

Seifert surface に基づいた knot 補空間の foliation と Heegaard splitting

大阪大 理 合田 洋 (Hiroshi Goda)

1 Introduction

K を S^3 内の knot とする。 R を $\partial R = K$ となる compact orientable surface で closed component をもたないものとするとき、 R は K の Seifert surface であるという。 K が fibered knot であるとは、その exterior $E(K)(= S^3 - \text{int}N(K))$ がある Seifert surface を fiber とする S^1 上の fiber bundle になるときいう。また、その Seifert surface を fiber surface と呼ぶ。本稿では、knot 補空間の foliation 及び Heegaard splitting から得られる量で、fiber surface に対する値が共に 0 となるものを比較することを考える。

2 Preliminary

3-manifold theory, foliation 及び sutured manifold theory に関する用語等については [1], [3], [10], [11], [14] を参照して下さい。以下、

M : a compact orientable 3-manifold.

\mathcal{F} : a foliation on M such that

- (1) codimension 1,
- (2) transversely oriented,
- (3) ∂M は \mathcal{F} の leaf または \mathcal{F} に transverse.

とする。

定義 2.1. L を \mathcal{F} の leaf とする。 L 及び \mathcal{F} の depth を次の様に定める。

○ L が depth 0 である $\stackrel{\text{def}}{\iff} L$ は compact

○ depth $j(\leq k)$ leaf が定まったとする。このとき、

L が depth $k+1$ である $\stackrel{\text{def}}{\iff} \bar{L} - L$ が a union of depth $j(\leq k)$ leaves,

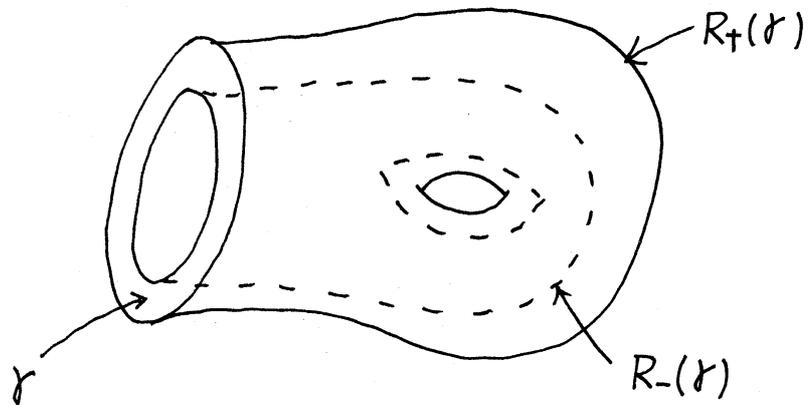
$\bar{L} - L$ は depth k leaf を含む

○ \mathcal{F} が depth k である $\stackrel{\text{def}}{\iff} k = \max\{\text{depth}(L) \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F}\}$

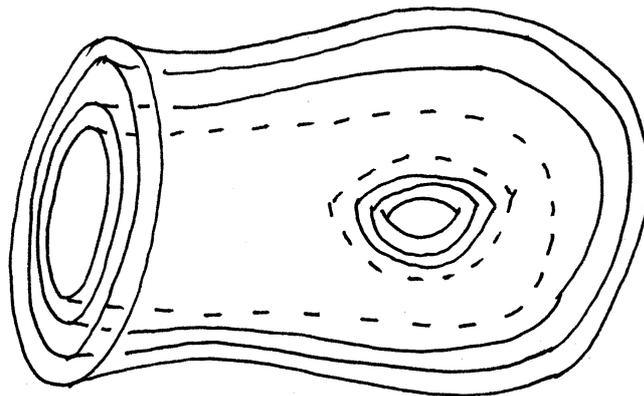
注意: leaf 及び foliation の depth は一般に定義できるとは限らない。

例 2.2. $M = (\text{once punctured torus } T^{\circ}) \times I$, $\gamma = \partial T^{\circ} \times I$ となる sutured manifold

