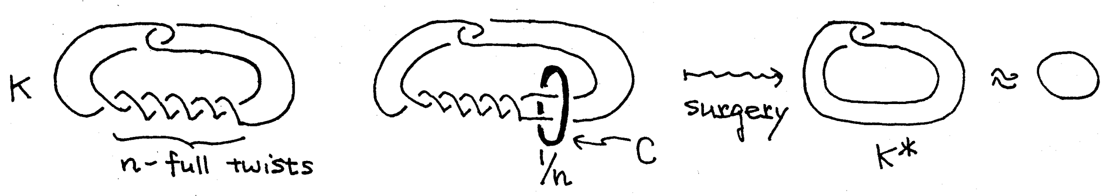
数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 71-78

Composite knots trivialized by twists

神戸大・理　寺垣内 政一 (Masakazu Teragaito)

S^3 内の knot K に対し、それと交わらない unknotted circle C をとり、C 上 $1/n$ - surgery（n は整数）を行なう。C が自明であるから、全空間は再び S^3 であり、knot K の像として、別の knot K^* が得られる。この操作を、K の n-twist と呼ぶ。特に K^* が自明になる場合、K の trivializing n-twist と呼ぶ。あるいは、K は n-twist により trivialize されるという。

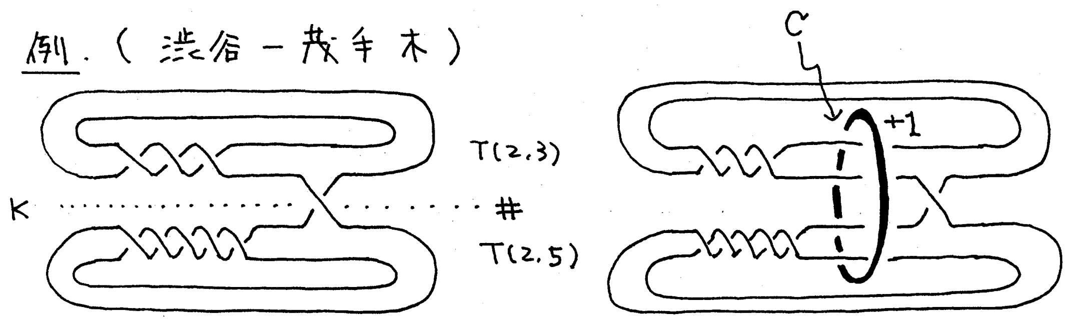
例. K : n-twist knot



Y. Mathieu は、「twist により trivialize される composite knot が存在するか？」という問題を提起した。これに対し、渋谷一茂手木 [MS] は、T(2,3) # T(2,5)（以下、T(p,q) は type (p,q) torus knot を表す。）が 1-twist により trivialize さ

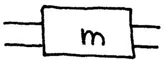
れることを示した。

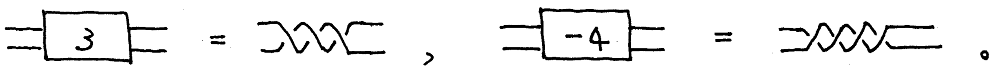
例.（渋谷−茂手木）



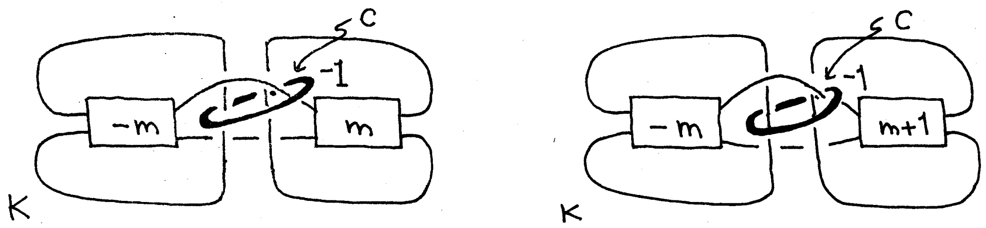
その後、大山により、2つのtwist knotsのconnected sumの中でtrivializing (±1)-twistをもつものが与えられた。

