数理解析研究所講究録
第 810 巻 1992 年 102-127

WKB解析，周期積分，変形 …

近畿大理工　青木貴史（Takashi AOKI）
京大数理研　河合隆裕（Takahiro KAWAI）
京大　理　竹井義次（Yoshitsugu TAKEI）

§0．序

ポテンシャル $Q(x)$ をもった（1次元）Schrödinger 方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}+Q(x)\right)\psi(x)=0, \qquad (0.0)$$

$\hbar$ は Planck 定数

に対して，WKB解と呼ばれる指数函数的に増大（又は減少）する項をもった $\hbar$ に関する巾級数解が存在する事は良く知られている。特異摂動の方程式の常としてこの種の解は殆ど全ての場合に発散級数となってしまうが，近年，この発散級数解に Borel 総和法を通じて解析函数としての意味付けを与え，固有値問題等の解析を行おうという所謂 "exact WKB analysis" の理論が現れ，種々の興味深い結果が得られている。（例えば [AKT]，[DD]，[E]，[KT]，[P]，[V] 等）。ここでは，この "exact WKB analysis" を確定特異点をもつ Fuchs 型方程式に応用し，その monodromy の決定や monodromy 保存変形の問題を，

WKB解析の立場から考察してみたい。以下に見る様に，WKB解析の立場からは，$\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面の構造とその上の周期積分とが，いずれの問題においても本質的な役割を果たす事になる。

§1. WKB解析について

まず，WKB解析について簡単に復習しておこう。以下，$Q(x)$ は x の解析函数（特異点の存在は許す。例えば多項式，有理函数等）と仮定する。WKB解の定義から始める。方程式 (0.0)，或いは

(1.1) $$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2 Q(x)\right)\psi(x)=0\ ,\quad \eta=\hbar^{-1}: \text{large parameter}$$

において，未知函数 $\psi(x)$ を

(1.2) $$\psi(x)=\exp\int_{x_0}^{x} S(x;\eta)\,dx \qquad (x_0 \text{ は fixed point})$$

と置けば，ψ が (1.1) をみたす事と S が

(1.3) $$S(x;\eta)^2+\frac{\partial S}{\partial x}(x;\eta)=\eta^2 Q(x)$$

をみたす事は同値である。(1.3) が large parameter η を含んでいる点に注目して，(1.3) の η^{-1} に関する巾級数解を次の形で求める。

$$S(x;\eta)=\eta S_{-1}(x)+S_0(x)+\eta^{-1}S_1(x)+\eta^{-2}S_2(x)+\cdots$$

すると，各 $S_j(x)$ は次の関係式（漸化式）によって $S_{-1}(x)$ から順に求まる事がわかる。

$$(1.4)\qquad \begin{cases} S_{-1}(x)^2 = Q(x) \\ 2S_{-1}(x)S_{j+1}(x) = -\left(\sum_{k=0}^{j} S_k(x)S_{j-k}(x) + \frac{dS_j}{dx}(x)\right) \quad (j \geq -1) \end{cases}$$

こうして求まる $S(x;\eta)$ を (1.2) に代入すれば，(1.1) の (形式) 解が得られる。これがWKB解である。実際には，$S(x;\eta)$ のうちで η について奇数次の項ばかり集めたものを $S_{odd}(x;\eta)$，偶数次の項だけ集めたものを $S_{even}(x;\eta)$ と書けば，今の場合

$$S_{even}(x;\eta) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log S_{odd}(x;\eta)$$

が成立するので，(1.2) の右辺において偶数次の項については積分が実行できて，

$$(1.5)\qquad \psi_{\pm} \overset{\text{def}}{=} S_{odd}(x;\eta)^{-1/2} \exp \pm \int_{x_c}^{x} S_{odd}(x;\eta)\,dx$$

$$(\text{但し}\quad S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}\ ).$$

が (1.1) の (形式) 解となる。ここで exp の中の複号 ± は，$S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$ の branch の選び方に対応している。我々はこの形の解 $\psi_{\pm}$ も WKB 解と呼ぶ事にしよう。

ここで注意しておきたいのは，漸化式 (1.4) からわかる様に，$S_{odd}(x;\eta)$ は $\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面上の函数であるという事である。従って (積分路のとり方による多価性を別にすれば) WKB 解も $\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面上の函数である。$\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面は $\mathbb{C}$ 上の double covering であるから，こうして x につ

いて局所的には2つの一次独立な形式解が得られる。これが（定数の差を無視すれば）2つのWKB解 $\psi_\pm$ に他ならない。

こうして得られたWKB解は，殆ど全ての場合，通常の意味では収束しない。これに函数としての意味を付与する為に，我々はBorel総和法を利用する。即ち，まずWKB解のBorel変換（形式的な逆Laplace変換）を考え，次にそのBorel変換のLaplace積分をとる事によって，WKB解を解析函数と見なすのである。（詳しくは [AKT]，[P]，[V] 等を参照）。実際，WKB解のBorel変換は局所的に収束し，x と y（$=\eta$ のdualなvariable）の解析函数を定める。しかし（当然の事ながら）この解析函数は特異点をもつ。そしてこの特異点が，Borel和（= Borel変換のLaplace積分）を考える際の積分路とぶつかり合うと，そこでWKB解のBorel和は不連続性をもつ事になる。こうしてWKB解のBorel和は，上で述べた意味で不連続性をもついくつかの部分（各々は実余次元1，即ち1次元の実曲線）を複素平面（或いはRiemann球面）から除いた各領域で，解析函数として確定する。Voros（[V]）に従って，WKB解のBorel和が確定する領域を，具体的に式で与えておこう。

