数理解析研究所講究録
第 810 巻 1992 年 264-279


# explicit reciprocity law と zeta の値

東京工業大学　加藤和也 (Kazuya Kato)

explicit reciprocity law は，局所類体論にあらわれる Hilbert symbol を explicit に表示する方法で，Artin, Hasse，岩沢，白谷，Wiles，Coleman，Vostokov，Brückner，de Shalit など，多くの人々によって研究されてきた。p 進体の数論の中でも非常に優美な主題である．上に言う"explicit な表示"には，微分形式があらわれるが，微分形式と Hilbert symbol という２つの異質なものが結びつくことが神秘的である。

１方「zeta の値」とは，複素関数として定義される様々のゼータ関数の整数点での値をいう。explicit reciprocity law と zeta の値は，百億光年を超えるほど離れている。たとえ p 進世界と実・複素世界が，いずこかで接しているとしても，explicit reciprocity law は p 進世界の奥深くに位置しているからである。しかしながら explicit reciprocity law と zeta の値は深く結びついているようである．本稿の目的はこの結びつき

を特別な場合に示し（正確には，リーマン・ゼータ関数や，虚数乗法をもつ楕円曲線のL関数について，今まで知られている結びつきを少し拡張し），もっと一般の Hasse-Weil L関数についても，結びつくことを想像することである。

これを考えるにあたり，第1に重要なことは，explicit reciprocity law の本質を次のようにとらえることである。explicit reciprocity law は「Hilbert symbol と微分形式の間の神秘的な関係」であるが，これは「p進 etale cohomology と微分形式の間の神秘的な関係」を考察するp進 Hodge 理論（p進 period の理論とも呼ばれる。Tate，Fontaine，Messing，Faltings らの人々が研究してきた）の，一つの重要な応用分野と見るべきである。

この見方については，筆者は [Ka] において論じ，この見方から，ふつうの局所体だけでなく高次元局所体や $\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]]/(T_1T_2-p)$ のような環の有限次拡大に対して，explicit reciprocity law を考察した。しかし explicit reciprocity law はもっと拡張されるべきである。

主題1．局所体の任意のp進 Galois 表現に対し，「p進 Galois 表現の explicit reciprocity law と呼ぶべきものが存在すると見るべきである。それはp進 Hodge 理論，p進 period の理論の応用として得られるはずである。

（[Ka]で考察されたのは，trivial な1次元Galois表現の explicit reciprocity law である。）

次にゼータの値である。[Ka]の考察をしていた頃筆者はゼータの値など全く勉強したこともなく，explicit reciprocity law がゼータの値と結びつくことなど考えてもみなかった。と，個人的な話を書くのは，explicit reciprocity law とゼータの値の距離の大きさについて述べたかったのである。しかしながら，$\mathbb{C}$上の解析を使って period integral とゼータの値が結びつくことが，多くの人々の研究によって知られている以上，そのp進版として，p進 period の理論とゼータの値が結びつくということが，それも，「主題1」の一般化された explicit reciprocity law を通して結びつくということが，実現されるべきである。

主題2．主題1のp進Galois表現が，大域体上のモチーフから来る場合，このp進Galois表現の explicit reciprocity law は，そのモチーフの Hasse-Weil ゼータ関数の値と，結びつくべきである。

ゼータの値は，いつどこで explicit reciprocity law を学んだのか。宇宙ができる前か，あとか。explicit reciprocity law の中にあらわされる，ゼータの値のあふれる思いは，何か。その根源は何か。それをどこに電話をして聞けばわかるのか。

本稿の内容は 論文

An approach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L-functions via $B_{dR}$

に書きつつあり詳しいことはそちらを参照されたい。また

これも未完成であるが 論文

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of elliptic cusp forms

に関連事柄（保型形式関係）を書くつもりである。

## §1. p 進 Hodge 理論（復習）

K を標数 0 の完備離散付値体で，剰余体が標数 $p>0$ の完全体であるものとする。$Gal(\bar{K}/K)$ の p 進表現についての Fontaine の理論を復習する。Fontaine は $B_{dR}$ という，完備離散付値体で，$Gal(\bar{K}/K)$ が作用しているものを定義した。$B_{dR}^i$ $(i\in\mathbb{Z})$ で，$B_{dR}$ の元で（正規加法）付値が $\geq i$ であるもの全体をあらわす。K は $B_{dR}$ の付値環 $B_{dR}^0$ の部分体と同一視され，$B_{dR}$ の $Gal(\bar{K}/K)$-fixed part は K である。Fontaine は，$Gal(\bar{K}/K)$ が連続に作用する有限次 $\mathbb{Q}_p$-vector space の圏から，K 上の有限次 vector space で降 filtration（添字集合 $\mathbb{Z}$）を付されたものの圏への，functor $D_{dR}$ を，

$$D_{dR}(V) = H^0(K, B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V), \qquad D_{dR}^i(V) = H^0(K, B_{dR}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

