数理解析研究所講究録
第811巻 1992年 113-126

D - 加群の グレブナ基底の計算とその応用

下山 武司 † 大阿久俊則 ‡
Takeshi Shimoyama Toshinori Oaku

† 富士通 国際研 410-03 沼津市宮本 140
‡ 横浜市立大学数学教室 236 横浜市金沢区瀬戸 22-2

1. 微分作用素環と線形微分方程式系.

1.1. 種々の (偏) 微分作用素環.

微分作用素環と総称されるものにも, いくつかあるが, 次の 3 つが基本的である。

(1) Weyl 代数 (= 多項式係数微分作用素環):

$$A_n := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\langle\partial_1, \ldots, \partial_n\rangle,$$

(2) 有理式係数微分作用素環:

$$R_n := \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)\langle\partial_1, \ldots, \partial_n\rangle,$$

(3) 収束巾級数係数微分作用素環:

$$\mathcal{D}_0 := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}\langle\partial_1, \ldots, \partial_n\rangle.$$

ただし,$n \geq 1$, $\partial_j := \partial/\partial x_j \quad (j = 1, \ldots, n)$. これらはいずれも基本関係式

$$x_i x_j = x_j x_i, \qquad \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$$
$$\partial_j x_i - x_i \partial_j = \delta_{i,j} \quad \text{for} \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

($\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ) で定義される非可換 $\mathbb{C}$ - 代数 (多元環) であり, Noether 環でもある。線形偏微分方程式系の理論では, 次に見るように主に $\mathcal{D}_0$ 上の加群を対象とする。

1.2. 線形 (偏) 微分方程式系との対応.

$$\text{有限生成 } \mathcal{D}_0\text{- 加群} \longleftrightarrow \text{線形微分方程式系}$$

特に, $\mathcal{D}_0$ のイデアルは未知関数が 1 個の場合に対応する。

- $\mathcal{M}$: 有限生成 $\mathcal{D}_0$- 加群,
- $u_1, \ldots, u_r$: $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}_0$ 上の生成元

とすると $\mathcal{D}_0$ の Noether 性により

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{f} {\mathcal{D}_0}^r \xleftarrow{g} {\mathcal{D}_0}^s$$

が完全系列となるような自然数 s と $\mathcal{D}_0$- 準同型 g がとれる。但し

$$f((A_1,\dots,A_r)) = \sum_{j=1}^{r} A_j u_j.$$

このとき

$$g((0,\dots,\overset{(i)}{1},\dots,0)) = (P_{i1},\dots,P_{ir})$$

とおき, $\mathcal{M}$ を未知関数 $u_1,\dots,u_r$ についての線形偏微分方程式系

$$\mathcal{M}: \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij}u_j = 0 \qquad (i=1,\dots,s)$$

とみなす。$\mathcal{F}$ を一般に $\mathcal{D}_0$- 加群 (たとえば収束巾級数環や超関数の原点における芽の全体など) とすれば, 完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}({\mathcal{D}_0}^r,\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}({\mathcal{D}_0}^s,\mathcal{F})$$

より

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M},\mathcal{F}) \cong \{(u_1,\dots,u_r) \in \mathcal{F}^r;\ \sum_{j=1}^{r} P_{ij}u_j = 0 \quad (\forall i)\}$$

を得る。このように微分方程式系の問題が $\mathcal{D}_0$- 加群の問題に翻訳される。

更に, 以上の議論を sheaf 化して, $\mathbb{C}^n$ または複素多様体上の線形偏微分方程式系を, 正則関数係数の微分作用素環の層 $\mathcal{D}$ 上の連接加群 (coherent $\mathcal{D}$-module) とみなすことができる。上記の $\mathcal{D}_0$ - 加群の議論は, 1 点 (原点) の近傍で局所的に微分方程式系を見ていることになる。一般の点 p では, $\mathcal{D}_0$ を $\mathcal{D}_p$ (p を中心とした収束巾級数環を係数とする微分作用素環) に置き換えて考える。

2. 微分作用素環に対する Gröbner 基底.

Gröbner 基底に関する従来の結果.

- A_n : A.Galligo, F.Castro, 高山
- R_n : 高山 (差分がある場合も), 野海
- $\mathcal{D}_0$: F.Castro (抽象的)
- 応用 : 多変数特殊関数の連接関係, 積分のみたす方程式 etc.(高山), 多変数の Wronskian (野海)

2.1 R_n の Gröbner 基底.

R_n の要素 P は, 次のような有限和で書ける:

$$P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha(x)\partial^\alpha, \tag{2.1}$$

ただし $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ $\partial^\alpha:=\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_1^{\alpha_n}$, a_α は $x=(x_1,\dots,x_n)$ の有理式。$\mathbb{N}^n$ の順序 $\prec_R$ (total-degree order) を次のように定義する: $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ に対し,

$$\begin{aligned}\alpha\prec_R\beta\Longleftrightarrow&(|\alpha|<|\beta|)\quad\text{or}\\&(|\alpha|=|\beta|,\quad\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_{s-1}=\beta_{s-1},\\&\alpha_s<\beta_s\quad(1\le\exists s\le n)).\end{aligned}$$

この順序は整列順序, すなわち $\mathbb{N}^n$ の任意の部分集合は順序 $\prec_R$ に関する最小元を持つ。従ってこの順序に関して, 多項式環の場合とほとんど同様に, R_n のイデアルまたは R_n^r の部分加群に対して Gröbner 基底が構成できる (高山, 野海)。

(2.1) の形を持つ R_n の要素 P について, その order を $\mathrm{ord}(P)$, leadigng exponent を $\mathrm{lexp}_R(P)$,head coefficient を $\mathrm{hcoef}_R(P)$, head term を $\mathrm{ht}_R(P)$ として次のように定義しておく。

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(P)&:=\max\{|\alpha|\mid a_\alpha\neq0\},\\\mathrm{lexp}_R(P)&:=\max{}_R\{\alpha\in\mathbb{N}^n\mid a_\alpha\neq0\},\\\mathrm{hcoef}_R(P)&:=a_\alpha(x),\quad\alpha=\mathrm{lexp}_R(P),\\\mathrm{ht}_R(P)&:=a_\alpha(x)\partial^\alpha,\quad\alpha=\mathrm{lexp}_R(P),\end{aligned}$$

2.2 $\mathcal{D}_0$ の (抽象的)Gröbner 基底.