(M, γ) を考える。

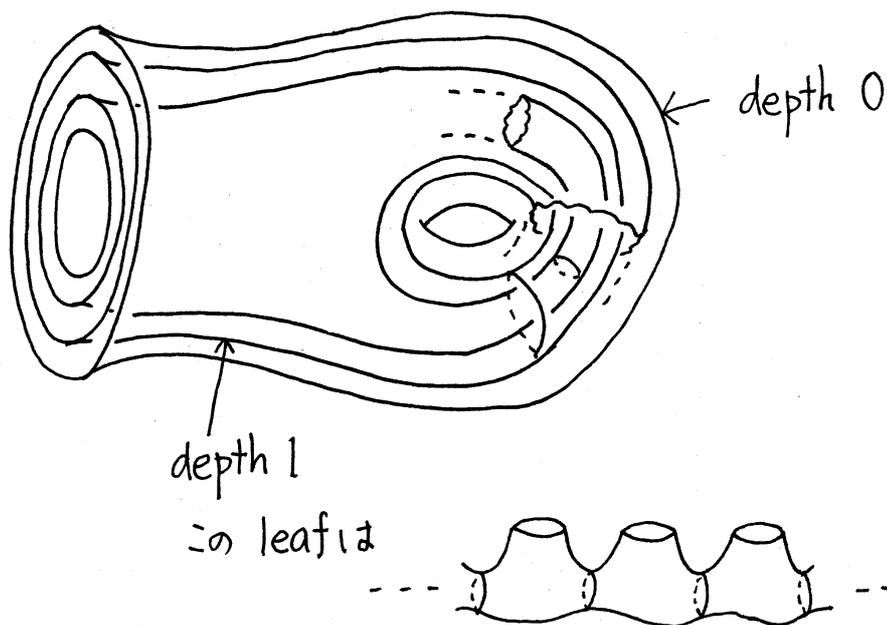


\mathcal{F}_0 を (M, γ) を $T^{\circ} \times \{*\}$ で foliate したものとす。



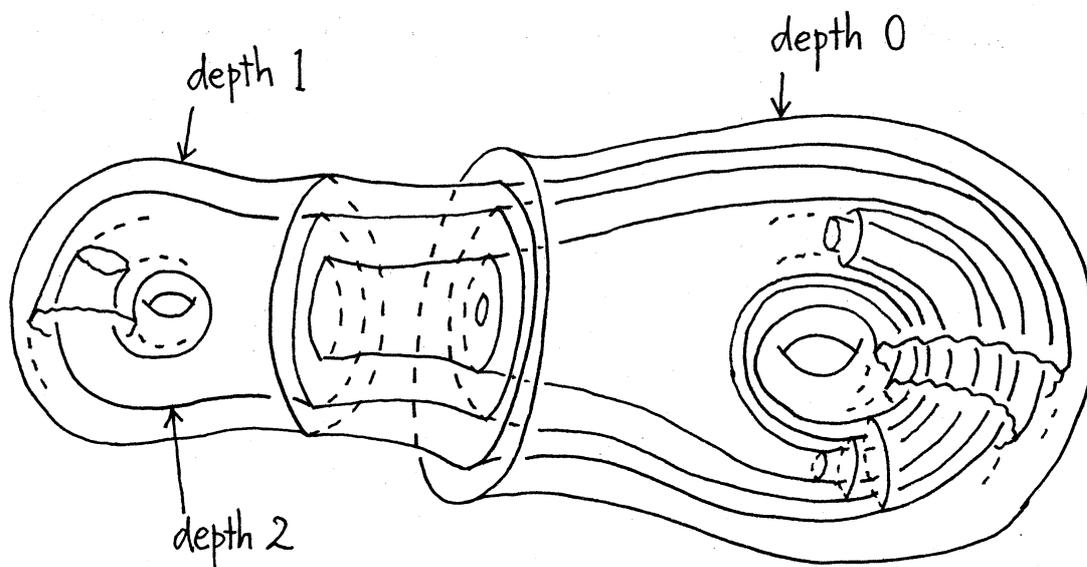
このとき、 $\text{depth}(\mathcal{F}_0) = 0$ 。