と定義した．（$H^m(K, \ )$ で，連続 cohomology $H^m(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \ )$ をあらわす。$H^0(K, \ )$ とは $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-fixed part に他ならない。但し，$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ はテンソル積 $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ に $\sigma \otimes \sigma$ で作用する。），一般に

$$\dim_K D_{dR}(V) \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

が成立し，ここで等号が成立する時，$V$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の de Rham 表現であるといわれる。

Faltingsの定理．$X$ を $K$ 上の smooth proper scheme とし，$m \geqq 0$ とし，$V = H^m_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ とおくと，$V$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の de Rham 表現であり，filtered $K$-vector space として

$$D_{dR}(V) \cong H^m_{dR}(X/K).$$

（ここに $H^m_{dR}(X/K)$ は Hodge filtration を付される。特別な場合にはこの定理は，Fontaine, Messing によって証明されていた。）

$V$ を de Rham 表現とするとき，dual exponential と呼ぶ map

$$\exp^* : H^1(K, V) \longrightarrow D^0_{dR}(V)$$

が次の合成写像として定義される。

$$H^1(K, V) \to H^1(K, B^0_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \xleftarrow[(*)]{\cong} H^0(K, B^0_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = D^0_{dR}(V).$$

ここに $(*)$ は，$H^1(K, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Q}_p)$ の元

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \xrightarrow[(**)]{} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Q}_p$$

（$(**)$ は 1 の $p$ 巾根への作用）である．（$(*)$ は同型になる。）

## §2 Lubin-Tate 群の explicit reciprocity law（復習．§1と独立）de Shalit [dS] 参照）

Kは§1のとおり，FをKの部分体で$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大であり，Fの素元がKでも素元であるものとする．

Fの素元$\pi$をfixし，Gを組$(F, \pi)$に対応する$\mathcal{O}_F$上のLubin-Tate群とする。

$K_n$ =（KにGの$\pi^n$分点の座標を添加して得られる体）

$T$ =（Gの$\pi$進Tate加群）

$\xi = (\xi_n)_n$ をTの$\mathcal{O}_F$-basis（$\xi_n$は原始$\pi^n$-分点）としfixする.（Tは$\mathcal{O}_F$加群としてrank 1の自由加群であることに注意.）

$\mathrm{Lie}(G)$ =（Gの原点でのtangent space）

$\mathrm{coLie}(G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathrm{Lie}(G), \mathcal{O}_F)$

（$\mathrm{Lie}(G)$, $\mathrm{coLie}(G)$は$\mathcal{O}_F$上rank 1の自由加群であることに注意）

$\mathrm{coLie}(G)$をG上の不変微分形式全体の空間と同一視する。

$\mathcal{O}_K(G)$ =（$\mathcal{O}_K$上定義された，G上の形式的正則関数全体の環）　（$\mathcal{O}_K(G) \cong \mathcal{O}_K[[T]]$である）

$\varphi : \mathcal{O}_K(G) \to \mathcal{O}_K(G)$ を，$\varphi(x) \equiv x^q \mod \pi\mathcal{O}_K(G) \quad \forall x \in \mathcal{O}_K(G)$
（$q$はFの剰余体の位数）をみたし$\mathcal{O}_F(G)$上恒等写像となる唯一の環準同型とする．

Coleman power seriesを復習する。 $u = (u_m)_{m \geq 1} \in \varprojlim K_m^\times$

（$\varprojlim_m$ はノルム写像 $K_{m+1}^\times \to K_m^\times$ についてとられる）に対し，$u$ に付随する Coleman power series と呼ばれる元

$g_u \in O_K(G)[\frac{1}{h}]^\times$　　$h$ は"原点：$O_K(G) \to O_K$"の核（$O_K(G)$ の単項 ideal である）の生成元