$\mathcal{D}_0$ の要素 P は, 次のような有限和で表わせる:

$$P=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}a_\beta(x)\partial^\beta \tag{2.2}$$

ただし $a_\beta(x)=\sum_\alpha a_{\alpha\beta}x^\alpha$ は収束巾級数 ($\in\ \mathbb{C}\{x\}$)。

$\mathbb{N}^{2n}$ の順序 $\prec_D$ (D-order) を次のように定義する: $\mathbb{N}^{2n}$ の元 (α_1,β_1) , (α_2,β_2) に対し,

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\beta_1)\prec_D(\alpha_2,\beta_2)\quad\Longleftrightarrow\quad&(\beta_1\prec_R\beta_2)\quad\text{or}\\&(\beta_1=\beta_2,\ \alpha_1\succ_R\alpha_2)\end{aligned}$$

P が (2.2) の形のとき, D-order に関する leadigng exponent $\mathrm{lexp}_D(P)$ を

$$\mathrm{lexp}_D(P):=\max{}_D\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}\mid a_{\alpha\beta}\neq0\}$$

で定義する。また P の principal symbol $\sigma(P)$ を

$$\sigma(P)(x,\xi):=\sum_{|\beta|=\mathrm{ord}(P)}a_\beta(x)\xi^\beta$$

で定義する。

$\mathcal{I}$を $\mathcal{D}_0$ の左イデアルとするとき, $\{P_1,\dots,P_r\}$ が$\mathcal{I}$の $\mathcal{D}$-Gröbner 基底とは,

$$\begin{aligned}\forall P\in\mathcal{I},\quad&\exists Q_1,\dots,Q_r\in\mathcal{D}_0\quad\text{s.t.}\\&P=Q_1P_1+\dots+Q_rP_r,\\&\mathrm{lexp}_D(P)\succeq_D\mathrm{lexp}_D(Q_s)+\mathrm{lexp}_D(P_s)\\&(1\le\forall s\le r).\end{aligned}$$

が成り立つこと。 D-order が整列順序ではないため, 単項式を置き換えていく通常の M- 簡約操作は停止しないが, Weierstrass-Hironaka 型の割算定理を用いることで, 理論的 (超越的) には M- 簡約が実行でき, D-Gröbner 基底の存在が保証される。

2.3. 特性多様体と Gröbner - 基底.

線形偏微分方程式系に対して, その特性多様体と呼ばれる集合が定義され, 微分方程式論で重要な意味を持つ。簡単のため, 未知関数が1個の場合を考える。$P_1, \dots, P_s$ を多項式係数偏微分作用素として, 微分方程式系

$$\mathcal{M}: \quad P_j u = 0 \quad (j = 1, \dots, s)$$

を考える。このとき $\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{SS}(\mathcal{M})$ は $x = p$ の近傍では

$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}) := \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \sigma(P)(x, \xi) = 0, \forall P \in \mathcal{D}_p P_1 + \cdots + \mathcal{D}_p P_s\}$$

で定義され, $p \in \mathbb{C}^n$ を動かして, $\mathrm{SS}(\mathcal{M})$ は $\mathbb{C}^{2n}$ の解析集合となる。

$\mathrm{SS}(\mathcal{M})$ の次元は n 以上であることがわかっており, 特に次元が n のとき$\mathcal{M}$は holonomic system と呼ばれ, 解が有限次元になる。また楕円型や双曲型などの微分方程式系の分類も, 特性多様体を用いて行なわれる。

さて, 上の状況で, もし $P_1, \dots, P_s$ が $\mathcal{D}_p$ において D-Gröbner 基底になっていれば $x = p$ の近傍で

$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}) = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \sigma(P_j)(x, \xi) = 0 \quad (j = 1, \dots, s)\}$$

となることがわかる。従って, 特性多様体の計算のためには各点での D-Gröbner 基底が求まれば十分である。

今 $P_1, \dots, P_s$ が R_n の Gröbner 基底だったとする。(P_i の分母 $= 1$)

$$V(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{hcoef}_R(P_i)(x) = 0 \quad (1 \leq \exists i \leq r)\}$$

とおくと, $p \notin V(\mathcal{M})$ なる点 p では $P_1, \dots, P_r$ は D-Gröbner 基底にもなっているので

$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}) \cap \{(x, \xi) \mid x \notin V(\mathcal{M})\} = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \sigma(P_j)(x, \xi) = 0 \ (j = 1, \dots, s)\}$$

となり, R_n の Gröbner 基底から特性多様体の大体の様子はわかる。しかし $V(\mathcal{M})$ での特性多様体を知るためには D-Gröbner 基底の計算が必要となる。

例. $n = 2$ として

$$P_1 := \partial_1^2, \quad P_2 := x_1 \partial_1 - 1, \quad P_3 := \partial_2$$
$$\mathcal{M}: \quad P_1 u = P_2 u = P_3 u = 0$$
$$\mathcal{M}': \quad P_2 u = P_3 u = 0$$

とする。このとき

$$P_1 = \frac{1}{x} \partial_1 P_2$$

なので P_1, P_2, P_3 の生成するイデアルの R_n での Gröbner 基底として P_2 と P_3 がとれ

$$V(\mathcal{M}) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$$
$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}) \cap \{x_1 \neq 0\} = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 = \xi_2 = 0\}$$

となるが, $x_1 = 0$ 上の点 p では P_1, P_2, P_3 が D-Gröbner 基底となっていて, 結局

$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}) = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 = \xi_2 = 0\}.$$

一方 P_2, P_3 は R_n でも $\mathcal{D}_p \quad (\forall p)$ でも Gröbner 基底になっているので,

$$\mathrm{SS}(\mathcal{M}') = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \mid x_1 \xi_1 = \xi_2 = 0\}.$$

となる。

3. $\mathcal{F}$ - filtration を用いた $\mathcal{D}_0$ の Gröbner 基底.

3.1 一成分の場合.

定義. ($\mathcal{F}$ - filtration)

$$F_m := \left\{ \sum_{\beta:\text{finit}} a_\beta(x)\partial^\beta \in \mathcal{D}_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} v(a_\beta(x)) - |\beta| \geq m \\ a_\beta(x) \in \mathbb{C}\{x\}, \quad {}^\forall\beta \end{array} \right\} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

ただし、$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ (多重指数) $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ $a(x) = \sum a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}\{x\}$, $v(a(x)) = \min\{|\alpha| \;: a_\alpha \neq 0\}$。

$\mathcal{F}$ - filtration を用いる目的というのは、一般には無限和である $\mathcal{D}_0$ の要素を有限和で近似してしまう事にある。(有限和のものは、有限和のまま。) これによって具体的な計算が可能になるのである。この filtration F_m は、簡単な計算より次の性質が確かめられる。

(1) $\cdots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, $\mathcal{D}_0 = \cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m$,
(2) $F_m \cdot F_{m'} \subset F_{m+m'}$ ${}^\forall m, m' \in \mathbb{Z}$,
(3) $F_m = x_1 F_{m-1} + \cdots + x_n F_{m-1}$ ${}^\forall m \geqq 1$.