定義　(1)　$Q(x)$ の零点を，方程式 (1.1) のturning pointと呼ぶ。

(2)　a を1つのturning pointとする時，

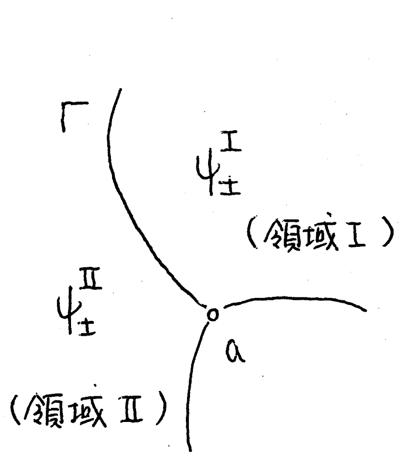
$$\mathrm{Im}\int_a^x \sqrt{Q(x)}\,dx = 0$$

によって定義される（実）曲線を，Stokes curve と呼ぶ。WKB 解が不連続性をもつのは，この Stokes curve においてである。ポテンシャル $Q(x)$ が与えられた時，その全ての turning point とそこから出る Stokes curve を考えると，それらは $\mathbb{C}$ 内に埋め込まれた１つの graph を成す。そして

仮定Ｉ　２つの turning point を結ぶ Stokes curve は存在しない。

を仮定すれば，この graph によって定められた各領域において WKB 解の Borel 和は確定する。（仮定Ｉの意味については，ここでは触れない）。

更に Voros は，Stokes curve をはさんで隣り合った２つの領域における WKB 解の Borel 和を考察し，それらの間に次の形の線型関係式（接続公式）が成り立つ事を示した。（[V]，なお [AKT] も参照）。



接続公式　a を turning point，Γ をそこから出る１つの Stokes curve とし，Γ をはさんで２つの領域ＩとIIが隣り合っているとする。a を積分端点とする WKB 解

$$\psi_\pm = S_{odd}(x;\eta)^{-1/2} \exp \pm \int_a^x S_{odd}(x;\eta)\,dx$$

に対して，領域Ⅰ及びⅡで定まるその Borel 和をそれぞれ $\psi_\pm^{\mathrm{I}}$, $\psi_\pm^{\mathrm{II}}$ と書く事にすれば，次のいずれかが成立する。

$$\text{(a)} \begin{cases} \psi_+^{\mathrm{I}} = \psi_+^{\mathrm{II}} \\ \psi_-^{\mathrm{I}} = \psi_-^{\mathrm{II}} \pm i\,\psi_+^{\mathrm{II}} \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \psi_+^{\mathrm{I}} = \psi_+^{\mathrm{II}} \pm i\,\psi_-^{\mathrm{II}} \\ \psi_-^{\mathrm{I}} = \psi_-^{\mathrm{II}} \end{cases}$$

<u>Remark.</u>　$Q(x)$ と a，Γ が与えられた時，どの場合が起こるかを判定するのは難しくない。（[SAKT] 又は [V] を参照）。この接続公式が，方程式（1.1）の解の大域的な挙動を解析する手段を与える。特に Fuchs 型方程式の場合には，この接続公式を用いる事によって，monodromy を具体的に決定する事が可能となる。次節でそれについて簡単に説明しよう。

§2. Fuchs 型方程式の monodromy

Fuchs 型方程式とは，Riemann 球面上（無限遠点もこめて）特異点が全て確定特異点となる様な方程式である。よく知られた様に，（1.1）という形の 2 階方程式が Fuchs 型である為には，ポテンシャル $Q(x)$ は次の様な有理函数でなければならない。

$$(2.1) \qquad Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)^2} \qquad F, G \in \mathbb{C}[x]$$

$$\deg F = 2g+2, \ \deg G = g+2 \quad (g\text{：非負整数})$$

ここで

$$\begin{cases} F(x)\ の零点を\ a_0, \cdots, a_{2g+1} \\ G(x)\ の零点を\ b_0, \cdots, b_{g+1} \end{cases}$$

とし，以下では次を仮定する。

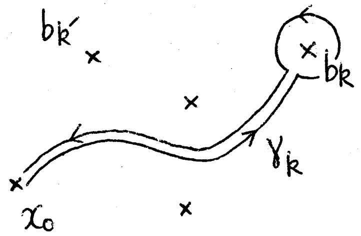
仮定 II　a_j と b_k は全て互いに相異なる。

この時，§1 の用語を用いれば，$\{a_0, \cdots, a_{2g+1}\}$ が方程式 (1.1) ~ (2.1) の turning point の全体となる。他方，微分方程式の立場からは，$\{b_0, \cdots, b_{g+1}, b_{g+2} \overset{\mathrm{def}}{=} \infty\}$ が (1.1) ~ (2.1) の特異点の集合であり，これらは全て確定特異点である。

今，$P^1(\mathbb{C}) \setminus \{b_0, \cdots, b_{g+2}\}$ より基点 x_0 を選び，x_0 のまわりでの方程式 (1.1) ~ (2.1) の基本解系 (ψ_0, ψ_1) を1つとってくると，$P^1(\mathbb{C}) \setminus \{b_0, \cdots, b_{g+2}\}$ 内の閉曲線 γ に沿った (ψ_0, ψ_1) の解析接続を考える事により，monodromy：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(P^1(\mathbb{C}) \setminus \{b_0, \cdots, b_{g+2}\}, x_0) & \longrightarrow & SL_2 \subset GL_2 \\ \gamma & \longmapsto & A_\gamma \end{array}$$