次に \mathcal{F}_1 を $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$ を leaf とし、残りの所を次の様に foliate したものとす。



このとき、 $\text{depth}(\mathcal{F}_1) = 1$ 。

\mathcal{F}_2 を上の \mathcal{F}_1 の copy を γ で張り合わせたものとする。



このとき、 $\text{depth}(\mathcal{F}_2) = 2$ 。

より一般には [12] を参照。

定義 2.3. Σ を M の submanifold とする。このとき、

Σ が \mathcal{F} に transverse $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Σ と交わる \mathcal{F} の全ての leaf と Σ は transverse
に交わる

定義 2.4. \mathcal{F} が taut $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{F}$ の各 leaf に対して、transverse circle もしくは properly embedded transverse arc が存在する

以上の notation のもと 次のことが知られている。

定理 2.5 ([6]). K : a knot in S^3 , R : a minimal genus Seifert surface for K とする。このとき、 $E(K)$ 上の taut finite depth foliation \mathcal{F} で R は \mathcal{F} の leaf, $\mathcal{F} | \partial N(K)$ は circle で foliate されるものが存在する。

定義 2.6. (M, γ) を S^3 内の sutured manifold とする。次の条件を満たす sutured manifold decomposition の列 $(M, \gamma) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_n} (M_n, \gamma_n)$ が存在するとき この (M, γ) は completely disk decomposable であるという。

- (1) 各 D_i は disk,
- (2) M_n は connected,
- (3) ∂M_n は a union of spheres S_1, \dots, S_j ,
- (4) $S_i \cap s(\gamma_n)$ は a simple closed curve for $1 \leq i \leq j$.

定理 2.7 ([4]). (M, γ) を ある Seifert surface R の complementary sutured manifold とする。いま (M, γ) が completely disk decomposable ならば、 M 上に taut foliation \mathcal{F} で多くとも depth 1, $\mathcal{F} \pitchfork \gamma$, $R(\gamma)$ は \mathcal{F} の compact leaf となるものが存在する。特に、 ∂R が knot ならば、 $\mathcal{F} | \gamma$ は circle で foliate される。

3 Depth and handle number of Seifert surfaces in S^3

定義 3.1. S^3 内の knot K の minimal genus Seifert surface R に対して、depth とは 次の様に定義されるものである。

$$d(R) = \min\{\text{depth}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } E(K) \text{ 上の taut foliation で } R \text{ は } \mathcal{F} \text{ の leaf, } \mathcal{F} | \partial N(K) \text{ は circle で foliate される。}\}$$

注意: Seifert surface に minimal genus という仮定がつくのは、次のことによる。

定理 3.2 ([15]). K を S^3 内の knot とし、 \mathcal{F} を ある Seifert surface R を leaf にもつ $E(K)$ 上の foliation とする。このとき、 \mathcal{F} が taut ならば、 R は K の minimal genus Seifert surface になる。

定義 3.3. (W, W') が complementary sutured manifold (M, γ) の Heegaard splitting である。

- $$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{aligned} (1) & \quad W, W' \text{ は compression body,} \\ (2) & \quad W \cup W' = M, \\ (3) & \quad W \cap W' = \partial_+ W = \partial_+ W', \\ (4) & \quad \partial_- W = R_+(\gamma), \partial_- W' = R_-(\gamma). \end{aligned}$$

compression body については [9] を参照。

定義 3.4. S^3 内の Seifert surface R に対して handle number とは 次の様に定義されるものである。

$$h(R) = \min \{ W \text{ の attaching 1-handle の数 } \mid (W, W') \text{ は } R \text{ の complementary sutured manifold の Heegaard splitting } \}$$

このとき 次のことがわかる。

命題 3.5. 次の 3 つは同値である。

- (1) R は fiber surface.
- (2) $d(R) = 0$.
- (3) $h(R) = 0$.