さて、$\mathbb{N}^{2n}$ の順序 $\prec_F$ は、次のように定義される : $\mathbb{N}^{2n}$ の要素 (α_1, β_1) , (α_2, β_2) に対し、

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1) \prec_F (\alpha_2, \beta_2) \quad \Longleftrightarrow \quad & |\alpha_1| - |\beta_1| > |\alpha_2| - |\beta_2| \quad \text{又は、} \\ & |\alpha_1| - |\beta_1| = |\alpha_2| - |\beta_2| \text{ , } \beta_1 \prec_R \beta_2 \quad \text{又は、} \\ & |\alpha_1| = |\alpha_2|, \beta_1 = \beta_2, \text{ かつ } \alpha_1 \succ_R \alpha_2 \end{aligned}$$

この順序を F-order と呼ぶ。F-order $\prec_F$ に関する $P = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ の $\mathrm{lexp}_F(P)$,ord(P) は、

$$\mathrm{lexp}_F(P) := \max{}_F\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n} \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}$$
$$\mathrm{ord}(P) := \min\{|\alpha| - |\beta|| \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}$$

であり、$\mathrm{hcoef}_F(P)$,$\mathrm{ht}_F(P)$ は前章と同様に定義できる。又 P, Q の critical pair sp(P, Q) は、次で、定義される。

$$\mathrm{sp}(P, Q) := \mathrm{hcoef}_F(Q)\partial^{\gamma - \mathrm{lexp}_F(P)} P - \mathrm{hcoef}_F(P)\partial^{\gamma - \mathrm{lexp}_F(Q)} Q,$$

ただし、$\gamma = \mathrm{lexp}_F(P) \vee \mathrm{lexp}_F(Q)$, $(\alpha \vee \beta := (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \max\{\alpha_n, \beta_n\})$).

順序 $\prec_F$ の定義と F_m の性質から、次のことは明らかである。

$$\mathrm{lexp}_F(f) = (\alpha, \beta) \;\; |\alpha| - |\beta| \geq m \Leftrightarrow f \in F_m$$

これを記号で $f \equiv 0 \mod F_m$ と書くことにする。次に、$\mathcal{D}_0$ の Gröbner 基底を求める(本質的に B.Buchberger による) アルゴリズムに必要となる簡約操作(割り算)を定義する。以後、整数 m を固定し、head coefficent が 1 の要素 $\{P_1, \cdots P_s\}$ で生成されるイデアル $\mathcal{I}$ を考える。

定義. (F_m - 可約)

偏微分作用素の単項式 $x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0}$ が $\mathcal{D}_0$ の要素 $\{P_1 \cdots P_r\}$ に関して P_i $(\mathrm{lexp}_F(P_i) = (\alpha_i, \beta_i))$ で F_m - 可約であるとは、$x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} \notin F_m$ かつ、$(\alpha_0, \beta_0) \in (\alpha_i, \beta_i) + \mathbb{N}_0^{2n}$ ${}^\exists i \in \{1, \cdots, r\}$ が、成り立つ時をいう。又、そうでない時を F_m - 既約という。

定義. (F_m - 簡約操作 (割り算))

単項式 $x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0}$ が、P_i ($\mathrm{lexp}_F(P_i) = (\alpha_i, \beta_i)$) で F_m - 可約の時、単項式の F_m - 簡約操作とは、単項式を $x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} - x^{\alpha_0-\alpha_i}\partial^{\beta_0-\beta_i}\cdot P_i$ で置き換える操作をいう。

定義. (F_m - 簡約)

$f \in \mathcal{D}_0$ の head term が、$\{P_1, \cdots, P_s\}$ について F_m - 可約かを調べて F_m - 可約であれば F_m - 簡約操作を行ない、再び head term 調べて、これが F_m - 既約になるまで繰り返す操作を F_m - 簡約という。この時の結果を f' とした時、これを次のように書く。

$$f \twoheadrightarrow f' \quad \mathrm{mod}\ F_m.$$

定義. (F_m - 完全簡約)

F_m - 簡約操作を $f \in \mathcal{D}_0$ のすべての単項式が F_m - 既約になるまで繰り返す操作を F_m - 完全簡約という。

定義. (Gröbner 基底)

$\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_s\}$ が次の条件を満たす時、$\mathbf{G}$ を $\mathcal{D}_0$ のイデアル $\mathcal{I}$ の Gröbner 基底という。

(1) $\mathcal{I} = \mathcal{D}_0 P_1 + \cdots + \mathcal{D}_0 P_s$

(2) $f \twoheadrightarrow 0 \quad \mathrm{mod}\ F_m \quad {}^\forall f \in \mathcal{I}\,,\ {}^\forall m \in \mathbb{Z}.$

この Gröbner 基底を F-order による Gröbner 基底と呼ぶ。B.Buchberger によるアルゴリズムをもとにして、まず次に挙げる F_m- 基底 を構成するアルゴリズムを示す。

定義. (F_m - 基底)

$\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_s\}$ が次の条件を満たす時、$\mathbf{G}$ を $\mathcal{D}_0$ のイデアル $\mathcal{I}$ の F_m - 基底という。

(1) $\mathcal{I} = \mathcal{D}_0 P_1 + \cdots + \mathcal{D}_0 P_s$

(2) ${}^\forall i, j \in \{1, \cdots, s\},\ \ i \neq j,\ \ \mathrm{sp}(P_i, P_j) \twoheadrightarrow 0 \ \ \mathrm{mod}\ F_m.$

アルゴリズム. (F_m - 基底)

入力 : $\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_r\}, \quad m \in \mathbb{Z}$

(1) $\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_r\}$, 任意の組 $(i, j) \in \{1, \cdots, r\} \quad i \neq j$, に対し $\mathrm{sp}(P_i, P_j)$ を F_m - 簡約した結果を g_{ij} とする。

(2) $\{g_{ij}\}_{i,j \in \{1,\cdots,r\}}$ の中から $g_{ij} \not\equiv 0 \ \ \mathrm{mod}\ F_m$ である要素を $\mathbf{G}$ に加え、$\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_r, P_{r+1}, \cdots P_{r+r'}\}$ とする。

(3) $\{g_{ij}\}_{i,j \in \{1,\cdots,r\}}$ の、すべての要素が $g_{ij} \equiv 0 \ \ \mathrm{mod}\ F_m$ になるまで (1)-(2) を繰り返す。

出力 : $\mathbf{G} = \{P_1, \cdots, P_r\}$

モノイデアルは有限生成である、という良く知られた事実により、このアルゴリズムは、必ず停止することが知られる。更に、モノイデアルの有限生成性を用いることで、次の性質を満たす整数 m が、存在することがわかる。

$$(3.1.1) \qquad {}^\forall m' \geqq m \quad \mathrm{sp}(P_i, P_j) \twoheadrightarrow 0 \qquad \mathrm{mod}\ F_{m'}.$$

この事を用いて、Gröbner 基底の存在を示すことができる。

定理.

イデアル $\mathcal{I}$ の F_m - 基底が、イデアル $\mathcal{I}$ のグレブナ基底になる整数 m が存在する。

又、F_m- 簡約の終了判定として、次を挙げておく。

命題.