が，　$\varphi^{-m}(g_u)(\xi_m) = u_m \quad \forall m \geq 1$ をみたす唯一のものとして定まる。

以下，K の剰余体は有限体とし　$n \geq 1$ を fix し，

(2.1) $$\varprojlim_m K_m^\times \longrightarrow \mathrm{coLie}(G) \otimes_{O_F} K_n$$

を次のように定義する。まず，

(2.2) $$G(O_{K_m}) \times K_m^\times \longrightarrow O_F/\pi^m O_F$$

を次の（有名な）pairing とする。ここに $G(O_{K_m})$ は $K_m$ の極大 ideal の上に G による演算を定義したものである。

$x \in G(O_{K_m})$，$y \in K_m^\times$ とする．(2.2) による $(x, y)$ の像は，次の合成写像による $y$ の像と定義される。

$$K_m^\times \underset{(*)}{\longrightarrow} \mathrm{Gal}(K_m^{ab}/K_m) \underset{(**)}{\longrightarrow} O_F/\pi^m O_F$$

（$K_m^{ab}$ は $K_m$ の最大アーベル拡大，(*) は局所類体論の reciprocity map，(**) は　$\sigma \longmapsto a \bmod \pi^m$　ここに

$[\pi^m]\alpha = x$ なる $\alpha$ をとると　$\sigma(\alpha) = \alpha \overset{G}{+} [a]\xi_m$　）

$F = \mathbb{Q}_p$，$\pi = p$ の場合，G は formal multiplicative group，$G(O_{K_m})$ は乗法群　$\{x \in (O_{K_m})^\times ; \ x \equiv 1 \bmod (K_m \text{ の極大 ideal})\}$ であり，(2.2) は Hilbert symbol $K_m^\times \times K_m^\times \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ を

$G(O_{K_m})\times K_m^\times$ に制限したものに他ならない。

さて $n\geqq 1$ を fix して, $m\geqq n$ を走らすとき

$$\begin{array}{ccc} G(O_{K_n})\times K_{m+1}^\times & \longrightarrow & O_F/\pi^{m+1}O_F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id\times norm} & & \Big\downarrow \\ G(O_{K_n})\times K_m^\times & \longrightarrow & O_F/\pi^m O_F \end{array}$$

は可換となり, 逆極限にうつって

$$G(O_{K_n})\times \varprojlim_m K_m^\times \longrightarrow O_F$$

を得る。さらに, $p$ 進 Lie 群の exponential map

$$\exp : \mathrm{Lie}(G)\otimes_{O_F} K_n \longrightarrow G(O_{K_n})\otimes \mathbb{Q}$$

により $(\mathrm{Lie}(G)\otimes_{O_F} K_n)\times \varprojlim_m K_m^\times \to F$ が, よって準同型

(2.1) が,

$$\varprojlim_m K_m^\times \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(\mathrm{Lie}(G)\otimes_{O_F} K_n,\ F)$$
$$\underset{(*)}{\cong}\ \mathrm{coLie}(G)\otimes_{O_F} K_n$$

として得られる。((*)は, $x\in \mathrm{Lie}(G)$, $s\in K_n$ に対し,

$$y\otimes t \longmapsto \langle x, y\rangle \mathrm{Tr}_{K_n/F}(st) \qquad (y\in \mathrm{coLie}(G),\ t\in K_n)$$

$\langle\ ,\ \rangle$ は標準 pairing $\mathrm{Lie}(G)\times \mathrm{coLie}(G)\to F$ .)

<u>Thm.</u> (Wiles の explicit reciprocity law). <u>(2.1) は $u=(u_m)_m$</u>

<u>$\in \varprojlim_m K_m^\times$ を,</u>

$$\frac{1}{\pi^n}\omega \otimes \left( \left.\frac{d\log(\varphi^{-n}(g_u))}{\omega}\right|_{\xi_n} \right)$$

<u>に移す。</u>

ここに $\omega$ は $\mathrm{coLie}(G)$ の任意の基底であり, $d\log(*) = \frac{d*}{*}$

$\dfrac{d\log \varphi^{-n}(g_u)}{\omega}$ は $\omega$ を G 上の不変微分形式と見て比をとったもの（したがって $\dfrac{d\log \varphi^{-n}(g_u)}{\omega}$ は G 上の関数），$|_{\xi_n}$ は $\xi_n$ での値。