例.（大山）

 は、m− crossingsを表す。例えば、



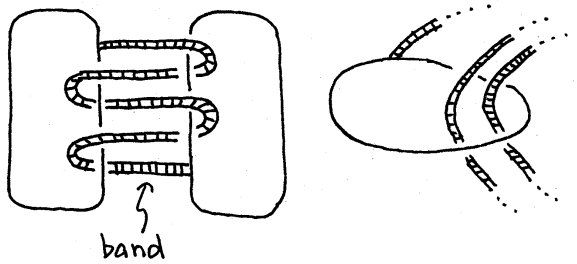
次の2つのタイプのknotsはtrivializeされうる。



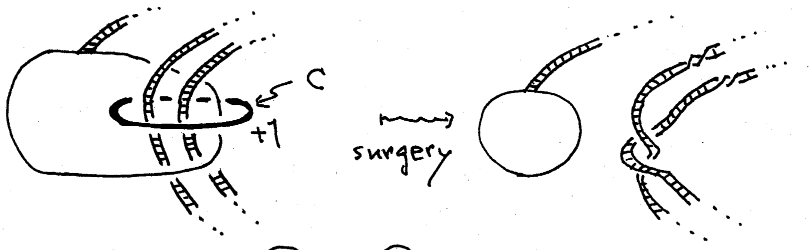
右側のタイプで、$m=2$ととれば、$K=(\text{trefoil})\#(\text{figure eight})$である。

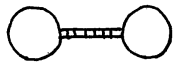
また、安原により、2-component trivial linkから1-fusionで得られるribbon knotsは全てtrivializeされうることが示された。特に、任意の2-bridge knot Kに対し、$K\#-K^!$はそういう例である。（$-K^!$は、Kの鏡像で向きを反転したもの。）

例.(安原)
(Outline)



片方のcomponentに注目し、bandを束ねる。



surgeryにより、bandはもつれるだろうが片方のcomponentが自由になり、にまで直せる。

以上がMathieuの問題に対して、これまでに構成された例である。これらには以下の共通点がある。

(1) (±1) twist によりtrivializeされている。

(2) 2個のprime factorから成る。

(3) 2-bridge summand しかもたない。

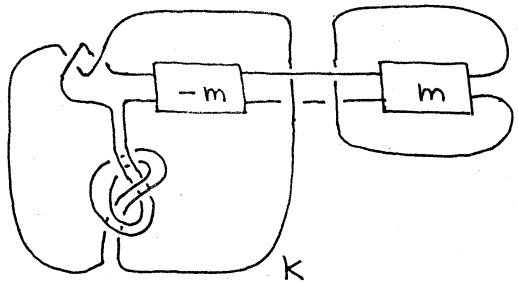
まず、(1)に関しては、茂手木により次のように予想されている。

予想(茂手木) composite knot が n-twist により trivialize されるならば、$|n|=1$。

実際、茂手木は、composite knot が n-twist により trivialize されるならば、$|n| \leqq 5$ であることを示している。

(2)に関しては、最後に述べる。

(3)に関しては、大山の例を改良してみよう。

例. 

大山の例と全く同様に、C を選んで (−1) surgery を行なうと、K は trivialize される。

実際、この例において，K = (twist knot) # (satellite knot) という形をしており、satellite knot の部分は明らかにかなりの任意性をもつ。例えば，いくらでも高い bridge index を実現できる。しかしながら，K は依然として 2-bridge summand を含んでいる。そこで，2-bridge summand を含まないような例を構成したい。

定理. 任意の整数 $n\ (\geq 1)$ に対し、次のような composite knot K が、無限に多く存在する；

(i) K は 1-twist により trivialize される.

(ii) $K = K_1 \# K_2$ と表せ，bridge index $b(K_i) > n$.
$(i = 1, 2)$

証明. ある $p\ (> n)$ をとり，$K_1 = T(p, p+1)$ とする。bridge index $b(K_1) = p$ である [S]。次に，$\mathrm{Int}(S^1 \times D^2)$ 内の circle J を図1のようにとる。ここで，$2p+2$ は right-handed half-twist の数を表している。

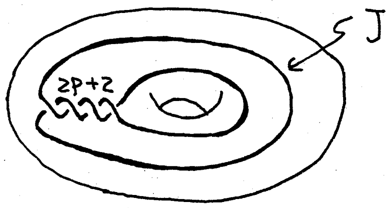


図1.