$\mathcal{I}$の要素 F を基底 $\{P_1,\cdots,P_s\}$ で F_m - 簡約する過程における式が、それ以前の F_m - 簡約操作による結果の u 倍 ($u \in F_1 \cap \mathbb{C}[x]$) になっている時、$F$ は任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し 0 (mod F_m) に F_m - 簡約できる。

(i.e. $F \twoheadrightarrow F' \twoheadrightarrow uF' \quad u \in \mathbb{C}[x],\ u(0)=0 \implies F \twoheadrightarrow 0 \mod F_m \ \text{for}\ {}^\forall m \in \mathbb{N}$)

命題.

P_i, P_j の critical pair $\mathrm{sp}(P_i,P_j)$ について、

もし ${}^\exists u_1,\cdots,u_k \in \{1,\cdots,s\},\ \ u_1 = i, u_k = j$

$$\begin{aligned} s.t.\quad &< \mathrm{lexp}_F\{(\mathrm{ht}_F(P_{u_1}),\cdots,\mathrm{ht}_F(P_{u_k}))\text{の } L.C.M\} > \\ &\qquad =< \mathrm{lexp}_F\{(\mathrm{ht}_F(P_i),\mathrm{ht}_F(P_j))\text{の } L.C.M\} > \\ \&\quad &\mathrm{sp}(P_{u_l},P_{u_{l+1}}) \twoheadrightarrow 0 \mod F_m \quad {}^\forall l = 1,\cdots,k-1 \end{aligned}$$

ならば、$\mathrm{sp}(P_i,P_j)$ は、F_m - 簡約 しなくてよい。

3.2 多成分 $\mathcal{D}_0$ - 加群 $\mathcal{D}^k$ のグレブナ基底.

$\mathcal{D}^k = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{D}_0$ の要素は、$\vec{P} = (P_1,\cdots,P_k)\ \ P_i \in \mathcal{D}_0$ と表わせる。この時、$\vec{P}$ の head point $\mathrm{hp}(\vec{P})$ 、leading exponent $\mathrm{lexp}_F(\vec{P})$ 、head term $\mathrm{ht}_F(\vec{P})$ を次のように定義する。

$$\mathrm{lexp}_F(\vec{P}) = \max{}_F\{\mathrm{lexp}_F(P_i) | i = 1,\cdots,k\}$$

$$\mathrm{hp}(\vec{P}) = \min\{\ i\ | \mathrm{lexp}_F(P_i) = \mathrm{lexp}_F(\vec{P})\}$$

$$\mathrm{ht}_F(\vec{P}) = \mathrm{ht}_F(P_j)\ (j = \mathrm{hp}(\vec{P}))$$

head coefficient が、1 の $\mathcal{D}^k$ の要素 $\{\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_s\}$ で生成される、$\mathcal{D}^k$ の部分加群を $\mathcal{I}$ とする。

定義. ($\mathcal{D}^k$ の F_m^k - 可約)

s 成分のみの単項式 $(0,\cdots,x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0},\cdots,0)$ が $\{\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_s\}$ に関して F_m^k - 可約であるとは、$\mathrm{hp}(\vec{P}_i) = s$ となるある $\vec{P}_i$ に対して $\vec{P}_i$ の s 成分 P_{is} に関し $x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0}$ が F_m - 可約である時とする。又、そうでない時 F_m^k - 既約という。

定義. ($\mathcal{D}^k$ の F_m^k - 簡約操作)

s 成分のみの単項式 $(0,\cdots,x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0},\cdots,0)$ が、$\vec{P}_i$ ($\mathrm{lexp}_F(\vec{P}_i) = (\alpha_i,\beta_i)$) に関して F_m^k - 可約の時、単項式 の F_m^k - 簡約操作とは、単項式 を $(0,\cdots,x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0},\cdots,0) - x^{\alpha_0-\alpha_i}\partial^{\beta_0-\beta_i}\cdot\vec{P}_i$ で置き換える操作をいう。

$\mathcal{D}^k$ の F_m^k - 簡約 、F_m^k - 完全簡約、F_m^k - 基底、及びグレブナ基底の定義は、一成分の時と同じである。更に、critical pair $\mathrm{sp}(\vec{P},\vec{Q})$ は、次の様に定義する。

$$\mathrm{sp}(\vec{P},\vec{Q}) = \begin{cases} \mathrm{hcoef}_F(Q)\partial^{\gamma_1}\vec{P} - \mathrm{hcoef}_F(P)\partial^{\gamma_2}\vec{Q} & \text{if}\ \ \mathrm{hp}(\vec{P}) = \mathrm{hp}(\vec{Q}) = i \\ 0 & \text{if}\ \ \mathrm{hp}(\vec{P}) \neq \mathrm{hp}(\vec{Q}) \end{cases}$$

ただし $\gamma_1 = \gamma - \mathrm{lexp}_F(\vec{P}),\ \gamma_2 = \gamma - \mathrm{lexp}_F(\vec{Q}),\ \gamma = \mathrm{lexp}_F(\vec{P}) \vee \mathrm{lexp}_F(\vec{Q})$.

又、$\mathcal{D}^k$ の F_m^k - 基底を求めるアルゴリズムの停止性と、前章の (3.1.1) の類似

(3.2.1) $$ {}^\forall m' \geqq m \quad \mathrm{sp}(\vec{P}_i,\vec{P}_j) \twoheadrightarrow 0 \qquad \mod F_{m'}^k.$$

も、モノイデアルの有限生成性より成り立つことがわかる。この事実を用いて、グレブナ基底の存在を示すことができる。なお，この証明は収束巾級数環での Gröbner 基底の存在を示した [6] の証明を参照した.

定理.
$\mathcal{D}^k$ の部分加群 $\mathcal{I}$ の F^k_m - 基底が、部分加群 $\mathcal{I}$ のグレブナ基底になる整数 m が存在する。

証明.
(3.2.1) を満たす F^k_m - 基底 $\mathbf{G}$ は、グレブナ基底であることを示す。

$\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \cdots, \vec{P}_s\}$ を、head point の値で分類する。$\mathbf{G}_j = \{\vec{P}_i \in \mathbf{G}\ |\mathrm{hp}(\vec{P}_i) = j\}$. この $\mathbf{G}_j$ の leading exponent で生成される モノイデアル を $\mathbf{E}_j$ とする。

$$\mathbf{E}_j = \cup_{\vec{P}_i \in \mathbf{G}_j} (\mathrm{lexp}_F(\vec{P}_i) + \mathbb{N}^{2n})$$