を定義する事ができる。(方程式 (1.1) には1階項がないので，今の場合 monodromy 群は SL_2 の部分群となる)。方程式 (1.1) ~ (2.1) の解の大域的振舞は，この monodromy によって完全に記述される。我々の問題は，ポテンシャル $Q(x)$ が与えられた時に，この monodromy を具体的に決定する事ができないかという事である。



実際には，各 k に対して x_0 を出て b_k の回りを一度だけ回ってくる右図の様な閉曲線 γ_k を適当に選んでおくと，$0 \leq k \leq g+1$ に対する全部で $(g+2)$ 個の monodromy 行列 A_{γ_k} がわかれば，monodromy は完全に決定される。($A_{\gamma_{g+2}}$ は他の A_{γ_k} 達から計算できる)。従って，元々の x_0 の回りでの基本解系 (ψ_0, ψ_1) の選び方の自由度をひいて考えれば，

(2.2)　(monodromy を決定するのに必要なパラメータの数)

$$= 3(g+2) - 3 = 3g+3$$

他方，各 A_{γ_k} の固有値は，確定特異点 b_k における特性指数によって表わされる。これら特性指数は，b_k における局所的な量であり，ポテンシャル $Q(x)$ が与えられた時容易に計算できる。独立に与えられる特性指数の数は，$b_{g+2}(=\infty)$ におけるものも含めて全部で

(2.3)　(独立に与えられる特性指数の数) $= g+3$

(今の場合，方程式に1階項がないので，各 b_k において独立に与えられる特性指数の数は1)。(2.2) と (2.3) を見比べてみると，$g=0$ の時は monodromy が特性指数によって決定され得る事を示唆している。実際，$g=0$ は Gauß の超幾何方程式の場合に相当しており，それについては古典的に monodromy の計算が実行されて，その結果が特性指数のみを用い

て表されている。しかし $g\geqq 1$ の場合については，その類の計算は一般には期待できない。特性指数という局所的な量以外に，(2.2) と (2.3) の差，即ち $2g$ 個の大域的な量が，monodromy を決定するのに必要だからである。

§1 で述べた WKB 解析は，この困難に対する一つの対処の方法を我々に提供してくれる。こうした Fuchs 型方程式についても接続公式は成立し，そしてそれを利用すれば，超幾何方程式とは限らない一般の $g\geqq 1$ の場合についても monodromy を計算する事が可能となるのである。具体的な計算のやり方については [SAKT] を参照してもらう事とし，ここではその結果得られる次の事実を指摘しておこう。即ち，WKB 解を用いて計算した monodromy は次の2種類の量により記述される。

(i) 各確定特異点 b_k における特性指数。

(ii) $\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面上における $S_{odd}(x;\eta)$ の周期積分。

$Q(x)$ の具体形 (2.1) 及び仮定 II より，今の場合 $\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面の genus が丁度 g となっている。従って $\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面上の独立な閉曲線の数は $2g$ であり，故に (ii) の量に含まれる独立なパラメータの数も $2g$，これは正しく (2.2) と (2.3) の差に他ならない。即ち，$\sqrt{Q(x)}$ の Riemann 面上の周期積分によって，Fuchs 型方程式の monodromy のもつ本質的に大域的な部分が統制されている訳である。

§3. monodromy 保存変形 ～ Painlevé VI の場合について

前節で見た様に，WKB解析によって monodromy の計算が可能になったとなれば，今度は monodromy 保存変形の理論と WKB解析との関連が問題となる。ここでは，Painlevé VI の方程式が現われる場合について，少し考察を加えてみたい。

対象となるのは次の方程式である。

$$(3.1)\qquad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+Q(x)\right)\psi(x)=0$$

$$Q(x)=\frac{\alpha_0}{x^2}+\frac{\alpha_1}{(x-1)^2}+\frac{\alpha_\infty}{x(x-1)}+\frac{\alpha_t}{(x-t)^2}+\frac{t(t-1)K}{x(x-1)(x-t)}$$
$$+\frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2}-\frac{\lambda(\lambda-1)}{x(x-1)(x-\lambda)}\left\{\nu+\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)}\right\}$$

但し，ここで K は次式で与えられる。

$$K=\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left\{\nu^2-\left(\frac{\alpha_0}{\lambda^2}+\frac{\alpha_1}{(\lambda-1)^2}+\frac{\alpha_\infty}{\lambda(\lambda-1)}+\frac{\alpha_t}{(\lambda-t)^2}\right)-\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)}\right)^2\right\}$$

(3.1)は，$x=0,1,t,\infty$ を確定特異点とし，$x=\lambda$ をみかけの特異点にもつ方程式である。α_* $(*=0,1,t,\infty)$ は $x=*$ における特性指数に関係したパラメータで，方程式はこれらに加えて λ と ν，全部で6個のパラメータを含んでおり，§2の設定で言えば（みかけの特異点 λ が導入されている点を別にして）$g=1$ の場合に相当している。

この方程式において t を変形のパラメータと見なし，monodromy が不変に保たれる様な条件を考える。勿論 α_* 達は t

に依らない定数となる訳であるが，1907年 R. Fuchs によって示された様に，この時 λ は Painlevé VI をみたさねばならない。実際，方程式 (3.1) が monodromy 保存変形を定める事と，対応する解 $\psi(x)$ が (3.1) に加えて次の形の変形方程式：

(3.2) $\quad \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = A(x,t)\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + B(x,t)$，ここで A, B は x について有理函数

をみたす事とが同値であり，そこから線型方程式系 (3.1)～(3.2) の compatibility condition として，λ と ν に対する（K を Hamiltonian とする）Hamilton 系：

