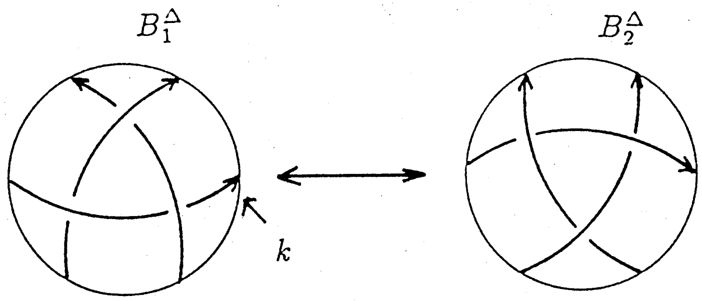
数理解析研究所講究録
第813巻 1992年 111-116

On Delta-unknotting operation

神戸大学自然科学　内田　吉昭 (Yoshiaki Uchida)

結び目解消操作の同値類について考える。X型の結び目解消操作では、Kobayashi [Ko]、Scharlemann-Thompson[S-T] が各々独立に non-trivial doubled knot についてこの結び目を解く結び目解消操作は、1つであることを示している。更に、Taniyama[T] により two-bridge knot に対しては、高々2つであることが示された。また、この様な結び目に対して、Nakanishi は任意の自然数 n に対して結び目解消操作を n 個持つような結び目があることを予想した。そして、Kawauchi が Imitation Theory を用いて肯定的に解答した [Ka]。ここでは、Δ型の結び目解消操作を考えることにする。

kを S^3内の結び目、B_1^Δを kと次のように交わる3次元球体とする。



B_1^Δ を B_2^Δ に置き換えることで k から得られる結び目を k_Δ とする。Δ_1, Δ_2を k の Δ-型結び目解消操作で $k_{\Delta_1} \cong k_{\Delta_2}$ となるものとする。この時、Δ_1 とΔ_2 が homeomorphic とは、homeomorphism $h : S^3 \longrightarrow S^3$ が存在して、$h(k) = k$, $h(k_{\Delta_1}) = k_{\Delta_2}$, $h(B_1^{\Delta_1}) = B_1^{\Delta_2}$, そして、$h(B_2^{\Delta_1}) = B_2^{\Delta_2}$ となる時である。この時、次の事が示すことができた。

Theorem. k を S^3 内の結び目とする。k_Δ を k から Δ-型結び目解消操作で得られた結び目とする。この時、k を k_Δ に変える Δ-型結び目解消操作の homeomorphism 類は、無限個である。

Proof. Figure 1 の様な Δ-型結び目解消操作 Δ_n $(n \geq 1)$ を考える。Disk D に注目する事により k_{Δ_n} は k_{Δ_0} と ambient isotopic であることがわかる。もし、$n \neq m$ ならば Δ_n とΔ_m は、homeomorphic でないことを示す。

Figure 2 のような graph (i) を考える。これは、(ii) の graph の埋め込みである。もし、Δ_1 とΔ_2 が homeomorphic ならば S^3 の homeomorphism h で