任意の $\vec{F} \in \mathcal{I}$ について、$\vec{F}$ を $\mathbf{G}$ で F^k_m - 簡約 した結果を $\vec{F}'$ とする。

$$\vec{F} \twoheadrightarrow \vec{F}' \quad \mathrm{mod}\ F^k_m$$

$\vec{F}' \not\equiv 0 \pmod{F^k_m}$ として矛盾を導く。

$\mathrm{hp}(\vec{F}') = j$ とする。$\vec{F}'$ は、F^k_m - 既約 かつ $\vec{F}' \not\equiv 0\ \mathrm{mod}\ F^k_m$ であるから、$\mathrm{lexp}_F(\vec{F}') \notin \mathbf{E}_j$ 又、$\vec{F}' \in \mathcal{I}$ より、$\vec{F}'$ は、$\mathbf{G}$ の $\mathcal{D}$ - 線形結合で表わされる。すなわち、$\vec{F}' = h_1\vec{P}_1 + \cdots + h_s\vec{P}_s$, $(h_1, \cdots, h_s \in \mathcal{D})$。特に、$\vec{F}' \equiv h_1\vec{P}_1 + \cdots + h_s\vec{P}_s\ \mathrm{mod}\ F^k_m$ である。この様な表示で、$\max_{i=1\cdots s} {}_F\{\mathrm{lexp}_F(h_i\vec{P}_i)\}$ が、最少となるように改めて h_i を取り直す。$i = 1, \cdots, s$ の並べ方を変えて次のようにできる。

$$r = \mathrm{lexp}_F(h_1\vec{P}_1) = \cdots = \mathrm{lexp}_F(h_{\sigma'}\vec{P}_{\sigma'}), \quad r \succ_F \mathrm{lexp}_F(h_j\vec{P}_j) \ \ (j = \sigma' + 1, \cdots, s)$$
$$t = \mathrm{hp}(h_1\vec{P}_1) = \cdots = \mathrm{hp}(h_\sigma\vec{P}_\sigma) > \cdots \geqq \mathrm{hp}(h_{\sigma'}\vec{P}_{\sigma'})$$

又、$\mathrm{ht}_F(h_i) = b_i x^{\alpha_i}\partial^{\beta_i}$ とする。以後の証明は t 成分を中心に進める。

$$\vec{F}^{(1)} = \sum_{i=1}^{\sigma} b_i x^{\alpha_i}\partial^{\beta_i}\vec{P}_i\ , \quad \vec{F}^{(2)} = \sum_{i=1}^{\sigma} h'_i\vec{P}_i + \sum_{i=\sigma+1}^{s} h_i\vec{P}_i.$$

とおき、$h_1\vec{P}_1 + \cdots + h_s\vec{P}_s = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} \equiv \vec{F}'\ \ \mathrm{mod}\ F^k_m$ と分解する。この時、$\vec{F}^{(1)}$ は、次のように、書き直せる。

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(1)} = \ & b_1(x^{\alpha_1}\partial^{\beta_1}\vec{P}_1 - x^{\alpha_2}\partial^{\beta_2}\vec{P}_2) \\ & + (b_1 + b_2)(x^{\alpha_2}\partial^{\beta_2}\vec{P}_2 - x^{\alpha_3}\partial^{\beta_3}\vec{P}_3) \\ & + \cdots\cdots \\ & + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{\sigma-1})(x^{\alpha_{\sigma-1}}\partial^{\beta_{\sigma-1}}\vec{P}_{\sigma-1} - x^{\alpha_\sigma}\partial^{\beta_\sigma}\vec{P}_\sigma) \\ & + (b_1 + \cdots + b_\sigma)(x^{\alpha_\sigma}\partial^{\beta_\sigma}\vec{P}_\sigma)\ \ .\end{aligned}$$

まず、この式において最後の σ 項目は 0 である事がわかる。なぜならもし 0 でないとすると $\vec{F}$ において、$\mathrm{ht}_F(\vec{F}')$ が現れるのは、$\vec{F}^{(1)}$ の σ 項目のみであるから $\mathrm{ht}_F(\vec{F}') \in (\mathrm{lexp}_F(\vec{P}_\sigma) + \mathbb{N}^{2n}) \in E_j$. しかし今、仮定により $\mathrm{lexp}_F(\vec{F}') \notin \mathbf{E}_j$ である。これは矛盾。

次に、i 項目 $(i=1,\cdots,\sigma-1)$ について考えると、

$$x^{\alpha_i}\partial^{\beta_i}\vec{P}_i - x^{\alpha_{i+1}}\partial^{\beta_{i+1}}\vec{P}_{i+1} = x^{\varphi_i}\partial^{\psi_i}\mathrm{sp}(\vec{P}_i,\vec{P}_{i+1}) + \sum_{|k|>0} c_k x^{\alpha_i-k}\partial^{\beta_i-k}\vec{P}_i + \sum_{|k|>0} d_k x^{\alpha_{i+1}-k}\partial^{\beta_{i+1}-k}\vec{P}_{i+1}.$$

と変形でき、(3.2.1) の仮定により $\mathrm{sp}(\vec{P}_i,\vec{P}_j) \twoheadrightarrow 0 \mod F^k_{m'}, {}^\forall m' \geqq m$ だから 次の式が成り立つ。

$$x^{\varphi_i}\partial^{\psi_i}\mathrm{sp}(\vec{P}_i,\vec{P}_{i+1}) \twoheadrightarrow 0 \mod F^k_{m'''}\ {}^\forall m''' \geqq {}^\exists m''.$$

つまり、

$$x^{\varphi_i}\partial^{\psi_i}\mathrm{sp}(\vec{P}_i,\vec{P}_{i+1}) \equiv {}^\exists k_1\vec{P}_1 + \cdots + {}^\exists k_s\vec{P}_s \mod F^k_m,$$
$$\text{s.t. } \mathrm{lexp}_F(k_i\vec{P}_i) \precneqq_F r \quad {}^\forall i=1,\cdots,s.$$

よって、ある ${}^\exists g_1,\cdots,{}^\exists g_s \in \mathcal{D}$ で

$$\vec{F}^{(1)} \equiv g_1\vec{P}_1 + \cdots g_s\vec{P}_s \mod F^k_m \quad \text{s.t. } \mathrm{lexp}_F(g_i\vec{P}_i) \precneqq_F r.$$

以上より、

$$\vec{F} \equiv \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{\sigma}(g_i+h'_i)\vec{P}_i + \sum_{i=\sigma+1}^{s}(g_i+h_i)\vec{P}_i \mod F^k_m,$$
$$\mathrm{lexp}_F((g_i+h'_i)\vec{P}_i) \precneqq_F r \quad (i=1,\cdots,\sigma)$$
$$\mathrm{lexp}_F((g_i+h_i)P_i) \precneqq_F r \quad (i=\sigma-1,\cdots,s).$$

これは、仮定に反する。証明終り。

4 F-order グレブナ基底の応用.

4.1 特性多様体の計算例.