$\tilde{K} \subset S^3$を，$b(\tilde{K}) = p$なる任意のknotとする。$\tilde{K}$のtubular neighborhood $N(\tilde{K})$に対し，$f: S^1 \times D^2 \xrightarrow{\cong} N(\tilde{K})$をhomeoとする。knot $f(J)$ $(\subset N(\tilde{K})) \subset S^3$を$K_2$とする。すなわち，$K_2$は，$(S^1 \times D^2, J)$をpatternとする$\tilde{K}$のsatellite knotである（[BZ]参照）。ただし，ここでは，fが$N(\tilde{K})$の0-framingを定めている必要はない。さて，bridge index $b(K_2) > p$である[S]。（実際，$b(K_2) = 2p$.）

$\tilde{K}$をfigure-eight knotとした例を1つあげておく。

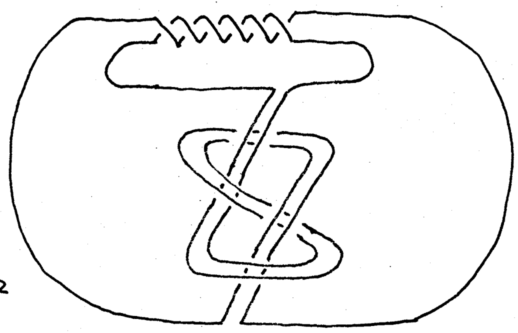


図2.

$2p+2$ half-twistsを消去すれば，K_2はtrivialになることを注意しておく。

$K = K_1 \# K_2$とおく。定理を証明するには，Kが1-twistによりtrivializeされることを示さなければならない。そこで，図3のようにunknotted circle Cをとり，C上1-surgery

を行なう。すると、図4(a)のK^*を得るが、図4(b)-(f)が示すように、K^*はK_2から $2p+2$ half-twists を消去したものと同値であり、従って unknotted である。（証明終）

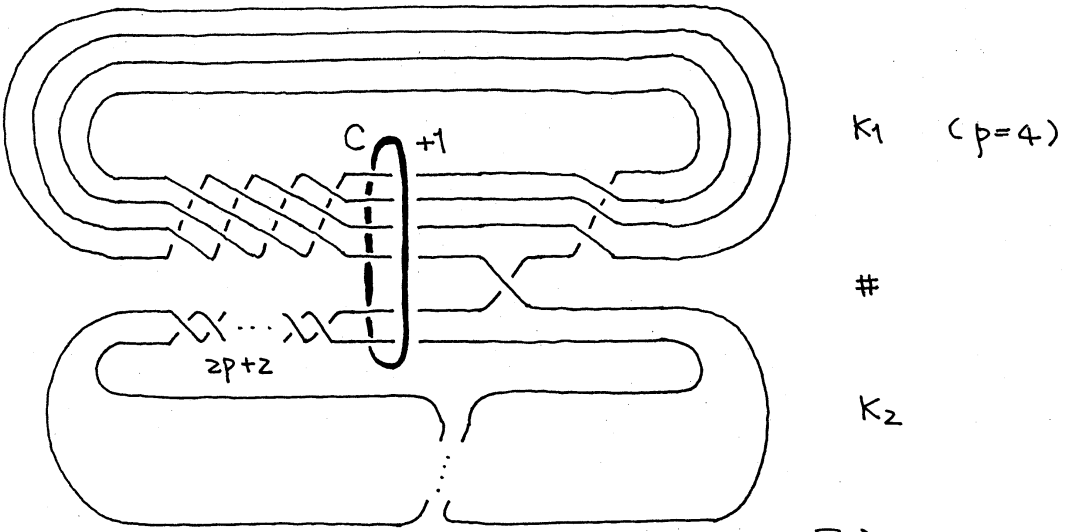


図3.

