数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 45-50



# The Peripheral Subgroup of a Knotted Torus in $S^4$

大阪市立大学理学部　金信 泰造（Kanenobu Taizo）

F を$S^4$内に埋め込まれたトーラスとし，X をその exterior とする．包含写像 i : $\partial X \to X$ から導かれた写像 $i_*$ による $\pi_1(\partial X)$ の像を F の peripheral subgroupと呼ぶ．従って，Fの peripheral subgroup は meridian で生成された無限巡回群と $\pi_1(F) = Z+Z$ のある剰余群（これを F のタイプと呼び，$\tau(F)$ で表わす．）の直和となる．これまでに，タイプが Z+Z, Z, 0 ([A], [G], [Lt], [Lv])，および，$Z_n$ (n = 2, 5, 10) ([B]) のトーラスが知られていたが，ここでは，次の定理を示す．

<u>定理.</u> 任意の自然数 p についてタイプが $Z_p$ であるような $S^4$ 内に埋め込まれたトーラスが存在する．

K を2-knot ($S^4$ 内の $S^2$ 内の結び目)，h を K 上の 1-handle とするとき，h を K にはりつけてできるトーラスを K+h とかく．h の core は $\pi = \pi_1(S^4-K)$ の元 g を代表すると考えられる．$g = t^n g'$, $g' \in \pi' = [\pi, \pi]$, t を K の meridian とする．$T(h) = \{ t^n g' t^{-n} \mid n$ は整数$\}$ を h の orbit とよぶ．

<u>命題.</u> K+h の群，すなわち，$\pi_1(S^4 - K+h)$ は，$\pi/[t, T(h)]$である．また，K+h の peripheral subgroup は t と T(h) によって生成される $\pi/[t, T(h)]$ の部分群である．従って，p を T(h) の $\pi/[t, T(h)]$ における位数とすると，K+h のタイプは $Z_p$ である．

以上は，Boyle[B] に述べられていることをまとめたものである．Boyle は 5-twist spun trefoil 上の 1-handle の分類をおこなって，タイプが $Z_n$ (n=2, 5, 10) のトーラスを発見した．ここでは，(6-twist spun trefoil) + (1-handle) によって定理の例を構成する．以下，K を 6-twist spun trefoilとする．$\pi = \pi_1(S^4-K)$ は次のような表示をもつ([Z])．

$$\langle\, x,\ y \mid xyx = yxy,\ [x^6,\ y]=1 \,\rangle$$

但し，x と y はmeridiansである．$a=yx^{-1}$ とおくと，

$$\langle x,\ a \mid xax^{-1} = a\ (x^2ax^{-2}),\ x^6ax^{-6} = a \rangle$$

さらに，$a_i=x^iax^{-i}$とおくと，$\pi'$は次のように表示される．

$$\langle\, a_0,\ a_1, \ldots,\ a_5 \mid a_0 = a_5a_1,\ a_1 = a_0a_2, \ldots,\ a_5 = a_4a_0 \,\rangle$$

$b = a_1$とおくと，

$$a_2 = a^{-1}b,\ a_3 = b^{-1}a^{-1}b,\ a_4 = ab^{-1}a^{-1},\ a_5 = ab^{-1}$$

となり，このことから $\pi'$ は

$$\langle\, a,\ b,\ c \mid [a,c] = [b,c] = 1,\ c = [a,b] \,\rangle$$

という表示をもつ．$\pi'' = [\pi', \pi'] = \langle\, c \mid \,\rangle \cong Z$ は，$\pi'$の中心で，$\pi'/\pi'' = \langle\, a,\ b \mid [a,b] = 1 \,\rangle \cong Z+Z$ である．

<u>Claim 1.</u> $\pi'$の任意の元は一意的に $a^kb^lc^m$, $k, l, m \in Z$, と表わすことができる．

<u>Claim 2.</u> $\pi'$において次が成り立つ．

$$(b^ma^n)^k = a^{nk}b^{mk}c^{-mnk(k+1)/2}$$

$w \in \pi'$ に対応する K 上の 1-handle を $h(w)$ とかく．

<u>Claim 3.</u> $h(c^m)$ の orbit は長さが1である：$T(h(c^m))=\{c^m\}$．また，これ以外の orbit は長さが6である：$T(h(w)) = \{w,\ w_1,\ \ldots,\ w_5\}$．

但し $w = a^k b^l c^m$,　$(k, l) \neq (0, 0)$,　$w_i = x^i w x^{-i}$

$w_1 = a^{-l} b^{k+l} c^{kl+l(l-1)/2+m}$;

$w_2 = a^{-k-l} b^k c^{(k-1)l+k(k-1)/2+m}$;

$w_3 = a^{-k} b^{-l} c^{-k-l+m}$;

$w_4 = a^l b^{-k-l} c^{kl-k+l(l-1)/2+m}$;

$w_5 = a^{k+l} b^{-k} c^{kl+k(k-1)/2+m}$.

$K+h(c^m)$ の群 $G(k, l, m) = \pi_1(S^4 - K+h(c^m))$ は次の表示をもつ.

$$\langle\, x,\ a,\ b,\ c \mid xax^{-1} = b,\ xbx^{-1} = a^{-1}b,\ [a, c] = [b, c] = 1,\ c = [a, b],\ w = w_1 = \ldots = w_5 \,\rangle$$

この群の交換子部分群 $G'(k, l, m)$ は次の表示をもつ.

$$\langle\, a,\ b,\ c \mid [a, c] = [b, c] = 1,\ c = [a, b],\ w = w_1 = \ldots = w_5 \,\rangle$$

Claim 4.　$G'(k, l, m)$ において, $c^k = c^l = 1$ である.