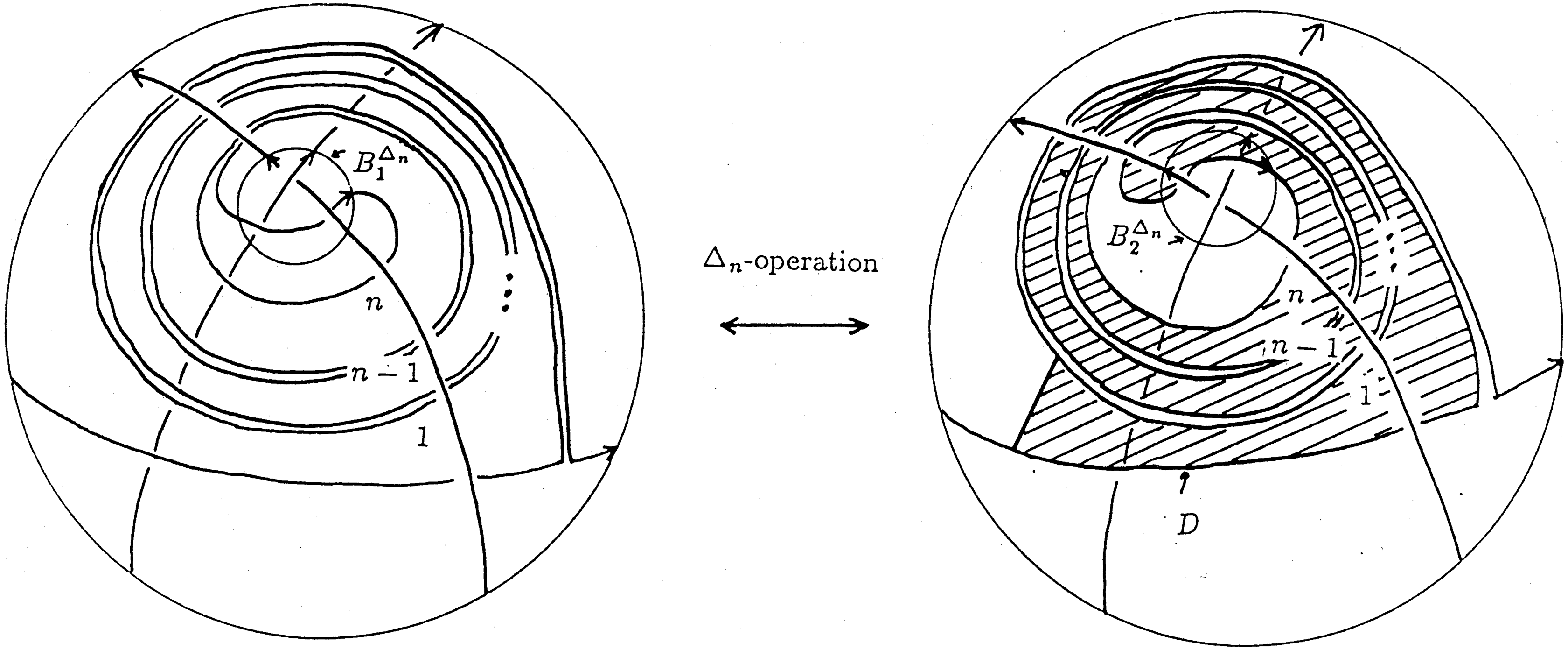


Figure 1

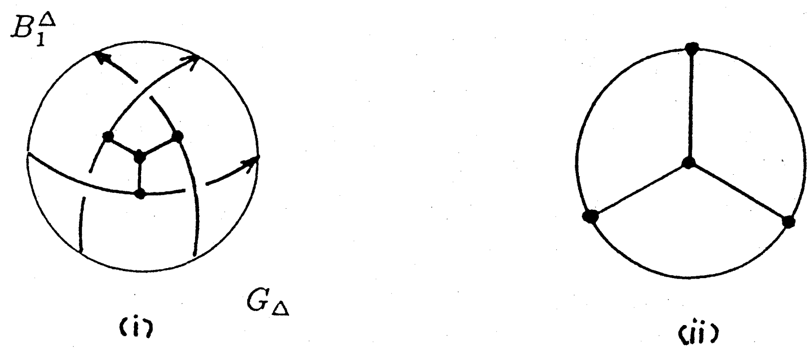
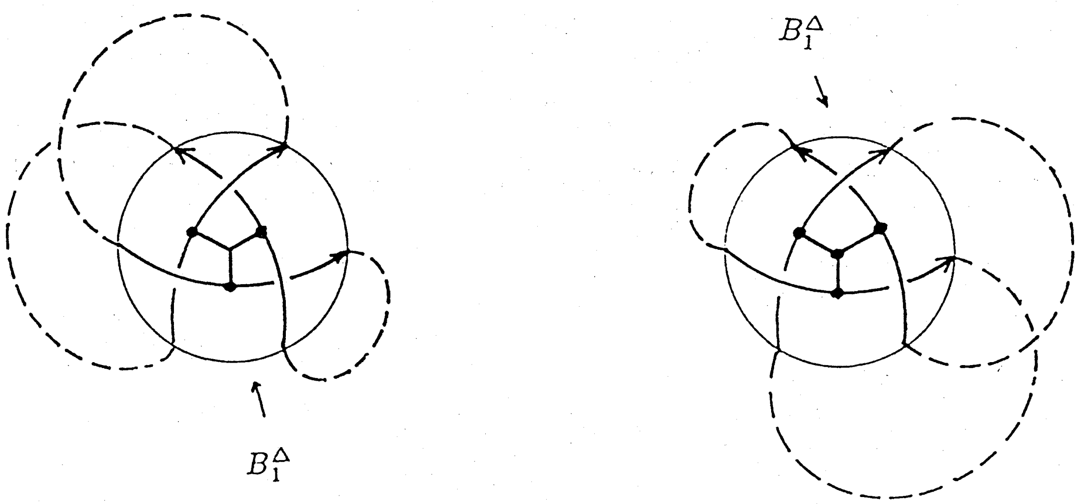