(3.3) $\quad \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{\partial K}{\partial \nu}, \quad \dfrac{d\nu}{dt} = -\dfrac{\partial K}{\partial \lambda}$

が得られるのである。（詳しくは，例えば [JMU], [JM], [O] 等を参照）。(3.3) から ν を消去した $\lambda = \lambda(t)$ に関する２階の非線型方程式が Painlevé VI に他ならない。

我々は，これを WKB 解析の立場から，特に $\sqrt{Q}$ の Riemann 面やその上の周期積分との関連について検討してみたい。その為には large parameter η（或いは，それに伴う filtration と言ってもよい）を方程式 (3.1) に導入する必要がある。まず，t や x は $P^1(\mathbb{C})$ の上を動く変数であるので，η には依存しない（従って，強いて言えば斉次０次の量）とする。次に，WKB 的な η の入った方程式 (1.1) と問題の (3.1) とを見比べて，他のパラメータの η- 依存性を決めよう。ポテンシャルの形から，α_* は η について２次の量と考えるのが自然である。

ここでは，簡単の為に α_* は η について斉次2次であるとし，α_*/η^2 を新ためて α_* と書く事にする。（これでも記号の混乱は生じないであろう）。

$$\alpha_* \longrightarrow \eta^2\alpha_* \qquad (* = 0, 1, t, \infty)$$

他方，λ はみかけの特異点の位置であるから η について0次，従って，ポテンシャルの中で K は高々2次となるはずだから，これより ν は高々1次となる。即ち，

$$\lambda \longrightarrow \lambda_0 + \eta^{-1}\lambda_1 + \eta^{-2}\lambda_2 + \cdots$$

$$\nu \longrightarrow \eta\nu = \eta(\nu_0 + \eta^{-1}\nu_1 + \eta^{-2}\nu_2 + \cdots)$$

これらを (3.1) に代入して，我々は large parameter η の入った次の方程式を得る。

$$(3.4) \qquad \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 Q(x,t;\eta)\right)\psi(x,t;\eta) = 0$$

$$Q(x,t;\eta) = Q_0(x,t) + \eta^{-1}Q_1(x,t) + \eta^{-2}Q_2(x,t) + \cdots$$

特に
$$Q_0(x,t) = \frac{\alpha_0}{x^2} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\alpha_\infty}{x(x-1)} + \frac{\alpha_t}{(x-t)^2} + \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)(\lambda_0-t)}{x(x-1)(x-t)}\left\{\nu_0^2 - \left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0^2} + \frac{\alpha_1}{(\lambda_0-1)^2} + \frac{\alpha_\infty}{\lambda_0(\lambda_0-1)} + \frac{\alpha_t}{(\lambda_0-t)^2}\right)\right\}$$

方程式 (3.4) が monodromy 保存変形を定める時，WKB解析の立場から見て，$\sqrt{Q_0}$ の Riemann 面やその上の周期積分がどうなっているかを調べる事が以下の目標である。

$$(3.5) \qquad \psi(x,t;\eta) = \exp\int_{x_0}^{x} S(x,t;\eta)\,dx$$

$$S(x,t;\eta) = \eta S_{-1}(x,t) + S_0(x,t) + \eta^{-1}S_1(x,t) + \cdots$$

を (3.4) のWKB解とする。ここでは $S(x,t;\eta)$ を $\sqrt{Q_0}$ 上の函数と見なしている事に注意。($\sqrt{Q_0}$ の branch のとり方による2つの解を区別しないで扱っている)。これから暫くは,(WKB解(3.5)も含めて) Borel 総和は考えずに η^{-1} に関する形式巾級数の枠内で考える。まず次の命題から始めよう。

<u>命題1</u>　方程式 (3.4) が monodromy 保存変形を定める時, $S(x,t;\eta)$ は次式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x,t;\eta) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(A(x,t;\eta)S(x,t;\eta) + B(x,t;\eta)\Big) \tag{3.6}$$

ここで A, B は変形方程式 (3.2) に現われた函数である。

(証明) 微分作用素 L, M を次の様に置く。

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 Q(x,t;\eta)$$

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - A(x,t;\eta)\frac{\partial}{\partial x} - B(x,t;\eta)$$

monodromy 保存を仮定する時, Hamilton 系 (3.3) が成立し, L と M についての compatibility condition が成立する。従って,

$$[L, M] = f(x,t;\eta)L$$

となる様な $f(x,t;\eta)$ が存在する。($\frac{\partial}{\partial t}$ を含むのが M のみで, しかも今の場合, 1階でその係数が定数である事に注意。なお, $f(x,t;\eta)$ は実際には $-2\frac{\partial A}{\partial x}(x,t;\eta)$ に等しい)。WKB解(3.5) は $L\psi = 0$ をみたすので, これより

$$LM\psi = 0$$

即ち，$M\psi$ も又 (3.4) の解である。ここで $M\psi$ を具体的に計算すると，

$$M\psi = \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\partial S}{\partial t}\, dx - AS - B \right\} \exp \int_{x_0}^{x} S\, dx$$

となるが，これは

$$c(t;\eta)\ \exp \int_{x_0}^{x} (\eta S_{-1}(x,t) + \widetilde{S}_0(x,t) + \eta^{-1}\widetilde{S}_1(x,t) + \cdots)\, dx$$

という形にまとめ直す事ができる。($c(t;\eta)$ は x に依存しない)。すると (3.4) の WKB 解の一意性により，$M\psi = c(t;\eta)\psi$ が成り立たねばならない。即ち

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial S}{\partial t}\, dx - AS - B = c(t;\eta)$$