証明. $w = w_1$ から, $b^k = a^{k+l} c^{-kl-l(l-1)/2}$ を得るが, この元は a と可換である. 一方, Claim 2 より, $ab^k a^{-1} b^{-k} = aa^{-1} b^k c^k b^{-k} = c^k$ で, これは単位元である. 同様にして, $w_1 = w_2$ より, $c^l = 1$を得る. □

従って Claim 3の $w_1, \ldots, w_5$ は次のようになる.

$w_1 = a^{-l} b^{k+l} c^{l(l-1)/2+m}$;

$w_2 = a^{-k-l} b^k c^{k(k-1)/2+m}$;

$w_3 = a^{-k} b^{-l} c^m$;

$w_4 = a^l b^{-k-l} c^{l(l-1)/2+m}$;

$w_5 = a^{k+l} b^{-k} c^{k(k-1)/2+m}$.

$G'(k, l, m)$においてcで生成される部分群を $\langle c \rangle$ とすると, $\langle c \rangle$ は $G'(k, l, m)$ の交換子部分群で $G'(k, l, m)/\langle c \rangle$ は位数が $k^2+kl+l^2$ のアーベル群である. 従って,

Claim 5. $(k,l)\neq(0,0)$ ならば，$G'(k,l,m)$ は有限群である．

以下，$G'(k,0,m)$ について考察する．この群は次の表示をもつ．

$$\langle\ a,\ b,\ c\ |\ [a,c]=[b,c]=1,\ c=[a,b],\ a^k=b^k=c^{k(k-1)/2},\ c^k=1\ \rangle$$

また，この群をアーベル化すると，

$$\langle\ a,\ b\ |\ a^k=b^k=[a,b]=1\ \rangle\cong Z_{|k|}+Z_{|k|}$$

Claim 6. もしも $k$ が奇数ならば $G'(k,0,m)$ は次の表示をもつ．

$$\langle\ a,\ b,\ c\ |\ [a,c]=[b,c]=1,\ c=[a,b],\ a^k=b^k=c^k=1\ \rangle$$

この群の交換子部分群は

$$\langle\ c\ |\ c^k=1\ \rangle\cong Z_{|k|}$$

である．従って，$G'(k,0,m)$ の位数は $|k|^3$ で，$w=c^m$ の位数は $|k/\gcd(k,m)|$ である．

証明．$G'(k,0,m)$ から，次の行列の群への表現 $\phi$ がある：

$$\left\{\begin{pmatrix}1&r&s\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix};r,s,t\in Z_{|k|}\right\}\quad 但し，\ \phi(a)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \phi(b)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

[J, Chapter 5, Exercise 4]．従って $c$ の位数は $|k|$ である．□

Claim 7. もしも $k$ が偶数ならば $G'(k,0,m)$ は次の表示をもつ．

$$\langle\ a,\ b,\ c\ |\ [a,c]=[b,c]=1,\ c=[a,b],\ a^k=b^k=c^{k/2},\ c^k=1\ \rangle$$

この群の交換子部分群は

$$\langle\ c\ |\ c^k=1\ \rangle\cong Z_{|k|}$$

である．従って，$G'(k,0,m)$ の位数は $|k|^3$ で，$w=c^{m+k/2}$ の位数は $|k/\gcd(k,m+k/2)|$ である．

証明．$k = 2r > 0$ とする．Reidemeister-Schreier の方法 [J, Chapter 9]によって，$G'(k,0,m)/N = \langle a \mid a^{2r} = 1 \rangle$ となる正規部分群 N が $\langle b, c \mid c^{2r} = b^{4r} = [b,c] = 1 \rangle = Z_{2r}+Z_{4r}$ となることを示す．□

<u>Claim 8.</u> $H_2(G(k,0,m)) = 0$

証明．$k = 2r > 0$ の場合を考える．H を $a^{2r}c^{-r}$, $b^{2r}c^{-r}$, $c^{2r}$ で生成された $\pi$ の部分群とする．H が $\pi$ の正規部分群であることがわかり，$\pi/H = G'(k,0,m)$ となる．$\pi$ は2次元結び目群なので $H_2(\pi) = 0$ ([K])．また，明らかに $H \subset \pi'$ である．[BMS, Lemma1.4.1] により，$H_2(\pi/H) = H/[H, \pi]$ この群が自明であることはすぐにわかる．□

## 参考文献

[A] K. Asano: A note on surfaces in 4-spheres, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 4, 195-198, 1976.

[BMS] A. M. Brunner, E. J. Mayland, Jr. and J. Simon: Knot groups in $S^4$ with nontrivial homology, Pacific J. Math., 103, 315-324, 1982.

[B] J. Boyle: Classifying 1-handles attached to knotted surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 306, 475-487, 1988.

[G] C. M. Gordon: Homology of groups of surfaces in the 4-sphere, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 89, 113-117, 1981.

[J] D. L. Johnson: Presentations of Groups, 1990, Cambridge University Press.

[K] M. Kervaire: Les noeuds de dimensions supérieures, Bull. Soc. Math. France, 93, 225-271, 1965.

[Lt] R. A. Litherland: The second homology of the group of a knotted surface, Quart. J. Math. Oxford, (2), 32, 425-434, 1981.

[Lv] C. Livingston: Stably irreducible surfaces in $S^4$, Pacific J.Math., 116, 77-84, 1985.

[Z] E. C. Zeeman: Twisting spun knots, Trans. Amer. Math. Soc., 115, 471-495, 1965.