数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 89-101

Some branched coverings of knots

関西学院大学理学部　張替 俊夫
(Toshio Harikae)

§1. はじめに

knot K 上 branch する S^3 の branched covering space を単に K の branched covering と呼ぶ。Hilden [8] と Montesinos [10] は任意の向きづけ可能 3 次元閉多様体がある knot の 3-fold irregular branched covering であることを示した。そこで、与えられた knot の 3-fold irregular branched covering はどんな空間になるかという問題を得る。その解答として Murasugi [11] は closed 3-braid の simple 3-fold irregular branched covering がもし存在すればレンズ空間 $L(n,1)$ と同相であることを示し、Hosokawa と Nakanishi [9] は pretzel knot の 3-fold irregular branched covering がもし存在すれば、$L(n,1)$ またはこれらの空間の連結和と同相であることを明らかにした。ここで "simple" とは branch index が 2 以下のことで、また $L(0,1)$、$L(1,1)$ はそれぞれ $S^2\times S^1$、S^3 を表す。

本稿では内田氏との共同研究[7]に基づき、特にMontesinos knotの5-fold irregular dihedral branched covering (3-fold irregularの場合の拡張)を考える。Chumillas とMontesinos [3]は$S^2 \times S^1$が任意の奇素数pに対してknotのp-fold irregular dihedral branched coveringになり得ないことを示している。また§3で、knotのtetrahedral branched coveringについて考察する(詳細については[5]を参照されたい)。なお本稿は[6]の一部をなしていることを付記しておく。

§2. Irregular dihedral branched covering

D_pを正p角形の対称性を表す群(p次の二面体群)とする。D_pは$\langle a, b \mid a^2, b^p, abab\rangle$で表示され、$p$次の対称群$\Sigma_p$の部分群である。$K$で$S^3$内のknotを表し、$G = \pi_1(S^3 - K)$を$K$のknot groupとする。このとき、$G$の$D_p$上への表現$\mu$を$K$の$D_p$表現と呼ぶ。以下$p$を奇素数とする。

<u>Def 2.1</u> μ, μ'をKのD_p表現とする。このとき$\mu' = \theta\mu$となるΣ_pの内部自己同型写像θが存在するとき、μとμ'は同値であるという。

$M_2(K)$でKの2-fold branched coveringを表す。KのD_p表現

の同値類の個数は、$H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_p)$ の rank ν を使って次の定理で与えられる。証明は Fox [4] の第10節の議論を用いて容易に得られる。

<u>Th 2.2</u> K の D_p 表現の同値類の個数は $(p^{\nu}-1)/(p-1)$ で与えられる。

$\Delta_K(t)$ を K のアレクサンダー多項式とすると、$\Delta_K(-1)$ は $H_1(\tilde{M}_2(K))$ の torsion 元の積と等しい。従って

<u>系 2.3</u> K の D_p 表現が存在するための必要十分条件は $\Delta_K(-1) \equiv 0 \mod p$ が成り立つことである。

以下 D_p 表現 μ に付随した K の p-fold irregular dihedral branched covering (以下、D_p-branched covering と呼ぶ) $\tilde{M}_\mu(K)$ を考察する。K が 2-bridge knot $S(\alpha,\beta)$ であるとき、もし $\alpha \equiv 0 \mod p$ ならば K の D_p 表現 μ が1つ存在し(同値類の個数が1)、$\tilde{M}_\mu(K)$ は S^3 と同相になる。そこで bridge index が3以上の knot について考えたいが、そのために Montesinos knot に着目し、特に $p=5$ のとき考える。($p \geq 7$ でも以下の議論と同様のことが成り立つ。) Figure 1 で与えられる diagram