これを x について微分すれば (3.6) を得る。　　　　(証了)

ここで $A(x,t;\eta)$，$B(x,t;\eta)$ の具体的な形を述べておくと，

$$(3.7) \qquad A = \frac{\lambda - t}{t(t-1)} \frac{x(x-1)}{x-\lambda}, \qquad B = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} A$$

(これは，みかけの特異点も含めて，各確定特異点における古典的に知られた解の挙動，及び方程式 (3.1) と (3.2) の compatibility よりわかる。詳しくは [0] を参照)。

この命題 1 を利用すれば，(3.4) が monodromy 保存変形を定めている時の WKB 解の構造を解析する事ができる。それを命題 2 として次にまとめておこう。

命題２　方程式(3.4)が monodromy 保存変形を定める（従って(3.6)が成り立つ）時，次の(1)〜(3)が成立する。

(1)　λ_0 は(3.4)の double turning point となる。即ち，

$$Q_0(\lambda_0, t) = \frac{\partial Q_0}{\partial x}(\lambda_0, t) = 0 \tag{3.8}$$

従って ν_0，λ_0 は t の函数として次の代数方程式を満足する。

$$\begin{cases} \nu_0 = 0 \\ (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty + \alpha_t) - \alpha_0 \dfrac{t}{\lambda_0^2} + \alpha_1 \dfrac{t-1}{(\lambda_0 - 1)^2} - \alpha_t \dfrac{t(t-1)}{(\lambda_0 - t)^2} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

(2)　他の ν_j，λ_j $(j \geq 1)$ も t の函数として(3.6)より帰納的に求まる。特に

$$\nu_j = 0 \ (j : \text{even の時}), \quad \lambda_j = 0 \ (j : \text{odd の時})$$

従って，j : odd の時 $Q_j(x, t) \equiv 0$ である。

(3)　j : odd の時，$S_j(x, t)$ は $x = \lambda_0$ において正則である。

Remark.　方程式(3.1)に large parameter η を導入して(3.4)を得た訳だが，その過程で方程式(3.2)，更に Hamilton 系(3.3)にも large parameter が導入されている。特に Hamilton 系(3.3)は

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \eta \dfrac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} \nu \\ \dfrac{d\nu}{dt} = \eta \dfrac{1}{t(t-1)} \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty + \alpha_t) - \alpha_0 \dfrac{t}{\lambda_0^2} + \alpha_1 \dfrac{t-1}{(\lambda_0 - 1)^2} - \alpha_t \dfrac{t(t-1)}{(\lambda_0 - t)^2} \right\} \end{cases} \tag{3.10}$$

$$- \eta \frac{3\lambda_0^2 - 2(t+1)\lambda_0 + t}{t(t-1)} \nu_0^2 + (\eta \text{ に関して order が高々0次の項})$$

という特異摂動型の方程式になり，これは ν_0，λ_0 から順に代数的に求まっていく様な η^{-1} に関する形式巾級数解を持つ。上記命題２の (3.9) 及び (2) で定まる $\{\nu_j, \lambda_j\}_{j\geq 0}$ は，正しくこの (3.10) の形式巾級数解に他ならない。

命題２の (1) は，４つある (3.4) の turning point（即ち Q_0 の零点）の内の２つが λ_0 である事を主張している。方程式 (3.4) は，この様に double turning point をもつ為に，§２で述べた仮定Ⅱがみたされず，従って前節の議論はそのままの形では適用されない。しかし，$\sqrt{Q_0}$ の Riemann 面の構造という面から考えれば，double turning point をもつという事はその genus が１ではなく０に退化している事になる。更に，漸化式 (1.4) を見れば一般に turning point においては $S_j(x)$ は複雑な特異性をもつにも拘わらず，この場合は命題２ (3) が示す様に，$S_{odd}(x,t;\eta)$ は（少くとも η^{-1} に関する形式巾級数としては）double turning point λ_0 において特異性を有していない。（(2) によって j: odd の時 $Q_j\equiv 0$ であるから，方程式 (3.4) についても $S_{even}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log S_{odd}$ が成立し，従って WKB 解 (3.5) は，(1.5) の様に S_{odd} のみを用いて表す事も可能である点に注意）。これは，$\sqrt{Q_0}$ の Riemann 面という（η に関する主要項から定まる）幾何学的な対象のみならず，（η^{-1} について高次の項の情報も含んだ）その上の $S_{odd}(x,t;\eta)$ の周期積分を考えるに際しても，double turning point λ_0

が特異点とはならずに恰も通常の正則点であるかの如く振舞う事を意味する。即ち，(3.4) が monodromy 保存変形を定める時，$\sqrt{Q_0}$ の Riemann 面とその上の周期積分という構造は genus が 1 から 0 の場合へと退化している，これが命題 2 の主張する内容である。

(命題 2 の証明)　まず (1) を示す。(3.6) の η について 1 次の項を比較すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_0 - t}{t(t-1)} \frac{x(x-1)}{x-\lambda_0} S_{-1} \right)$$

S_{-1} が $x=\lambda_0$ の近傍で $(x-\lambda_0)$ について k 次とする。左辺は高々 $(k-1)$ 次となるのに対し，右辺は $k \neq 1$ なら $(k-2)$ 次。これは矛盾。よって S_{-1} は $x=\lambda_0$ で 1 次，従って Q_0 は 2 次でなければならない。(3.9) は，Q_0 の具体的な形を見れば (3.8) よりわかる。