命題.
$\mathbf{G} = \{P_1,\cdots,P_s\}$ をイデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_0$ の F-order によるグレブナ基底とする。この時、すべての $i=1,\cdots,s$ について、$\mathrm{ht}_F(P_i)=\mathrm{ht}_D(P_i)$ が成り立つならば $\mathbf{G}$ は、*D*-order によるグレブナ基底である。

証明.
$\mathbf{G}$ は、D-order のグレブナ基底ではない、すなわち、${}^\exists Q \in \mathcal{I}\setminus\{0\}$ s.t. $\mathrm{ht}_D(Q)$ は、$\mathbf{G}$ に関して既約とする。この時、今、m を $\mathrm{ht}_D(Q) \notin F_m$ となる様にとる。$Q \in \mathcal{I}\setminus\{0\}$ かつ $\mathbf{G}$ は、F-order のグレブナ基底であるから Q は、ある P_i で F_m - 簡約できる。

$$\mathrm{ht}_F(Q) \succneqq_F \mathrm{ht}_F(Q-uP_i) \quad {}^\exists u = ax^\alpha\partial^\beta\text{: 単項式}$$

仮定により $\mathrm{ht}_F(P_i)=\mathrm{ht}_D(P_i)$ だから

$$\mathrm{ht}_D(uP_i) = \mathrm{ht}_F(uP_i) = \mathrm{ht}_F(Q) \precneqq_D \mathrm{ht}_D(Q).$$

よって P_i による F_m - 簡約操作は $\mathrm{ht}_D(Q)$ には影響しない。さらに、仮定により $\mathrm{ht}_D(Q)$ は F_m - 簡約されない。

$$\mathrm{ht}_D(Q) = \mathrm{ht}_D(Q - uP_i) \prec_F \mathrm{ht}_F(Q - uP_i) \precneqq_F \mathrm{ht}_F(Q).$$

更に、$Q - uP_i \in \mathcal{I}$ より同様に F_m - 簡約を繰り返し、

$$Q \to Q - uP_i \to \cdots \to Q' \in F_m$$

となるようにできる。一方これらの F_m - 簡約操作は $\mathrm{ht}_D(Q)$ には影響しないから

$$\mathrm{ht}_D(Q) = \mathrm{ht}_D(Q - uP_i) = \mathrm{ht}_D(Q')$$

結局 $\mathrm{ht}_D(Q) \in F_m$ となるがこれは、m のとり方に矛盾する。証明終り。

この命題を元に、D-order のグレブナ基底を、F-order のグレブナ基底を用いて求める。

例. Appell の 2 変数超幾何微分級数 F_1 の満たす偏微分方程式 $(\partial_x = \partial/\partial_x, \partial_y = \partial/\partial_y)$

$$\mathcal{M}\begin{cases} F1 = x(1-x)\partial_x^2 + y(1-x)\partial_x\partial_y + (e-(a+b+1)x)\partial_x - by\partial_y - ab \\ F2 = y(1-y)\partial_y^2 + x(1-y)\partial_x\partial_y + (e-(a+c+1)y)\partial_y - cx\partial_x - ac \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ の原点に置ける D-order のグレブナ基底をワイエルストラス - 広中の割り算定理を用いて直接求めることは難しいと思われるが、F-order のグレブナ基底なら次のように求めることができた。なお計算は、数式処理システム **risa** を用いた。(34.56 sec)

$$(F)\begin{cases} G1 = x(1-x)\partial_x^2 + y(1-x)\partial_x\partial_y + (e-(a+b+1)x)\partial_x - by\partial_y - ab \\ G2 = y(1-y)\partial_y^2 + x(1-y)\partial_x\partial_y + (e-(a+c+1)y)\partial_y - cx\partial_x - ac \\ G3 = ((-x^3+yx^2)\partial_y + cx^2)\partial_x^2 + ((-yx^2+y^2x)\partial_y^2 + ((-a-b-2)x^2 + \\ \qquad (c+e+1)yx + (a-e+1)y)\partial_y + ecx + ca + (-e+1)c)\partial_x + \\ \qquad (-byx + (-a+e-1)y^2 + (a-e+1)y)\partial_y^2 + ((-ba-b)x + \\ \qquad (-a^2 + (-c+e-2)a + (e-1)c + e - 1)y + (-b+e)a + (e-1)b - e^2 + e)\partial_y - \\ \qquad ca^2 + (e-1)ca \\ G4 = ((x^4 - yx^3)\partial_y - cx^3)\partial_x^2 + ((yx^3 - y^2x^2)\partial_y^2 + ((a+b+2)x^3 + \\ \qquad (-c-e-1)yx^2 + (-a+e-1)y^2x)\partial_y - ecx^2 + ((-ca+(e-1)c)y - ca + \\ \qquad (e-1)c)x)\partial_x + (byx^2 + ((a-e+1)y^2 + (-a+e-1)y)x + (-a+e-1)y^3 + \\ \qquad (a-e+1)y^2)\partial_y^2 + ((ba+b)x^2 + ((a^2 + (c-e+2)a + (-e+1)c - e + 1)y + \\ \qquad (b-e)a + (-e+1)b + e^2 - e)x + (-a^2 + (-c+e-2)a + (e-1)c + e - 1)y^2 + \\ \qquad (ea - e^2 + e)y)\partial_y + (ca^2 + (-e+1)ca)x + (-ca^2 + (e-1)ca)y \end{cases}$$

これは、判定条件によって $\mathrm{sp}(G3, G4)$ が任意の $\mod F_m$ で 0 に簡約されることが示され、それによってこれが F-order のグレブナ基底であることがわかった。続いて、F1,F2 を元に D-order のグレブナ基底の候補を求める。

$$
(D)\begin{cases}
G1' =x(1-x)\partial_x^2+y(1-x)\partial_x\partial_y+(e-(a+b+1)x)\partial_x-by\partial_y-ab\\
G2' =y(1-y)\partial_y^2+x(1-y)\partial_x\partial_y+(e-(a+c+1)y)\partial_y-cx\partial_x-ac\\
G3' =((y^2-y)\partial_y+cx+cy-c)\partial_x+(y^2-y)\partial_y^2+((a-b+c+1)y+b-e)\partial_y+ca\\
G4' =(-cx^2+cx)\partial_x+((-y^2+y)x+y^3-y^2)\partial_y^2+(((-a+b-c-1)y-b+e)x+\\
\qquad (a+c+1)y^2-ey)\partial_y-cax+cay
\end{cases}
$$

これらの critical pair は、どこまで簡約しても式が大きくなる一方でありその方法では、確かめようがない。しかし、その head term を調べてみるとそれぞれ

$$
x\partial_x^2,\quad x\partial_x\partial_y,\quad y\partial_x\partial_y,\quad xy\partial_y^2
$$

と等しく、(D) は、F-order のグレブナ基底であることがわかり、さらに命題より D-order のグレブナ基底 にもなる。これより F_1 の原点の近傍での特性多様体は次のように計算できる。$G1',\cdots,G4'$ の主シンボル $=0$ の連立方程式

$$
(0,0)\begin{cases}
0 =(1-x)(x\xi+y\eta)\xi\\
0 =(1-y)(x\xi+y\eta)\eta\\
0 =y(\xi+\eta)\eta\\
0 =y(1-y)(x-y)\eta
\end{cases}
$$