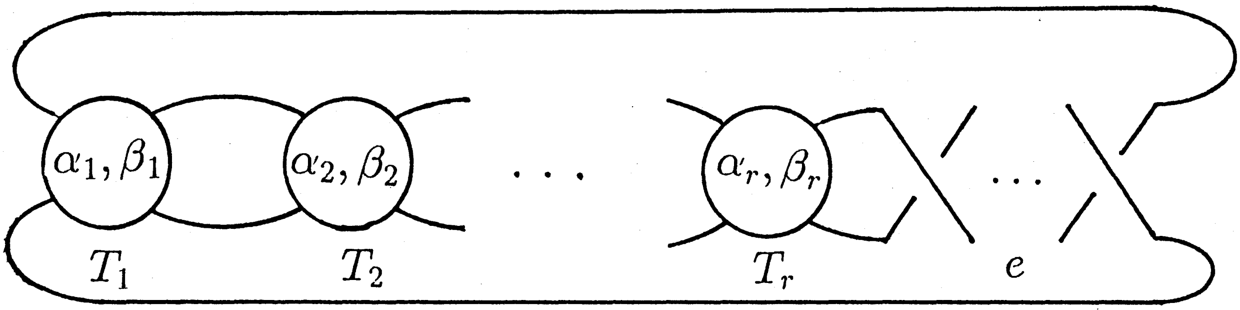

Figure 1

を持つknotをMontesinos knotと呼び、

$$M(e;(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_r,\beta_r))$$

で表す。ここで(α_i,β_i)はrational tangle T_iに対するSchubert notationであり、eはhalf twistの数である。ν'を$\alpha_i\equiv 0 \bmod 5$を満すiの個数とする。すると次の主定理を得る。

Th 2.4　KをMontesinos knotとする。

(1) $\nu'=0$でKのD_5表現が存在するなら、D_p表現の同値類は1通りで、付随するD_5-branched coveringはS^3と同相。

(2) $\nu'=1$なら、KのD_5表現は存在しない。

(3) $\nu'\geqq 2$なら、KのD_5表現は存在し、同値類の個数は$\frac{1}{4}(5^{\nu'-1}-1)$で与えられる。付随する$D_5$-branched coveringは$L(p_i,q_i)\#L(p_i,q_i)$またはこれらの空間の連結和である。ただし$(p_i,q_i)$は$(\alpha_j,\beta_j)$, $1\leqq j\leqq r$, $(0,1)$または

(1, 1) と等しい。

この定理を示すため、まず ν' と ν (この場合は $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_5)$ の rank) の関係を示す。K が Figure 1 の diagram を持つなら

$$H_1(\tilde{M}_2(K)) = \left\langle \begin{array}{c} s_1, \cdots, s_r \\ h \end{array} \middle| \begin{array}{l} s_i^{\alpha_i} h^{\beta}, \ 1 \leqq i \leqq r \\ s_1 s_2 \cdots s_r h^e \end{array} \right\rangle$$

を得る ([1] または [2] を参照せよ)。従って次を得る。

<u>Lemma 2.5</u> (1) $\nu' = 0$ なら、$\nu = 0$ または 1。

(2) $\nu' \geqq 1$ なら、$\nu = \nu' - 1$。

Th 2.4 を証明するため、付随する D_5-branched covering を変えない knot の diagram に対する操作を導入する。knot K が D_5 表現 μ を持つとき、G が K の Wirtinger 表示によって $\langle x_i \mid r_j \rangle$ で表されるなら、$\mu(x_i)$ は $(25)(34)$, $(12)(35)$, $(13)(45)$, $(14)(23)$, $(15)(24)$ のうちの 1 つと等しい。そこで便宜上記号 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ を上の 5 つの元に対して導入する。trivial tangle (B, t) に対して、t の 2 本の arc に対する D_5 表現がそれぞれ $\bar{u}, \bar{v}$ $(\bar{u} \neq \bar{v})$ ならば、t 上 branch する B の付随する D_5-branched covering は 3-ball である。従って次を得る。

<u>Lemma 2.6</u> knot K が D_5 表現 μ を持つとする。このとき K の diagram に対する以下の操作 I, II によって、knot または link K′ と K′ に対する D_5 表現 μ' を得たとすると、$\tilde{M}_{\mu'}(K')$ は $\tilde{M}_{\mu}(K)$ と同相になる。ただし Figure 2, 3 において $\bar{u}$, $\bar{v}$ は $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ の異なる元。

I.

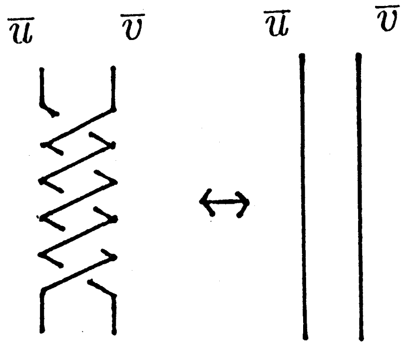

Figure 2

II.