次に (2) の一部と (3) を同時に帰納法で示す。今，(3.7) で与えられる $A(x,t;\eta)$ を η^{-1} に関して形式巾級数に展開して

$$\begin{aligned} A(x,t;\eta) &= \frac{x(x-1)}{t(t-1)} \left\{ (x-t)(x-\lambda)^{-1} - 1 \right\} \\ &= a_0(x,t) + \eta^{-1} a_1(x,t) + \eta^{-2} a_2(x,t) + \cdots \end{aligned} \tag{3.11}$$

と書く事にする。この時，やはり (3.7) より

$$B(x,t;\eta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} a_0(x,t) + \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial x} a_1(x,t) + \eta^{-2} \frac{\partial}{\partial x} a_2(x,t) + \cdots \right)$$

である。さて，以下ではnに関する次の命題：

i) S_{2n-1} は $x=\lambda_0$ で正則。

ii) $\sum_{j=0}^{n} a_{2j} S_{2(n-j)-1}$ は $x=\lambda_0$ で正則。

iii) $Q_{2n-1}=0$ iv) $v_{2(n-1)}=0$ v) $\lambda_{2n-1}=0$

を帰納法で証明する。まず $n=0$ の時は，(1) で示した様に S_{-1} は $x=\lambda_0$ で1位の零点をもつので，S_{-1}, $a_0 S_{-1}$ ともに $x=\lambda_0$ で正則，従って i), ii) が成立する。(iii)〜v) は $n=0$ の時は trivial)。そこで，0からnまで成立を仮定して (n+1) の時も成り立つ事を示そう。鍵になるのは次の2つの方程式である。

$(R)_k$ [Riccati eq'n] $$\sum_{j=0}^{k} S_{j-1}S_{k-j-1}+\frac{\partial}{\partial x}S_{k-2}=Q_k \quad (k\geq 0,\ 但し\ S_{-2}\equiv 0)$$

$(D)_k$ [deformation eq'n] $$\frac{\partial S_k}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j S_{k-j}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}a_k\right) \quad (k\geq -1,\ 但し\ a_{-1}\equiv 0)$$

<u>iii)〜v) の証明</u>

Riccati eq'n $(R)_{2n+1}$ の辺々を t で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{2n+1}=\sum_{j=0}^{2n+1}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}S_{j-1}\right)S_{2n-j}+S_{j-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}S_{2n-j}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}S_{2n-1}$$

右辺に現われる S の t 微分を deformation eq'n (D) を用いて書き直し，和を整理すれば，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Q_{2n+1}&=2\sum_{j=0}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_j\right)\cdot\left\{\sum_{l=0}^{2n+1-j}S_{l-1}S_{2n-j-l}+\frac{\partial}{\partial x}S_{2n-1-j}\right\}\\&\quad+\sum_{j=0}^{2n}a_j\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{l=0}^{2n+1-j}S_{l-1}S_{2n-j-l}+\frac{\partial}{\partial x}S_{2n-1-j}\right\}\\&\quad+2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{2n+1}S_{-1}\right)\right\}\cdot S_{-1}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}a_{2n-1}\end{aligned}$$

再び Riccati eq'n (R) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{2n+1} = 2\sum_{j=0}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x} a_j\right) Q_{2n+1-j} + \sum_{j=0}^{2n} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x} Q_{2n+1-j}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial x}(a_{2n+1} S_{-1})\right) S_{-1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3} a_{2n-1}$$

ここで帰納法の仮定より $Q_1 = \cdots = Q_{2n-1} = 0$ 及び $a_1 = \cdots = a_{2n-1} = 0$ (後者は $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2n-1} = 0$ より従う) であるから，結局次式が成立する。

$$(3.12) \qquad \frac{\partial}{\partial t} Q_{2n+1} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} a_0\right) Q_{2n+1} + a_0\left(\frac{\partial}{\partial x} Q_{2n+1}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x}(a_{2n+1} S_{-1})\right) S_{-1}$$

さて (3.11) 式より

$$a_0 = \frac{x(x-1)}{t(t-1)}\,\frac{\lambda_0 - t}{x-\lambda_0}, \qquad a_{2n+1} = \frac{x(x-1)(x-t)}{t(t-1)}\,\frac{1}{(x-\lambda_0)^2}\,\lambda_{2n+1}$$

($\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2n-1} = 0$ に注意)。一方，$\nu_0 = \cdots = \nu_{2(n-1)} = 0$，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2n-1} = 0$ である事を用いれば，ポテンシャルの形より

$$Q_{2n+1} = \frac{1}{x(x-1)(x-t)}\Big[\lambda_0(\lambda_0-1)(\lambda_0-t)\,2\nu_1\nu_{2n} - \Big\{(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_\infty+\alpha_t) -$$
$$- \alpha_0\frac{t}{\lambda_0^2} + \alpha_1\frac{t-1}{(\lambda_0-1)^2} - \alpha_t\frac{t(t-1)}{(\lambda_0-t)^2}\Big\}\lambda_{2n+1}\Big] - \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{x(x-1)(x-\lambda_0)}\nu_{2n}$$
$$= \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)(\lambda_0-t)}{x(x-1)(x-t)}\,2\nu_1\nu_{2n} - \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{x(x-1)(x-\lambda_0)}\nu_{2n}$$

が成り立つ。そこで (3.12) において $x=\lambda_0$ での次数を比較する。S_{-1} が $x=\lambda_0$ で 1 位の零点を持つ事に注意すれば，(3.12) で (-3) 次の項を比べて，

$$0 = 3\,\frac{\lambda_0(\lambda_0-1)(\lambda_0-t)}{t(t-1)}\,\nu_{2n}$$

従って $\nu_{2n}=0$ を得る。これより $Q_{2n+1}=0$。すると (3.12) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{2n+1}S_{-1}\right)\right)S_{-1}=0$$