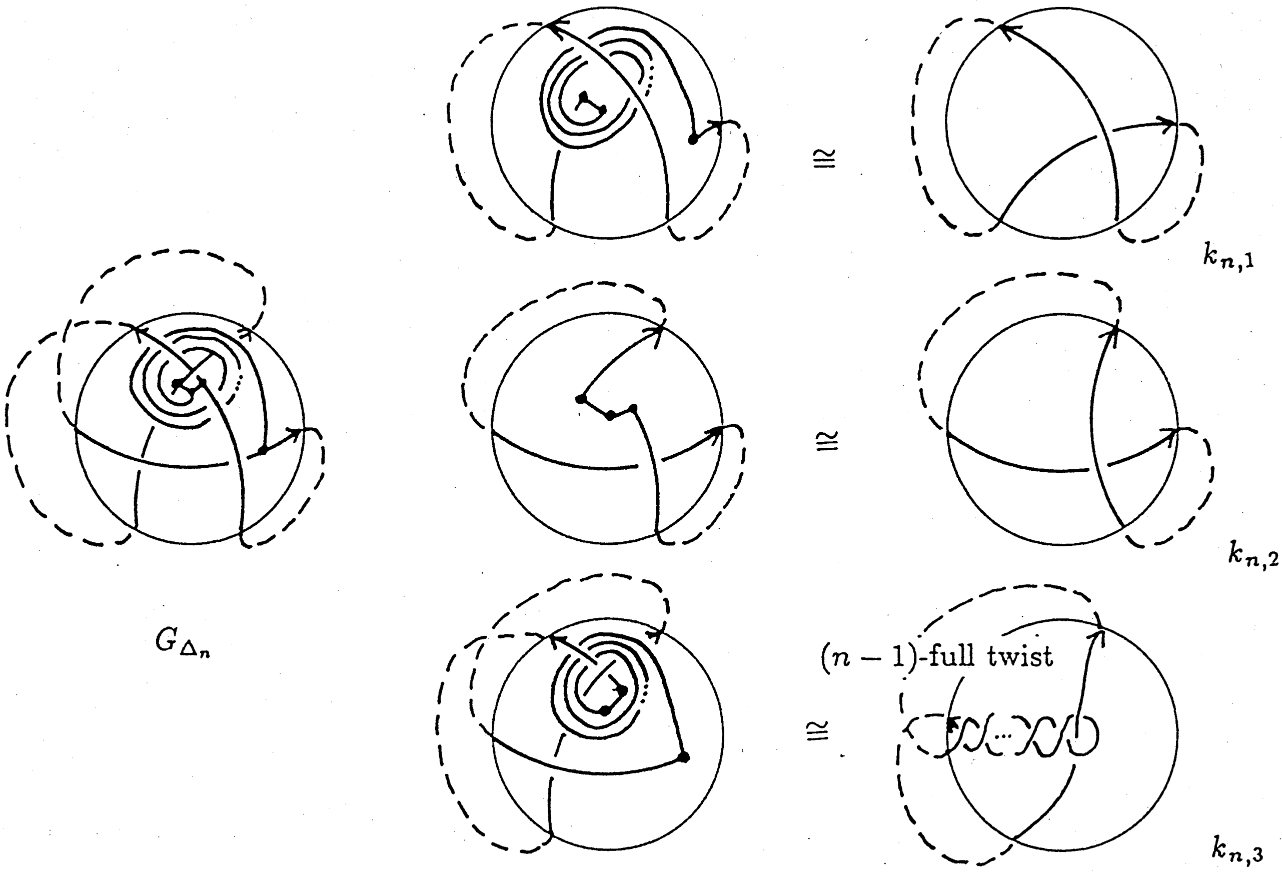
Figure 2

$h(k)=k$、$h(G_{\Delta_1})=G_{\Delta_2}$ となるものが存在する。したがって G_{Δ_n} が G_{Δ_m} と equivalent でないことを示すには、すべての頂点を張る constituent knot を考えればよい。いま、k は、結び目なので次の 2 つの場合を考えればよい。