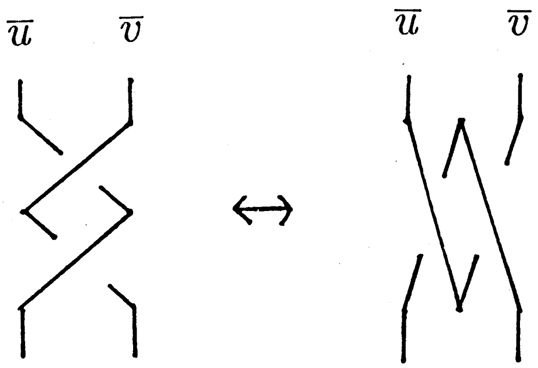

Figure 3

<u>Remark</u> (1) 操作 I は II より得られる。

(2) Lemma 2.6 において $\bar{u} = \bar{v}$ を許したとしても、K と K′ の 2-fold branched covering の $\mathbb{Z}_5$-rank は等しい。

<u>Th 2.4 の証明</u>　T を (α, β) 型の rational tangle とする。$\alpha \equiv 0 \bmod 5$ のとき T の4つの端点の表現は2通りある (Figure 4)。また $\alpha \not\equiv 0 \bmod 5$ のとき端点の表現は2通りある (Figure 5)。もし K に対して $\nu' = 0$ で D_5 表現 μ を持てば K の各 tangle に対する表現は Figure 5 (ii) で与えられる。この

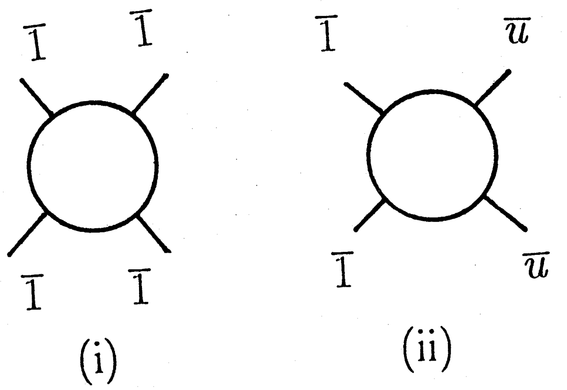

Figure 4

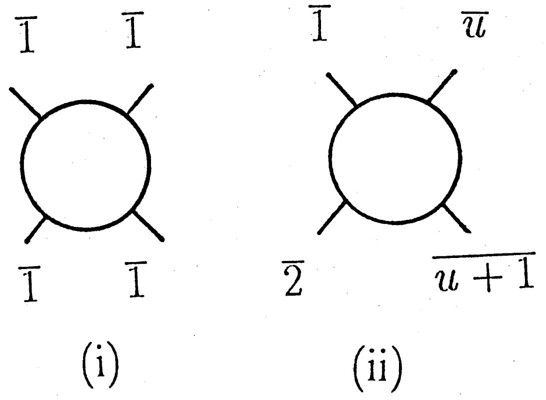

Figure 5

とき isotopy で K の各 tangle に half twist を加えることで $\bar{u}=\bar{1}$ に変えることができる。このような tangle は Lemma 2.6 の操作で horizontal trivial tangle に変えられる。従って得られる空間は S^3 と同相。

$\nu' = 1$ のとき $\nu = 0$ より K は D_5 表現を持たない。

$\nu' \geq 2$ のとき $\nu = \nu' - 1$ より K の D_5 表現の同値類の個数は $(5^{\nu-1}-1)/4$ と等しい。K の tangle T に対して $\alpha \not\equiv 0 \bmod 5$ なら表現は Figure 5 (i) で与えられる (なぜなら $\alpha \equiv 0 \bmod 5$ となる他の tangle が存在する)。もし T に対して $\alpha \equiv 0 \bmod 5$