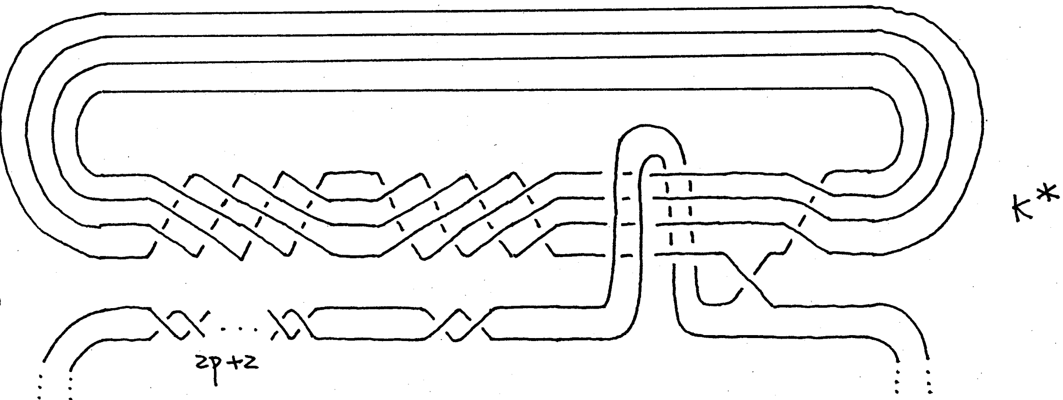
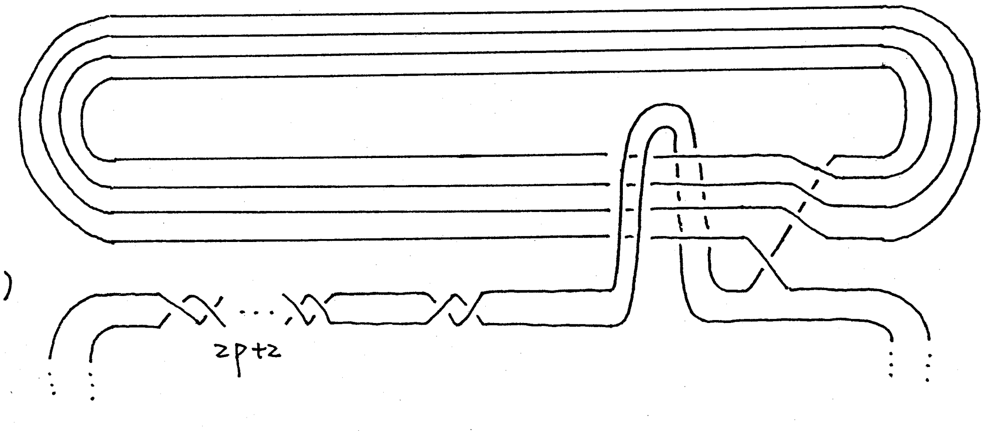
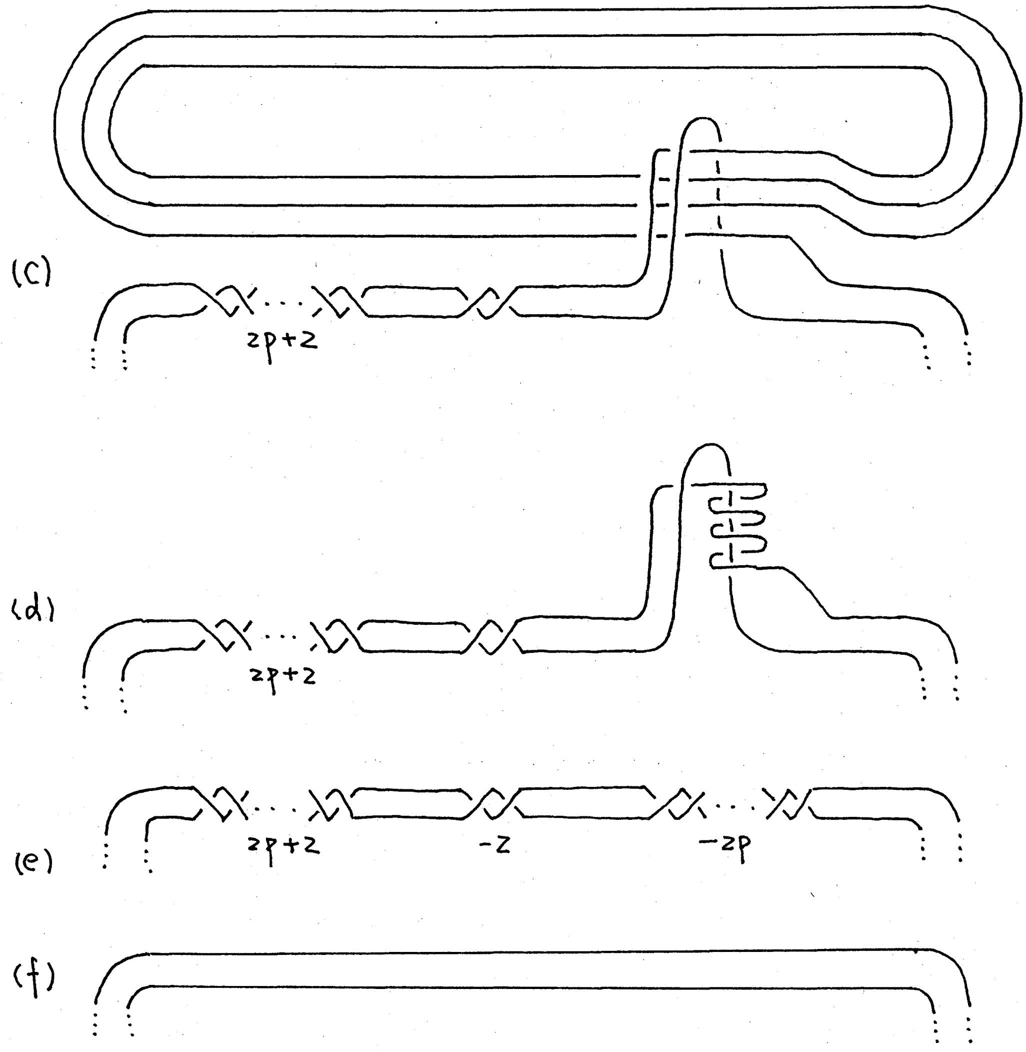