## §3 explicit reciprocity law の一般化

explicit reciprocity law は，§1 末の dual exponential map を explicit に表示することであると考える．§2 の Wiles の定理がそのように解釈されること，そして一般化されることを述べる。

K, F, $\pi$, G, T, $\xi$ を §1 のとおりとする。$r \geq 1$ とする。

$V = T^{\otimes(-r)}(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ （$T^{\otimes(-r)}$ は可逆 $O_F$ 加群としての T の $-r$ 巾テンソル積，(1) は Tate twist）とおく時，V は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の de Rham 表現であり，$D^0_{dR}(V) = \mathrm{coLie}(G)^{\otimes r} \otimes_{O_F} K$ である．（それから自動的に出ることであるが，V は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)$ の表現として de Rham 表現，$D^0_{dR}(K_n, V) = \mathrm{coLie}(G)^{\otimes r} \otimes_{O_F} K_n$ となる。）

1方，$s_{r,n} : \varprojlim_m K_m^{\times} \longrightarrow H^1(K_n, T^{\otimes(-r)}(1))$ を，$i \geq n$ に対する

$$\varprojlim_m K_m^{\times} \longrightarrow K_i^{\times} \xrightarrow[(*)]{} H^1(K_i, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow[(**)]{} H^1(K_i, (T^{\otimes(-r)}/\pi^i T^{\otimes(-r)})(1))$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Trace}} H^1(K_n, (T^{\otimes(-r)}/\pi^i T^{\otimes(-r)})(1))$$

の $\varprojlim_i$ と定義する。但し (*) は Kummer sequence $0 \to \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^s} \mathbb{G}_m \to 0$ からえられるもの，(**) は $\xi^{\otimes(-r)} \in H^0(K_i, T^{\otimes(-r)}/\pi^i T^{\otimes(-r)})$ との cup 積である。合成写像

$$\theta_{r,n} : \varprojlim_m K_m^\times \xrightarrow{s_{r,n}} H^1(K_n, T^{\otimes(-r)}(1)) \xrightarrow{\exp^*} \mathrm{coLie}(G)^{\otimes r} \otimes_{O_F} K_n$$

を考える。$r=1$ の時，（で K の剰余体が有限）これは準同型 (2.1) に一致することが示せる。

<u>Thm.</u> $u \in \varprojlim_m K_m^\times$ に対し，

$$\theta_{r,n}(u) = \frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{\pi^{nr}}\,\omega^{\otimes r} \otimes \left(\left(\frac{d}{\omega}\right)^{r-1} \frac{d\log \varphi^{-n}(g_u)}{\omega}\right)\Bigg|_{\xi_n}.$$

これは Wiles の explicit reciprocity law（$r=1$ の場合にあたる）の一般化である。また $s_{r,n}$ は K の剰余体が代数閉体なら全射であり，剰余体を閉体に拡大することにより，$T^{\otimes(-r)}(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ の $\exp^*$ が explicit に書けたことになる。

## §4. zeta の値

リーマン・ゼータの値，虚２次体の Hecke L 関数の値と，§3 の結果の関係について述べる。まことに申しわけないのであるが，最近数学の論文原稿の入ったフロッピーディスクを大量に紛失し，手元に正確な資料がないので，特に虚２次体の Hecke L についての記述があやふやになるが，正確なことは，$r=1$ の場合について述べた de Shalit [dS] や，§0 末に挙げた筆者の論文「An approach ‥‥」（今の所未完であるが）を参照されたい。

## §4.1. リーマン・ゼータ関数.

$N, a \in \mathbb{Z}$, $N \geqq 1$ に対し, 部分ゼータ関数

$$\zeta_{a(N)}(s) = \sum_{\substack{n \geqq 1 \\ n \equiv a \bmod N}} \frac{1}{n^s}$$

を考え, また 1 の巾根 $\alpha$ に対し

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n n^{-s} \quad \left(= \sum_{a=0}^{N-1} \zeta_{a(N)}(s)\alpha^a, \quad N \text{ は } \alpha \text{ の位数}\right)$$