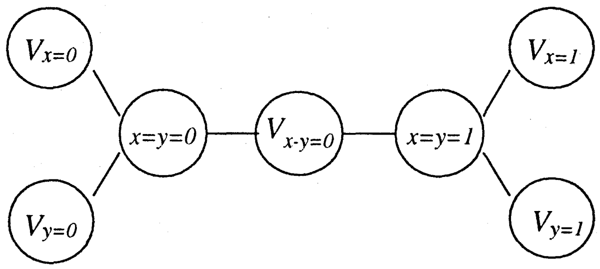
より求められる次の集合が、(0,0) の近傍での特性多様体である。

$$
\{x=y=0\}\quad\{y=\xi=0\}\quad\{x=\eta=0\}\quad\{x-y=\xi+\eta=0\}
$$

同様にして、(1,0) (0,1) (1,1) の近傍での特性多様体も計算できる。

$$
\begin{array}{ll}
(1,0) & \{x=1,\eta=0\}\ \ \{y=\xi=0\}\\
(0,1) & \{x=\eta=0\}\ \ \{y=1,\xi=0\}\\
(1,1) & \{x=y=1\}\ \ \{y=1,\xi=0\}\ \ \{y=1,\eta=0\}\ \ \{x-y=\xi+\eta=0\}
\end{array}
$$

Holonomic Diagram of F_1



($V_{x=0}$: $x=0$ の Conormal Bundle. 他も同様.)

4.2 ホロノミックシステムの解空間.

ここでは、F-order のグレブナ基底を用いて接方程式の $\mathbb{C}$ 上の次元を求める。

$\mathcal{I}$ を、$\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_s$ で生成される $\mathcal{D}^k$ の部分加群、$\mathcal{M}$ を$\mathcal{D}^k$ - 加群 $\mathcal{D}^k/\mathcal{I}$とした時、$\mathcal{M}$ の接方程式とは、次の商空間を意味する。

$$\mathcal{M}/x_1\mathcal{M}+\cdots+x_n\mathcal{M}, \quad = \quad \mathcal{M}/x\mathcal{M}.$$

原点が $\mathcal{M}$ に関して非特性的な場合には、接方程式について次の等式が成り立つ事が知られている。[kashiwara]

$$\dim_{\mathbb{C}}\left\{f\in\mathbb{C}\{x\}^k|\vec{P}_1f=\cdots=\vec{P}_sf=0\right\} \;=\; \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}/x\mathcal{M}.$$

これより、接方程式の次元を計算することで微分方程式の解空間の次元が求められるのである。

さて、$\mathbf{G}=\{\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_s\}$ を、$\mathcal{I}$ のグレブナ基底とし、$\{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_s\}$ を、$\mathbf{G}$ の leading exponent $\Lambda_i=\mathrm{lexp}(\vec{P}_i)=(\alpha_i,\beta_i)$, $(\alpha_i=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_n}),\beta_i=(\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_n}))$, $\{\theta_1,\cdots,\theta_s\}$ を head point, $\theta_i=\mathrm{hp}(\vec{P}_i)$ とする。又、m を自然数とする。

定義.

h が g の $\mathbf{G}$ に関する normal form であるとは、h が、g を $\mathbf{G}$ に関して F_m^k - 完全簡約した結果である事をいう。又、モノイデアル E_j を、$E_j=\cup_{\theta_i=j}(\mathrm{lexp}(\vec{P}_i)+\mathbb{N}^{2n})$ とし、さらに $\Delta_j=\mathbb{N}^n\backslash\cup_{\alpha_i=0,\theta_i=j}(\beta_i+\mathbb{N}^n)$, (すなわち $(0,\Delta_j)=\mathbf{E}_j\cap(0,\mathbb{N}^n)$), $\#\Delta_j=\mu_j$ $(j=1,\cdots,n)$ とする。

グレブナ基底 $\mathbf{G}$ の定義より明らかに normal form は mod F_m^k で一意的である。又、それゆえに $\mathbf{E}_j=\{\mathrm{lexp}(P)|P\in\mathcal{I},\mathrm{hp}(P)=j\}$ が、成り立つ。u_j を $\mathcal{M}$ $(=\mathcal{D}^k/\mathcal{I})$ の j- 成分のみ 1 の要素を含む剰余類とすると、上の事から $\mathcal{M}$ の要素 $\sum_{j=1}^k f_ju_j$ $(f_j\in\mathcal{D}_0)$ は次のような mod F_m^ku に関して一意的な表わし方ができる。

$$\sum_{j=1}^k fu_i=\sum_{j=1}^k\sum_{\substack{|\alpha|-|\beta|<m\\(\alpha,\beta)\notin\mathbf{E}}}a_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta u_j+\sum_{j=1}^k O(m)u_j. \qquad (O(m)\in F_m,\quad a_{\alpha\beta}\in\mathbb{C})$$

よって、次の同型が得られる。

$$\mathcal{M}/F_m^ku\cong\bigoplus_{j=1}^k\bigoplus\nolimits_{\substack{|\alpha|-|\beta|<m\\(\alpha,\beta)\notin\mathbf{E}}}\mathbb{C}x^\alpha\partial^\beta[u_j]$$

($[u_j]:u_j$ を含んだ $\mathcal{M}/F_m^ku$ の剰余類, $F_m^ku=F_mu_1+\cdots+F_mu_k$)

次に、接方程式 $\mathcal{M}/x\mathcal{M}$ の次元を考えるのだが、簡単のために一成分 $\mathcal{M}=\mathcal{D}u$ $(k=1)$ の場合のみで考える。多成分の場合もほぼ同様である。

σ_{x_i} $(i\in\{1,\cdots,n\})$ と σ_x を次のような写像とする。

$$\sigma_{x_i}:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M},\quad \sigma_{x_i}(fu)=x_ifu\quad(f\in\mathcal{D})$$

$$\sigma_x:\mathcal{M}^n\longrightarrow\mathcal{M},\quad \sigma_x(f_1u,\cdots,f_nu)=x_1f_1u+\cdots+x_nf_nu\quad(f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{D}).$$

σ_x の定義より

$$\mathcal{M}/x\mathcal{M}=\mathcal{M}/\mathrm{Im}(\sigma_x)=\mathrm{Coker}(\sigma_x:\mathcal{M}^n\rightarrow\mathcal{M}).$$

つまり、写像 σ_x の cokernel の次元を計算することで接方程式の次元が求められる。この cokernel の計算に F-order のグレブナ基底を使うのだが、F-order のグレブナ基底は、F_m による近似に依っているため σ_x をそのままでは使えない。そこで、σ_x を拡張した写像 $\widehat{\sigma_x}$ を定義する。$\widehat{\sigma_x}$ は、次の可換図式を満たすものとする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^n & \xrightarrow{\sigma_x} & x\mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{M}/F_{m-1}u)^n & \xrightarrow{\widehat{\sigma_x}} & x\mathcal{M}/F_m u \end{array}$$