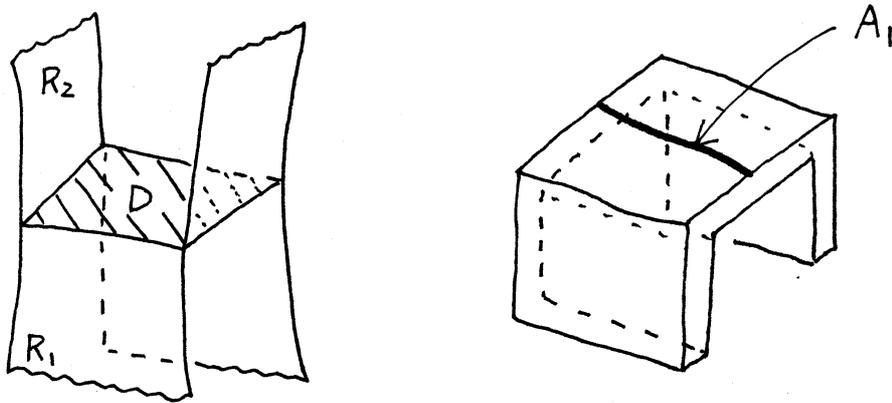
定理 3.6. 任意の正整数 k に対して、 $d(R_k) = 1$, $h(R_k) = k$ となる Seifert surface R_k が存在する。

4 Proof

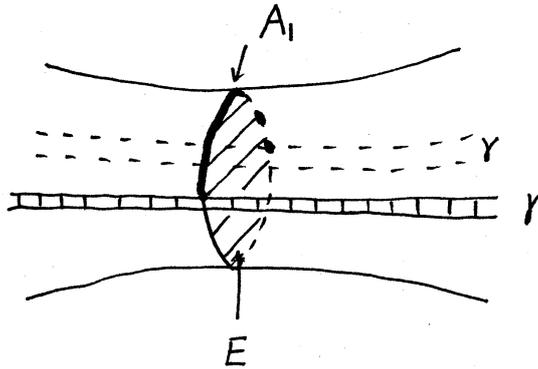
定理 3.6 の証明の為にいくつか定義をする。

R を Seifert surfaces R_1, R_2 を plumbing して得られる Seifert surface とし、 $D = R_1 \cap R_2$ とおく。

定義 4.1. R_1 の marked sutured manifold とは次の様にして構成されるものである。まず、 R_1 の complementary sutured manifold を (M_1, γ_1) , I_1 を embedding $D \subset R_1$ に対する D の core とする。すなわち、 I_1 は R_1 内の properly embedded arc で D は R_1 内で I_1 の regular neighborhood になっているとする。 I_1 を R_1 から R_2 が attach している方向に押し出すことで、 $R(\gamma_1)$ 内の properly embedded arc A_1 が得られる。この sutured manifold と properly embedded arc の組 (M_1, γ_1, A_1) を marked sutured manifold という。



定義 4.2. E が marked sutured manifold (M_1, γ_1, A_1) の product disk with A_1 as an edge とは、 E が M_1 内の properly embedded disk で ∂E は $s(\gamma_1)$ とちょうど 2 点で交わり、 $A_1 \subset \partial E$ となっているときいう。

