1}$  とおくと、dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{\Lambda}_i \ ; \ a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0 \right\}$$

と表される。また、affine Lie algebra  $\widehat{sl}(n)$  の基本ウェイトを  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}$  とおくと、  $\widehat{sl}(n)$  の level  $l$  dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n, l) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i \ ; \ a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n-1} a_i = l \right\}$$

と表される。自然な inclusion map  $j : P_+(n, l) \rightarrow P_+(n)$  を  $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i$  について  $j(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{\Lambda}_i$  で定義し、  $j(\lambda)$  を  $\bar{\lambda}$  と書いて、これを  $\lambda$  の classical part とよぶ。dominant integral weight の集合の間の自然な inclusion map  $P_+(n, l) \subset P_+(n, l+1)$  を考え、

$$\partial P_+(n, l) = P_+(n, l+1) \setminus P_+(n, l)$$

とおく。表現環  $R_n$  は、 $\lambda \in P_+(n)$  を  $\mathbf{Z}$  basis として持つが、 $\partial P_+(n, l)$  で生成される  $R_n$  のイデアルを  $I_{n, l}$  と書く。このとき、fusion algebra  $R_{n, l}$  を

$$R_{n, l} = R_n / I_{n, l}$$

と定義する。

表現環  $R_n$  において  $\lambda, \mu \in P_+(n)$  の積を

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n)} \overline{N}_{\lambda\mu}^\nu \nu$$

と表すと、この構造定数は Littlewood-Richardson 係数であり、 $sl(n)$  の表現のテンソル積の分岐則にほかならない。 $R_{n, l}$  について、次が知られている。

**Proposition [GW].** fusion algebra  $R_{n, l}$  は、 $\lambda \in P_+(n, l)$  を  $\mathbf{Z}$  basis として持つ free  $\mathbf{Z}$  module である。

積構造を  $\lambda, \mu \in P_+(n, l)$  に対して、

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n, l)} N_{\lambda\mu}^\nu \nu$$

で表す。この構造定数  $N_{\lambda\mu}^\nu$  を fusion rule とよぶ。これは、non-negative integer となり次の性質が知られている。

$$N_{\lambda\mu}^\nu \leq \overline{N}_{\lambda\mu}^\nu$$

$$N_{\sigma^i(\lambda)\sigma^j(\mu)}^{\sigma^{i+j}(\nu)} = N_{\lambda\mu}^\nu$$

ここで、 $\sigma$  は affine Lie algebra  $\widehat{sl}(n)$  の Dynkin diagram automorphism の生成元を示す。

## 2. Explicit expression of the fusion rule

この節では、fusion rule の記述に関して、Littlewood-Richardson rule を用いる Kac-Walton formula 及び、affine Lie algebra の表現の指標を用いる Verlinde formula について述べる。

Lie algebra  $sl(n)$  の root lattice を  $Q$ 、weight lattice を  $P$  で表す。 $\overline{W}$  を  $sl(n)$  の Weyl 群とすると、これは weight lattice  $P$  に作用する。 $W_l$  を  $sl(n)$  の level  $l$  Weyl group とする。 $W_l$  の  $P$  への作用の基本領域が、 $P_+(n, l)$  に対応している。 $sl(n)$  の positive root の和の  $1/2$  を  $\rho$  とおく。 $W_l$  の元  $w$  の shifted action を

$$w \bullet \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

で定義する。この shifted action と Littlewood-Richardson rule を用いて、fusion rule は次の有限和で与えられる。

**Proposition (Kac-Walton formula).**

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{w \in W_l} \det w \overline{N}_{\lambda\mu}^{w \bullet \nu}$$

$P_+(n, l)$  の元  $\lambda$  について level  $l$  integrable highest weight module  $L(\lambda)$  を考え、その指標を  $ch_\lambda$  とおく。Kac-Peterson により  $ch_\lambda(\tau)$ ,  $\lambda \in P_+(n, l)$ ,  $Im \tau > 0$  は、modular 群の作用で閉じていることが知られていて、とくに  $S$  変換による作用を

$$ch_\lambda(-1/\tau) = \sum_{\mu \in P_+(n, l)} S_{\lambda\mu} ch_\mu(\tau)$$

で表す。具体的には、

$$S_{\lambda\mu} = \frac{i^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+l)^{n-1}}} \sum_{w \in \overline{W}} \det w \exp\left(-\frac{2\pi i}{l+n} \langle w(\bar{\lambda} + \rho), \bar{\mu} + \rho \rangle\right)$$

で与えられる。このとき、fusion rule を  $S$  行列を用いて表すのが次の Verlinde formula である。

**Proposition (Verlinde formula).**

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{\alpha \in P_+(n, l)} \frac{S_{\lambda\alpha} S_{\mu\alpha} S_{\nu\alpha}^*}{S_{\phi\alpha}}$$

### 3. Relevant physical systems, level-rank duality

Gepner-Witten [GeW], Tsuchiya-Ueno-Yamada [TUY]などで考察されているように fusion rule は、conformal block の空間の次元と関連して重要な意味をもつ。つまり、chiral vertex operator

$$\Phi(z) : L(\lambda) \otimes L(\mu) \otimes L(\nu) \dagger \longrightarrow C$$

の空間の次元として、fusion rule  $N_{\lambda\mu}^{\nu}$  が現れる。また、[JKMO]などで研究されている fusion RSOS model においても類似の構造が見いだされている。詳細は、[GN]などを参照されたい。

$\widehat{sl}(n)_l$  の fusion rule と  $\widehat{sl}(l)_n$  の fusion rule を関連づけるのが level-rank duality で、[KN],[GW]などで調べられている。 $P_+(n, l)$  の元に対応した Young 図形  $Y$  について、その転置  ${}^t Y$  をとることにより  $P_+(l, n)$  の元が得られる。Dynkin diagram automorphism の作用を考慮して、これらをそれぞれ  $Z_n, Z_l$  の作用による軌道でおきかえることにより、bijection が得られる。この時、fusion rule について次の等式が成り立つ。

**Proposition (level-rank duality).**

$\lambda \in P_+(n, l)$  に対応する Young 図形の node の数を  $|\lambda|$  と書くことにすると、 $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$  の条件の下に

$$N_{\lambda\mu}^{\nu} = N_{{}^t\lambda\mu}^{{}^t\nu}$$

ここで左辺、右辺はそれぞれ  $\widehat{sl}(n)_l, \widehat{sl}(l)_n$  の fusion rule を意味する。

[NT]において、level-rank duality の conformal block の duality による意味づけが与えられている。また、B, C, D 型の level-rank duality については [MNRS] で調べられている。

## References

- [GeW] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. B278 (1986) 493.
- [GN] F. M. Goodman and T. Nakanishi, Phys. Lett. B262 (1991) 259.
- [GW] F. M. Goodman and H. Wenzl, Advances in Math. 82 (1990) 244.
- [JKMO] M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, Comm. Math. Phys. 119 (1988) 543.
- [KN] A. Kuniba and T. Nakanishi, in Modern Quantum Field Theory, eds. A. Das et al., World Scientific 1991, 344–374.
- [MNRS] E. Mlawer, S. Naculich, H. Riggs and H. Schnitzer, Nucl. Phys. B352 (1991) 863.
- [NT] T. Nakanishi and A. Tsuchiya, Comm. Math. Phys. 114 (1992) 351.
- [TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989) 459.