なる表現はFigure 4(i)または(ii)で与えられる。Figure 4(ii)のtangleはLemma 2.6の操作I, IIでvertical trivial tangleに変えられる。この結果得られるlinkを$L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$とすると、$L_i$は2-bridge knot $S(\alpha_j, \beta_j)$の連結和で$2 \le n \le \mu$. しかもL_iは$\{\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \bar{5}\}$のうちの1つの元がわりふられている。もし$n=2$なら、$L_1$と$L_2$には異なる元$\bar{u}$, $\bar{v}$がそれぞれわりふられ、$\widetilde{M}_\mu(L)$は$\#_{i=1}^{2}(\widetilde{M}_2(L_i) \# \widetilde{M}_2(L_i))$と同相であり、この空間は$L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)$あるいはこれらの連結和となる。次に$n=3$のとき、$L_1, L_2, L_3$に$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$がわりふられているとする。ただし$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$はすべて同じ元にはなり得ないので$\bar{u} \ne \bar{v}$を仮定する。$\mu_1, \mu_2$をそれぞれ$\bar{u}$と$\bar{v}, \bar{w}$がinduceする$L_1 \cup L_2$, L_3の表現とする。そこで$L_1 \cup L_2 \subset B_1$, $L_3 \subset B_2$, $B_1 \cup B_2 = S^3$, $\partial B_1 = \partial B_2$となる3-ball B_1, B_2をとる。$\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2)$における$B_2$のliftは3-ball $\widetilde{B}_{21}, \widetilde{B}_{22}, \cdots, \widetilde{B}_{25}$からなり、同様に$\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$における$B_1$のliftは3-ball $\widetilde{B}_{11}, \widetilde{B}_{12}, \cdots, \widetilde{B}_{15}$からなる。このとき$\widetilde{M}_\mu(L)$は$(\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2) - \bigcup_{i=1}^{5} \widetilde{B}_{2i}) \cup (\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3) - \bigcup_{i=1}^{5} \widetilde{B}_{1i})$で与えられる(ただし$\partial \widetilde{B}_{1i}$と$\partial \widetilde{B}_{2i}$は同一視)。$\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$は3つの空間$\widetilde{M}_2(L_3)$, $\widetilde{M}_2(L_3)$, S^3からなるので、$\widetilde{M}_\mu(L)$は

$$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)) \# (S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$$

と同相。$n \ge 4$のときも同様に考えて、$\widetilde{M}_\mu(L)$は
$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j))$と$S^2 \times S^1$の連結和であり、$S^2 \times S^1$の個

数は$2(n-2)$である。■

ρ_μをD_5表現を持つknot Kに対する$H_1(\widetilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_5)$のrankとする。Th 2.4の証明より

<u>Cor 2.7</u>　Montesinos knot KがD_5表現μを持てば

$$\rho_\mu = 2(\nu - 1)。$$

かつて作間氏は次のThが成り立つことを教示された。

<u>Th 2.8</u>　knot KがD_3表現μを持てば

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_3) \oplus \mathbb{Z}_3 \cong H_1(\widetilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_3)。$$

このThは$H_1(\widetilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_3)$と$H_1(\widetilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_3)$の表現行列を比較することで容易に得られる。そこで筆者はこのThの"D_5版"を考えた。すなわち

<u>Conj</u>　knot KがD_5表現μを持てば

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_5 \cong H_1(\widetilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_5)。$$

ところがCor 2.7において$\nu \geq 2$（すなわち$\nu' \geq 3$）とすれ

ばこのConjの反例を与えることになる。一方Cor 2.7がMontesinos knot以外で成り立つかといえばそれはうそであり、実際 9_{40}, 9_{49}, 10_{103}, 10_{155} に対して $\nu=2$ で $\rho_\mu=1$ となる。作間氏によると次のConjが成り立つのではないかということだが、今のところ不明である。任意の奇素数 p に対して $\nu(K)$ を $H_1(\tilde{M}_2(K);\mathbb{Z}_p)$ のrank, $\rho_\mu(K)$ を D_p 表現 μ に対する $H_1(\tilde{M}_\mu(K);\mathbb{Z}_p)$ のrank とする。

Conj knot K が D_p 表現 μ を持てば

$$\nu(K)-1 \leq \rho_\mu(K) \leq \frac{1}{2}(p-1)(\nu(K)-1).$$

§3. Tetrahedral branched covering

ここではknot K のknot group G の4次の交代群 A_4（正四面体群）上への表現 μ（Kの A_4 表現と呼ぶ）とそれに付随したKの A_4-branched covering $\tilde{M}_\mu(K)$ を考察する。詳しい証明等については[5]を参照されたい。