とおく。これらは $Re(s) > 1$ で絶対収束し, $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続される. $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqq 1$ に対し $\zeta_{a(N)}(1-r) \in \mathbb{Q}$ であり, よって $\zeta(\alpha, 1-r) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ であるが, この元 $\zeta(\alpha, 1-r)$ は次の性質をもつ. $\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$ を任意の体準同型とし, $\iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right)$ $((a, N)=1,\ N \geqq 1)$ とおくと,

$$\frac{\left(\zeta_{\equiv a(N)} + (-1)^r \zeta_{\equiv -a(N)}\right)(r)}{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)^r} = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)!}\, \iota(\zeta(\alpha, 1-r)) & (r \geqq 2 \text{ のとき}) \\ \iota(\zeta(\alpha, 0)) + \frac{1}{2} & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

§3 で $F = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$ の場合を考える. したがって

$$G = \hat{\mathbb{G}}_m, \quad O_K(G) = \varprojlim_n O_K[t, t^{-1}]/((t-1)^n) \quad (t \text{ は } \mathbb{G}_m \text{ の標準座標})$$

$(N, p) = 1$ とし, $K$ は 1 の原始 $N$ 乗根をふくむとし, $n \geqq 0$ に対し 1 の原始 $Np^n$ 乗根 $\alpha_n \in K_n$ を, $\alpha_{n+1}^p = \alpha_n$ をみたすようにとる.

$$\xi = (\alpha_n^N)_{n \geqq 0}, \qquad u = \left((1-\alpha_n)^{-1}\right)_n \in \varprojlim_{n \geqq 1} K_n^{\times}$$

ととる.

Thm. uを上のようにとるとき,

$$\theta_{r,n}(u) = \frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{(Np^n)^r}\,\zeta(\alpha_n, 1-r).$$

すなわち, $\theta_{r,n}(u)$ は $\mathbb{Q}(\alpha_n)\subset K$ に属し, 任意の体準同型 $\iota : \mathbb{Q}(\alpha_n)\to\mathbb{C}$ に対し

$$\iota(\theta_{r,n}(u)) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi i)^r}\left(\zeta_{\equiv a(Np^n)} + (-1)^r\zeta_{\equiv -a(Np^n)}\right)(r) \\ (\text{上の元}) - \dfrac{1}{2Np^n} \qquad r=1 \text{ の時.} \end{cases}$$

ここに $\iota(\alpha_n) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{Np^n}\right)$, $(a, pN)=1$, $N\geq 1$.

なぜならuの Coleman power series は $g_u = 1-\alpha_0 t^{1/N}$ であり これに§3のThmと, 1の巾根 $\alpha\neq 1$ に対して成り立つ式

$$-\left(\left(\frac{d}{t^{-1}dt}\right)^{r-1}\left(\frac{d\log(1-t)}{t^{-1}dt}\right)\right)\Bigg|_{t=\alpha} = \zeta(\alpha, 1-r)$$

(左辺を形式的に計算すれば $\sum_{n\geq 1} n^{r-1}t^n\Big|_{t=\alpha} = \sum_{n\geq 1} n^{r-1}\alpha^n\Big|_{s=1-r}$ = 右辺だが, この収束無視の議論は, 少し修正すれば正当化できる)を使えば上のThmが得られる. (「ゼータのすみか」(後述)では, 収束はあまり気にしないでよいらしい。)

## §4.2. 虚2次体の Hecke L関数.

Hを類数1の虚2次体とし, Hに虚数乗法をもつH上の楕円曲線Eをとる. EのL関数は, Hのある Hecke character $\psi$ のL関数に等しい:

$$L(E, s) = L(\psi, s).$$

de Shalit [dS] に述べられているように, u=(だ円単数の系)

ととる時 $\theta_{1,n}(u)$ が $L(\psi, s)$ やその部分ゼータの $s=1$ での値をあらわす。任意の $r \geq 1$ に対しては，$\theta_{r,n}(u)$ ($u$ は だ円単数の系) が $L(\psi^r, s)$ やその部分ゼータの $s=r$ での値をあらわすことが，同様に証明される。(§4.1の $1-t$ のかわりに，楕円曲線上のテータ関数（シグマ関数を少し修正して代数化したもの）が，Coleman power series としてあらわれ，その関数の $\left(\frac{d}{\omega}\right)^{r-1} \frac{d\log(\ )}{\omega}$ の等分点での値をとれば，次々と $L(\psi^r, s)$ やその部分ゼータの $s=r$ での値が出てくることが，知られている（[dS] 参照）ので，§3 の Thm を E の formal completion である Lubin-Tate 群に適用すれば，§4.1 と同様の結論に至る。)