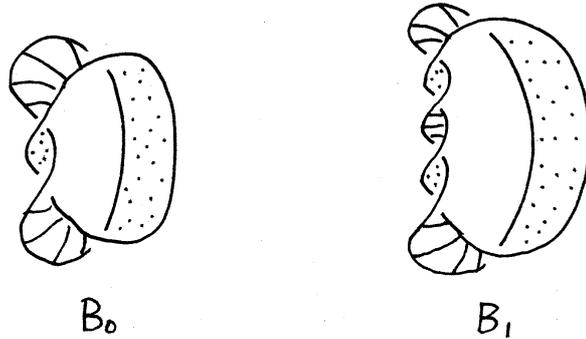


以上の notationのもと、次のことが知られている。

定理 4.3 ([9]). R を Seifert surfaces R_1, R_2 を plumbing して得られる Seifert surface とし、 R_1 の maked sutured manifold を (M_1, γ_1, A_1) とする。いま、 M_1 内に product disk with A_1 as an edge が存在するならば、 $h(R) = h(R_1) + h(R_2)$ が成立する。

◇ 定理 3.6 の 証明。

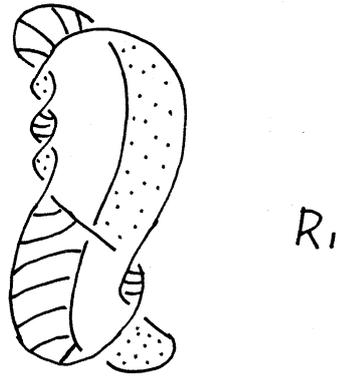
次の unknotted annulus with 1 or 2 full twists B_0, B_1 を考える。



補題 4.4 (cf. [7]). $h(B_0) = 0$.

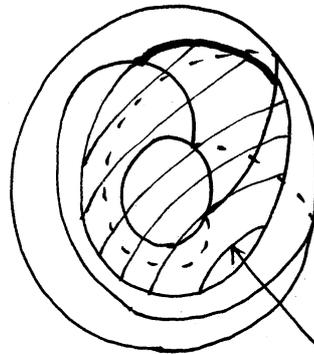
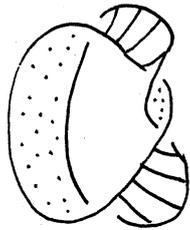
補題 4.5 (cf. [7]). $h(B_1) = 1$.

B_0 と B_1 を 次図の様に plumbing したものを R_1 とする。



補題 4.6. $h(R_1) = 1$.

☺ B_0 に注目すると

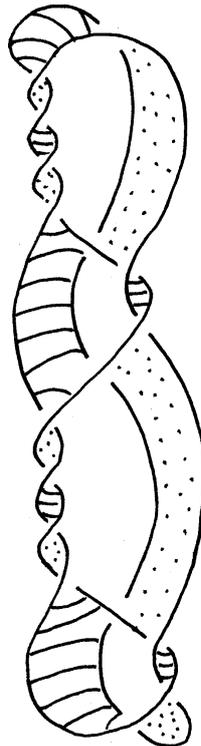


product disk

\therefore Thm 4.3 より $h(R_1) = 1$.