A_4 は12の元を持ち、$A=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ を正規部分群として持つ。A を法とする A_4 のfactor group は $\mathbb{Z}_3$ と同型で、$A_4=A\cup A(123)\cup A(132)$ と表される。$B=A(123)$, $C=A(132)$ とおく。$G=\langle x_i \mid r_j\rangle$ を G のWirtinger表示とすると、$\mu: G\to A_4$ がontoなら $\mu(x_i)\in B$ または $\mu(x_i)\in C$ が成

り立つ。§2と同様にμの同値類を定義する。$A_K(t)$をKのアレクサンダー行列（[2], [4]などを見よ）、ωを1の原始3乗根，νを$A_K(\omega)$の$\mathbb{Z}_2[\omega]$におけるnullityとする時、Th2.2の証明と同様の手法で次を得る。

Th3.1　KのA4表現の同値類は$\frac{1}{3}(4^{\nu-1}-1)$で与えられる。

よく知られているように（？）$A_K(\omega)$はKの3-fold cyclic branched covering $\tilde{M}_3(K)$と関係づけられる。すなわちβを$H_1(\tilde{M}_3(K);\mathbb{Z}_2)$のrankとする時，$\beta=2(\nu-1)$が成り立つことがわかる。従って

Th3.2　KのA4表現の同値類は$\frac{1}{3}(2^{\beta}-1)$で与えられる。

また、KのA4表現が存在するための必要十分条件は、$\Delta_K(\omega)$が$\mathbb{Z}_2[\omega]$において0になることである。もし$\Delta_K(\omega)=a\omega+b$とおくなら、$a\equiv b\equiv 0 \mod 2 \Leftrightarrow \Delta_K(\omega)\Delta_K(\omega^2)=a^2+b^2-ab\equiv 0 \mod 4$，従って

Cor3.3　KのA4表現が存在するための必要十分条件は、$\Delta_K(\omega)\Delta_K(\omega^2)\equiv 0 \mod 4$が成り立つことである。

$\widetilde{M}_\mu(K)$ については K が 2-bridge knot のとき、特徴づけが可能である。すなわち、

<u>Th 3.4</u> 2-bridge knot の A_4-branched covering はもし存在すれば、あるレンズ空間と同相である。

<u>証明</u> 2-bridge knot K を 2 つの 2-string trivial tangle (B_1, t_1), (B_2, t_2) に分解する。ここで $B_1 \cup B_2 = S^3$, $\partial B_1 = \partial B_2$ $t_1 \cup t_2 = K$。$(B_i, t_i) \sim (D_i, \{x, y\}) \times I$, D_i は 2 点 x, y を含む disc で $I = [0, 1]$。$\{x, y\}$ 上 branch する D_i の A_4-branched covering は genus 1 の disc。従って t_i 上 branch する B_i の A_4-branched covering は solid torus。■

最後に 1 つの予想を掲げておく。

<u>Conj.</u> knot K が A_4 表現 μ を持てば

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \cong H_1(\widetilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$$

参考文献

[1] M. Boileau and B. Zimmermann, *Symmetries of nonelliptic Montesinos links*, Math. Ann., **277** (1987), 563–584.

[2] G. Burde and H. Zieschang, "Knots," Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1985.

[3] V. Chumillas and J. M. Montesinos, *The homology of cyclic and irregular dihedral coverings branched over homology spheres*, Math. Ann., **280** (1988), 483–500.

[4] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in "Topology of 3-manifolds and related topics (ed. by M. K. Fort Jr.)," Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 120–167.

[5] T. Harikae, *Tetrahedral branched coverings of spatial theta-curves*, preprint.

[6] 張替俊夫, 空間内のグラフの分岐被覆, 第 39 回トポロジー・シンポジウム講演集, 岩手大学, 1992 年 7 月, 113–125.

[7] T. Harikae and Y. Uchida, *Irregular dihedral branched coverings of knots*, preprint.

[8] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of* S^3, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 1243–1244.

[9] F. Hosokawa and Y. Nakanishi, *On 3-fold irregular branched covering spaces of pretzel knots*, Osaka J. Math., **23** (1986), 249–254.

[10] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of* S^3, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 845–846.

[11] K. Murasugi, *On dihedral coverings of* S^3, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **2** (1980), 99–102.