## §5. 補足

§5.1. そもそも円単数 $1-\alpha$ ($\alpha$ は 1 のN根，$\alpha \neq 1$) や楕円単数は，その絶対値の log がゼータの値と関係する，ふしぎな元である。例えば

$$-\log|1-\alpha| = \lim_{s\to 0} s^{-1}\left(\zeta_{\equiv a(N)} + \zeta_{\equiv -a(N)}\right)(s)$$

(ここに $\alpha = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right)$，$(a, N)=1$，$N \geq 1$)。このような形で，複素関数の値であるゼータの値に，複素関数 $-\log|\ |$ を通じて関係するのは，まだ苦労もそれほどではないかもしれ

ないが，§4 でみたように，円単数や楕円単数は，p 進世界の奥の explicit reciprocity law を通じてまでも，ゼータの値をあらわそうとするのである。上の式の右辺と §4.1 の Thm. の右辺の間の符合の妙には驚かざるをえず，円単数や楕円単数はゼータの値の化身であると思わざるをえないし，「そんなにまでしてゼータの値をあらわすとは」と，彼らの思いの深さに驚かざるをえない。

鶴が恩返しのために娘に姿をかえて，与ひょうの家のしきいをこえるように，ゼータの値は円単数や楕円単数に姿をかえて，explicit reciprocity law のしきいをこえるのである。鶴のそこまでの激しい思いを我々は厳粛に受けとめたい。([Ki])

§5.2. §0 に「どこに電話をすればよいか」と書いたからか，驚いたことに，先程実は先方から電話がかかってきた。
「zeta det are two keys; Gal」と，ゼータの専門家 N.K 氏の歌
でた でた つ き が
(意訳: zeta と determinant が宇宙を考える 2 つの key であり，Galois 群に注目せよ) が受話器から流れ，N.K 氏に似た声が「銀河中心の六角遊具」(後述) について語った。これに関して，お粗末ながら筆者の思う所を書く。

ゼータの値のほんとうのすみかは，$\mathbb{R}$ 世界と $\mathbb{Q}_p$ 世界の両者の上の，まだ知られぬ所に存在するのであろう。実数は物質の方向に収束し，p 進数は精神の方向に収束するなら，ゼー

タの値は物質と精神の調和をあらわしているのであろうか。「ゼータのすみか」のような，物質でないものが存在すると言うと，科学的でないと顔をしかめるかたもおられるかもしれず，それはごもっともな事であるが，科学の中でも最も科学らしい数学は，たとえば「7でわって2余る素数が無限に存在する」とか，物質でないものの存在を言い切ることで成立しているのである。Tschinkel氏に教わった所では，物質とは群の表現であるとのこと。とすると，物質・素数・実数・p進数も，銀河中心の六角遊具の輪軸（天沢退二郎[Am]）の周りをまわる，かごめかごめの歌（[Ki]）なのであろうか。

注：銀河中心の六角遊具は千葉県四街道市にある（[Am]参照）。こうした[Am]で探られた「詩のすみか」（他には　津田沼幕張間電車基地の下り快速線からの窓外風景；[Am]第I章参照，など）と「ゼータのすみか」は，近接していると思えるのである。

§5.3．保型形式のゼータの値については，モジュラーcurveの関数体をp進完備化したものをKとし，Kにおけるexplicit reciprocity lawを考えることにより，あらわすことがだいぶできかけている（§0末の準備中の論文“p-adic Hodge …”に書きかけている）が，理論がまだ最善の状態に達していないのでまた別の機会に論じたい。かようなKはもはやふつうの局所体ではない（剰余体がperfectではない）が，そういうKに

についての $B_{dR}$ の理論が存在するし，(Faltings，都築暢夫)，explicit reciprocity law も一応 [Ka] で得られている。Lubin-Tate 群のかわりをするのは，K 上の universal elliptic curve である。

引用文献

[Am] 天沢退二郎「詩はどこに住んでいるか」思潮社

[dS] E. de Shalit「Iwasawa theory for elliptic curves with complex multiplication」

[Ka] K. Kato「Explicit reciprocity law and Cohomology of Fontaine-Messing」Bull. Soc. Math. France 1990.

[Ki] 木下順二「夕鶴・彦市ばなし」新潮文庫