となるが，特に (-1) 次の係数を考えると $\lambda_{2n+1}=0$ も成立する事がわかる。

i), ii) の証明

まず $(D)_{2n+1}$ を考える。上で示した事から $a_1=\cdots=a_{2n+1}=0$ となるので，

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{n+1}a_{2j}S_{2n+1-2j}\right)$$

(3.13)

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0S_{2n+1}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{n+1}a_{2j}S_{2n+1-2j}\right)$$

ここで $\lambda_1=\cdots=\lambda_{2n+1}=0$ より，(3.11) を用いれば

$$(x-\lambda_0)\,a_{2k}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{2j}\,a_{2(k-j)}+\frac{x(x-1)}{t(t-1)}\lambda_{2k}$$

が $1\leqq k\leqq n+1$ をみたす任意の k に対して成立する。これらを利用して (3.13) の右辺第2項を式変形すれば，次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0S_{2n+1}\right)$$

(3.14)

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x-\lambda_0}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{2(n+1-k)}\left\{\sum_{j=0}^{k}a_{2j}S_{2(k-j)-1}+\frac{x(x-1)}{t(t-1)}S_{2k-1}\right\}\right]$$

再び (3.14) において $x=\lambda_0$ での次数を比較する。帰納法の仮定より，右辺第2項は高々 (-2) 次である。従って S_{2n+1} は $x=\lambda_0$ で正則でなければならない。(3.13) に戻れば，$\sum_{j=0}^{n+1}a_{2j}\cdot S_{2n+1-2j}$ も $x=\lambda_0$ で正則となる事がわかる。

これで帰納法が完成した。後は，λ_0 を (3.9) をみたす様に与えた時，ν_{2n-1}，λ_{2n} ($n\geq 1$) が一意的に求まっている事を示せばよい。これも帰納法を用いる。まず，(3.9) により Q_{2n+2} は $n\geq 0$ の時 $\{\lambda_{2j}, \nu_{2j+1}\}_{0\leq j\leq n}$ までで表されている事に注意する。従って S_{2n+1}，S_{2n+2} も $n\geq 0$ の時 $\{\lambda_{2j}, \nu_{2j+1}\}_{0\leq j\leq n}$ までで表される。(S_{-1}，S_0 は λ_0 で表される)。さて，今 $\{\nu_{2j-1}, \lambda_{2j}\}_{0\leq j\leq n}$ までが求まっているとしよう ($n\geq 0$)。すると，Q_{2n+2} の中で ν_{2n+1} を含む項が

$$\frac{\lambda_0(\lambda_0-1)(\lambda_0-t)}{x(x-1)(x-t)}\, 2\nu_1\nu_{2n+1} - \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{x(x-1)(x-\lambda_0)}\,\nu_{2n+1}$$

のみである事に注目すれば，Riccati eq'n $(R)_{2n+2}$：

$$\sum_{j=0}^{2n+2} S_{j-1}S_{2n+1-j} + \frac{\partial}{\partial x}S_{2n} = Q_{2n+2}$$

の両辺の $x=\lambda_0$ における留数を考えると，ν_{2n+1} が $\{\nu_{2j-1}, \lambda_{2j}\}_{0\leq j\leq n}$ までで表されている事がわかる。(j：odd の時 S_j は $x=\lambda_0$ で正則だから，左辺の中で $x=\lambda_0$ における留数に寄与するのは，高々 S_{2n} まで)。更に，上で示した様に，

$$a_0S_{2n+1} + a_2S_{2n-1} + \cdots + a_{2n+2}S_{-1}$$

は $x=\lambda_0$ で正則であるが，これは

$$\mathrm{Res}_{x=\lambda_0}(a_{2n+2}S_{-1}) = -\mathrm{Res}_{x=\lambda_0}(a_0S_{2n+1} + \cdots + a_{2n}S_1)$$

が成立する事を意味する。ここで a_{2n+2} は

$$a_{2n+2} = \frac{\lambda_{2n+2}}{(x-\lambda_0)^2} + \frac{C_3}{(x-\lambda_0)^3} + \cdots + \frac{C_{n+2}}{(x-\lambda_0)^{n+2}}$$

（$C_3, \cdots, C_{n+2}$ は $\lambda_2, \cdots, \lambda_{2n}$ の多項式で表される）

という形をしているので，これより λ_{2n+2} も $\{\nu_{2j-1}, \lambda_{2j}\}_{0\leq j\leq n}$ 及び ν_{2n+1} によって表される。これで ν_{2n+1}, λ_{2n+2} も一意的に定まっている事が示された。（証了）

命題2によって，方程式(3.4)が monodromy 保存変形を定めている時，少くとも η^{-1} の形式巾級数としては，S_{odd} は $x=\lambda_0$ において通常の正則点の様に振舞う事がわかった。更に Borel 総和に関しても，λ_0 は turning point としては機能しない。次の命題にその辺の事情があらわれている。

<u>命題3</u>　方程式(3.4)が monodromy 保存変形を定めている時，$x=\lambda_0$ の近傍において正則な函数列 $z_j(x)$ $(j=0,1,2,\cdots)$ が存在して，形式的な変数変換

$$z(x;\eta) = z_0(x) + \eta^{-1}z_1(x) + \eta^{-2}z_2(x) + \cdots$$

及び

$$\psi(x;\eta) = \left(\frac{\partial z(x;\eta)}{\partial x}\right)^{-1/2} \varphi(z(x;\eta);\eta)$$