$\widehat{\sigma_x}$ の well defined は、m が正整数より、$F_m = x_1F_{m-1} + \cdots + x_nF_{m-1}$ すなわち $F_m u = \sigma_{x_1}(F_{m-1}u) + \cdots + \sigma_{x_n}(F_{m-1}u) = \sigma_x((F_{m-1}u)^n)$ 及び $\mathcal{M} = \mathcal{D}u \supset F_{m-1}u, x\mathcal{M} \supset F_m u$ より良い。この写像を用いて次を得る。

$$\widehat{\sigma_x}((\mathcal{M}/F_{m-1}u)^n) = \sigma_x(\mathcal{M}^n)/\sigma_x((F_{m-1}u)^n) = x\mathcal{M}/F_m u$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}/x\mathcal{M} &= (\mathcal{M}+F_m u)/(x\mathcal{M}+F_m u) \cong \frac{\mathcal{M}/F_m u}{x\mathcal{M}/F_m u} = \frac{\mathcal{M}/F_m u}{\widehat{\sigma_x}((\mathcal{M}/F_{m-1}u)^n)} \\ &= \mathrm{Coker}\left(\widehat{\sigma_x} : (\mathcal{M}/F_{m-1}u)^n \to \mathcal{M}/F_m u\right) \\ &= \mathrm{Coker}\left\{\widehat{\sigma_x} \ : \ \left(\bigoplus \mathbb{C}\ x^\alpha \partial^\beta[u]\right)^n \longrightarrow \bigoplus \mathbb{C}\ x^\alpha \partial^\beta[u]\right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

(1) の次元を考える上で、(1) の定義域と値域を制限できる。まず、値域については、その係数が、$a_{\alpha\beta} = 0\ {}^\forall\alpha = 0$ を満たすものは、$\mathrm{Im}(\widehat{\sigma_x})$ に含まれている。なぜなら

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\alpha|-|\beta|<m \\ (\alpha,\beta)\notin \mathbf{E} \\ |\alpha|\neq 0}} a_{\alpha\beta}\ x^\alpha\partial^\beta[u] &= x_1\sum a_{\alpha\beta}\ x^\alpha\partial^\beta[u] \ + \cdots \ + x_n\sum a_{\alpha\beta}\ x^\alpha\partial^\beta[u] \\ &\in \widehat{\sigma_x}\left(\left(\sum_{\substack{|\alpha|-|\beta|<m-1 \\ (\alpha,\beta)\notin\mathbf{E}}} \mathbb{C}x^\alpha\partial^\beta[u]\right)^n\right) = \mathrm{Im}(\widehat{\sigma_x}). \end{aligned}$$

よって、(1) の値域は、$\sum_{\beta\in\Delta}\mathbb{C}\ \partial^\beta[u]$ で考えれば良い。続いて定義域について、$x_i(x^\alpha\partial^\beta)$ が F_m- 既約なものは、

$$\widehat{\sigma_{x_i}}((x^\alpha\partial^\beta)[u]) = x_i(x^\alpha\partial^\beta)[u] \notin \sum_{\beta\in\Delta}\mathbb{C}\ \partial^\beta[u]$$

より cokernel には影響しない。つまり、定義域は、次で考えれば良い。

$$\left\{\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega_1}\mathbb{C}x^\alpha\partial^\beta[u], \cdots, \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega_n}\mathbb{C}x^\alpha\partial^\beta[u]\right\}$$

ただし、$\Omega_i \subset \mathbb{N}^{2n}$ $(i = 1, \cdots, n)$ は、$x^\alpha\partial^\beta$ が F_m- 既約 かつ $x_i(x^\alpha\partial^\beta)$ が F_m- 可約 である指数 (α,β) 全体である。以上から次の式を得る。

定理.

$$
\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}/x\mathcal{M} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker} \left\{ \widehat{\sigma_x} : \left(\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega_1} \mathbb{C} x^\alpha \partial^\beta [u], \cdots, \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega_n} \mathbb{C} x^\alpha \partial^\beta [u] \right) \longrightarrow \sum_{\beta \in \Delta} \mathbb{C}\, \partial^\beta [u] \right\}
\end{aligned}
$$

この定理より、接方程式の次元を求めるには $\widehat{\sigma_x}$ の表現行列 M を作り、その rank を用いて下の式から求められる。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}/x\mathcal{M} \; = \; \mu - \mathrm{rank}\ M, \quad (\mu = \#\Delta).$$

系.

$\{P_1, \ldots, P_s\}$ を R_n のイデアル $\mathcal{I}$ の Gröbner 基底とする。(P_i の分母 $= 1$) $\mathcal{M} = R_n/\mathcal{I}$,

$$V(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{hcoef}_R(P_i)(x) = 0 \quad (1 \leq \exists i \leq r)\}$$

とした時、$p \notin V(\mathcal{M})$ なる点 p では $P_1, \ldots, P_s \in \mathcal{D}_p$ であるから、$\{P_1, \ldots, P_s\}$ で張られる $\mathcal{D}_p$ のイデアルを $\mathcal{I}_p$ とすれば $\mathcal{M}_p = \mathcal{D}_p/\mathcal{I}_p$ に対し、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_p/x\mathcal{M}_p \; = \mathrm{Rank}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}.$$

特に、p は $\mathcal{M}$ について非特性的なので次が成り立つ。

$$\dim_{\mathbb{C}} \{f \in \mathbb{C}\{x - p\} | P_1 f = \cdots = P_s f = 0\} \; = \; \mathrm{Rank}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}).$$

Reference

[1] Björk,J.E., *Rings of Differential Operators*, North–holland,Mathematical Library, 1979.

[2] Briançon,J., *Weierstrass Préparé à la Hironaka.*, Asterisque 7 et 8 (1973), 67–73.

[3] Buchberger,B., *Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems.*, Aequations Math 4 (1970), 374–383.

[4] Buchberger,B., *A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner Bases*, Eurosam 79 ,Springer Lec.Note. in Comp. Sci. **72** (1979), 3–21.

[5] Castro,F., *Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels*, Géometrie algébrique et applications 3, vol. 24, travaux en Cours, 1989, pp. 1–19.

[6] Furukawa,T. and Kobayashi,H. and Sasaki,T., *Gröbner Basis of convergent power series*, RIMS Kokyuuroku **581** (1986), 7–26.

[7] Galligo,A., *Some algorithmic questions on ideals of differential operators*, Lec.Note. in Comp. Sci. **204** (1985), 413–421.

[8] Kashiwara,M., *System of Microdifferential Equations*, Birkhäuser, 1983.

[9] Kimura,T., *Hypergeometric function of two variables.*, Seminer Note Series of Univ. of Tokyo (1972).

[10] Takayama,N., *Gröbner basis and problem of Contiguous relation*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 147-160.