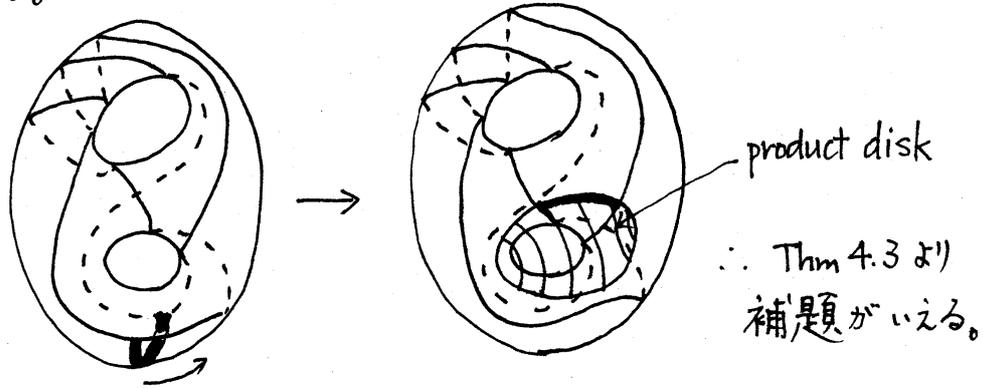
R_1 を下図の様に k 個 plumbing したものを R_k とする。

例. $k=2$

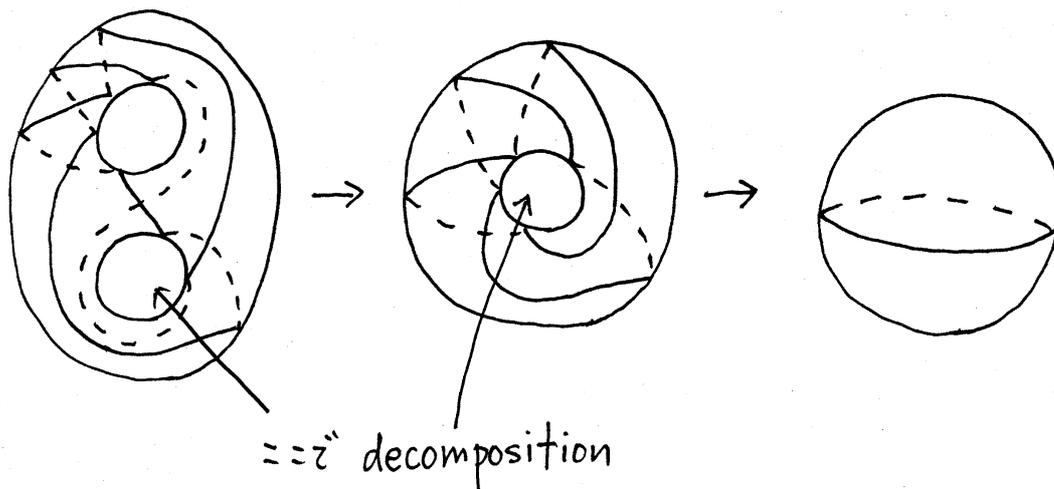


補題 4.7. $h(R_k) = k$.

☺ R_1 の marked sutured manifold
をみる。



補題 4.8. R_k の complementary sutured manifold は completely disk decomposable.
☺ 例) R_1 の complementary sutured manifold



以上、補題 4.7 及び 補題 4.8、定理 2.7 より定理 3.6 が いえる。

参考文献

- [1] C.Camacho, A.L.Neto: Geometric Theory of Foliations, BIRKHÄUSER.
- [2] J.Cantwell, L.Conlon: Depth of knots, Topology and its Appl. 42 (1991) 277-289.
- [3] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Differential Geometry 18 (1983) 445-503.
- [4] D.Gabai: Foliations and genera of links, Topology 23 (1984) 381-394.

- [5] D.Gabai: Genera of the arborescent links, Mem.Amer.Math.Soc.,vol.59, No.339, 1986.
- [6] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Differential Geometry 26 (1987) 479-536.
- [7] 合田 洋: Seifert surface と Heegaard splitting, 津田塾大数学 計算機科学研究所報 2, 3・4 次元多様体と結び目理論 (1991) 114-129.
- [8] 合田 洋: Some cancelling disk pair and the handle number of Seifert surfaces in S^3 , 研究集会 結び目理論とその応用 報告集 (賢島) (1991) 51-54.
- [9] H.Goda: On handle number of Seifert surfaces in S^3 , to appear Osaka.J.Math.
- [10] G.Hector, U.Hirsch: Introduction to the Geometry of Foliations Part A,B, Braunschweig, Wiesbaden.
- [11] J.Hempel: 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, 1976.
- [12] T.Nishimori: Behavior of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math.J. 29 (1977) 255-273.
- [13] 小林 毅: D.Gabai による, knot complement 上の foliation の構成, 数理研講究録 577, Foliations and K-theory (1985) 164-194.
- [14] 田村 一郎: 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.
- [15] W.Thurston: A norm for the homology of three-manifolds, Mem.Amer.Math.Soc., vol.59, No.339, 1986.