によって，方程式(3.4)は

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \eta^2(z-\lambda_0)^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{(z-\lambda_0)^2}\right)\varphi(z;\eta) = 0 \tag{3.15}$$

に変換される。（ここでもtは固定して考えている）。

（証明） 方程式(3.15)のWKB解を $\exp\int_{z_0}^{z} T(z;\eta)\,dz$ と書く事にする。容易にわかる様に，$T(z;\eta)$は

$$T(z;\eta) = \pm\eta(z-\lambda_0) - \frac{1}{2}\frac{1}{z-\lambda_0}$$

と有限級数になる。

さて，命題を証明するには，

$$S(x;\eta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} + \frac{\partial z}{\partial x}\,T(z(x;\eta);\eta) \tag{3.16}$$

をみたす正則函数列 $z_j(x)$ の存在を示せばよい。まず，j: odd の時は $z_j(x)=0$ と定める。そこで，(3.16)の η に関する奇数次の項だけをとり出せば，

$$\begin{aligned} S_{odd}(x;\eta) &= \frac{\partial z}{\partial x}\,T_{odd}(z(x;\eta);\eta) \\ &= \eta\,\frac{\partial z}{\partial x}\,(z(x;\eta)-\lambda_0) \end{aligned} \tag{3.17}$$

即ち，

$$S_{2k-1}(x) = \frac{\partial z_{2k}}{\partial x}(z_0-\lambda_0) + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial z_{2(k-j)}}{\partial x}\,z_{2j} \qquad (k\geqq 0)$$

これをみたす正則函数列は確かに存在する。実際，

$$z_0(x) = \lambda_0 + \left(2\int_{\lambda_0}^{x}\sqrt{Q_0(x)}\,dx\right)^{1/2}$$

と定めれば，$z_0(x)$は $S_{-1} = \frac{\partial z_0}{\partial x}(z_0-\lambda_0)$ を満足し，しかも λ_0 が Q_0 の2位の零点であるので $z_0(x)$ は $x=\lambda_0$ で正則となる。後は帰納的に

$$z_{2k}(x) = \frac{1}{z_0-\lambda_0}\int_{\lambda_0}^{x}\left\{S_{2k-1}(x) - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial z_{2(k-j)}}{\partial x}\,z_{2j}\right\}dx \qquad (k\geqq 1)$$

と定義すればよい。命題2 (3) より $S_{2k-1}(x)$ は $x=\lambda_0$ で正則だから，$z_{2k}(x)$ も同様である。こうして (3.17) をみたす正則函数列の存在がいえた。

(3.17) の対数微分をとれば，

$$\frac{\partial}{\partial x}\log S_{odd} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{z-\lambda_0}$$

命題2 (2) より $Q_1=Q_3=\cdots=0$ であるから，今の場合 $S_{even} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log S_{odd}$ が成立している。故に，

$$S_{even}(x;\eta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)T_{even}(z(x;\eta);\eta)$$

よって (3.17) と合わせて，この正則函数列が (3.16) をみたす事が示された。 (証了)

上の証明の中でも述べた様に，方程式 (3.15) の WKB 解は有限級数であり，Borel 総和という視点に立てば trivial である。問題の方程式 (3.4) は，$x=\lambda_0$ の近傍において WKB 解が trivial な方程式 (3.15) に変換される訳だから，その意味において λ_0 は (3.4) の turning point とはなり得ない。即ち λ_0 は，方程式 (3.4) の Stokes curve 或いはその全体としての Stokes graph には関係してこないのである。

実際に，命題2の主張する様な $\sqrt{Q_0}$ の Riemann 面とその上の周期積分との退化が起こっている場合に，方程式の Stokes curve や monodromy の計算がどうなるかを論じる事は，非常に

興味深い。(例えば，それは命題2の逆を確かめる事にもなる)。しかしより厳密にそれを実行するには，これまでの議論を更に先へと推し進めるよりも，扱う対象を方程式(3.4)と変形方程式(3.2)の連立系であると考えた方がより自然で見通しが良くなる様に思われる。そこで，そのテーマに関する考察は別の機会に譲る事としたい。また，命題2で得られたHamilton系(3.10)(或いは同じ事だがPainlevé VI)の形式巾級数解に対するWKB解析，即ちBorel総和法を基にした解析も，これからの興味深いテーマの一つになるであろう。

参考文献

[AKT] T. Aoki, T. Kawai & Y. Takei ; ICM-90 Satellite Conf. Proc., "Special Functions", Springer-Verlag, 1991, pp. 1-29.

[DD] E. Delabaere & H. Dillinger ; Contribution à la résurgence quantique: Résurgence de Voros et fonction spectrale de Jost, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1991.

[E] J. Ecalle ; Cinq applications des fonctions résurgentes, Prépublications d'Orsay, 84T62, Univ. Paris-Sud, 1984.

[JMU] M. Jimbo, T. Miwa & K. Ueno ; Physica 2D (1981) 306-352.

[JM] M. Jimbo & T. Miwa ; Physica 2D (1981) 407-448.

[KT] T. Kawai & Y. Takei ; Secular Equations through the Exact WKB Analysis, preprint (RIMS-852), to appear in the Proc. of Japan-France Symposium, 1991.

[O] K. Okamoto; 上智大学数学講究録, No. 19, 1985.

[P] F. Pham; Algebraic Analysis, Vol. II, Academic Press, 1988, pp. 699-726.

[SAKT] M. Sato, T. Aoki, T. Kawai & Y. Takei; RIMS 講究録 750 (1991) 43-51. (Notes by A. Kaneko).

[V] A. Voros; Ann. Inst. H. Poincaré 39 (1983) 211-338.