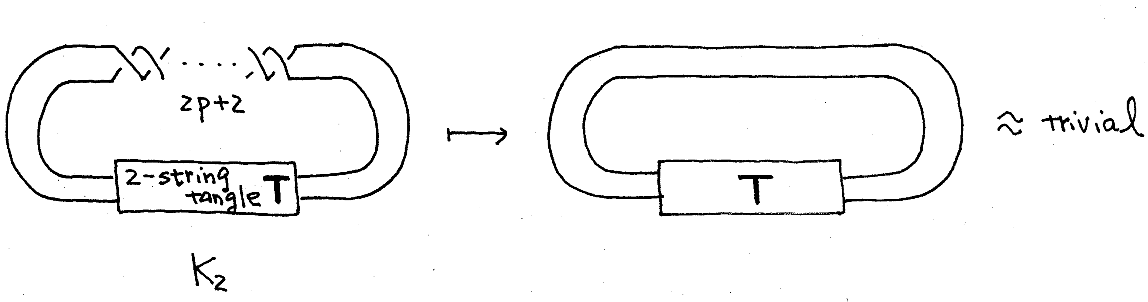
図4.(a)



(b)



実は，K_2としては次のようなものなら何でもよい。



従って，任意の $p\ (\geq 2)$ に対して，$T(p, p+1) \# T(2, 2p+1)$，
$T(p, p+1) \# T(2, 2p+3)$ は 1-twist により trivialize されること

がわかる。

全ての composite knots が trivializing twist を admit するわけではない。宮崎[M]は、$T(2,3)\#T(2,13)$, $T(2.45)\#$ (Alexander polynomial $=1$ の nontrivial slice knot) といった knots が trivialize 不可能であることを示した。

最後に，いくつか問題をあげておきたい。

(1) $K=K_1\#K_2$; K_1, K_2 は共に satellite knot とする。K は trivializing twist を admit するか？

(2) $K=K_1\#K_2\#\cdots\#K_m$ $(m\geq 3)$; K_i は prime knot。K は trivializing twist を admit するか？

参考文献.

[BZ] G. Burde and H. Zieschang, Knots, de Gruyter Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, 1985.

[M] K. Miyazaki, "Mathieu の問題" の解決，研究集会「結び目理論とその応用」(鷲島) 報告集，1991.

[MS] K. Motegi and T. Shibuya, Are knots obtained from a plain pattern prime?, Kobe J. Math (to appear).

[S] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, Math. Zeit. 61 (1954), 245–288.