(i) (ii)

Case(i) のとき、ambient isotopy で動かして G_{Δ_n} と 3 つの constituent knots は次のようになる。



$k_{n,1} \cong k_{m,1}$、$k_{n,2} \cong k_{m,2}$ は簡単にわかる。もし、$n \neq m$ ならば、$k_{n,3} \ncong k_{m,3}$ を示す。a_n を $k_{n,3}$ の Conway polynomial の 2 次の係数とする。$a_n - a_{n-1} = 1$ 即ち $a_n = a_0 + (n-1)$ が得られる。よって、$k_{n,3} \ncong k_{m,3}$。

Case(ii) の時も同様にして得られる。

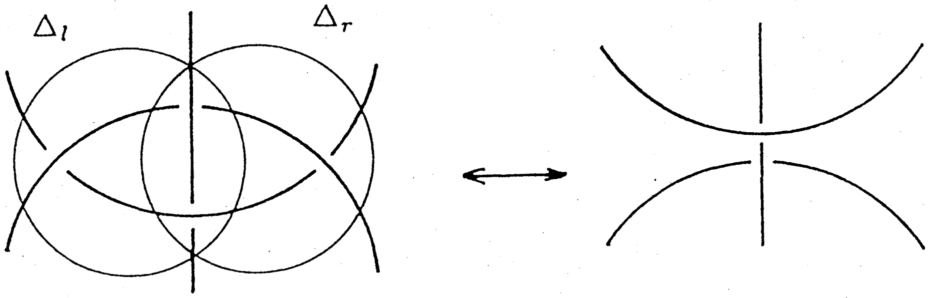
Note. この section では、Δ-型結び目解消操作を knot diagram 上での local move としてみる [M-N]。更に Δ-型結び目解消操作の mirror image も Δ-型結び目解消操作とみなす。Δ_r と Δ_l が次のページの様な関係にあるとき twin-equivalent であるという。

この 2 つの操作で得られる、結び目は、同型であることに注意しておく。k、k' を結び目 K の diagram とする。Δ、Δ' を k、k' の結び目解消操作とする。この時、Δ、Δ' が equivalent とは、次の、有限列 $\{k_i, \Delta_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ が存在するとき。

(1) Δ_i、Δ_{i+1} は k_{i+1} の結び目解消操作、

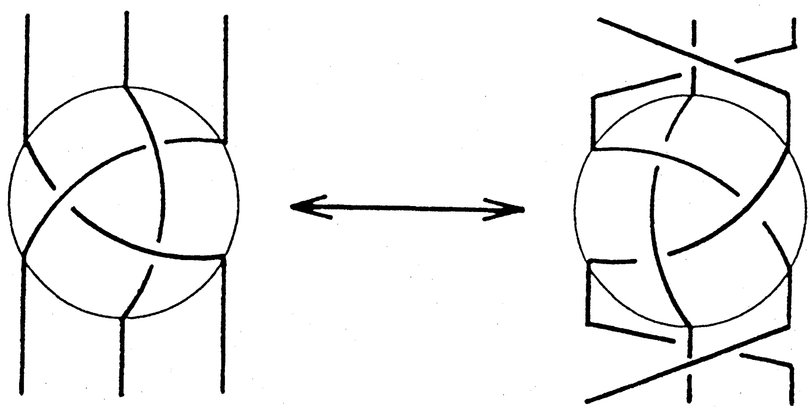
(2) k_{i+1} と k_i は、Δ_i を固定する Reidemeister moves で移りあう、

(3) Δ_i は、Δ_{i+1} と k_{i+1}上で twin-equivalent 、

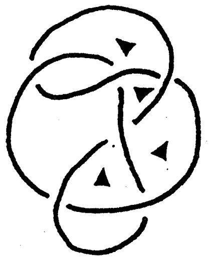


twin-equivalence

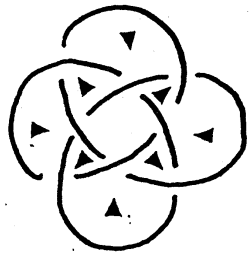
(4) $(k, \Delta) \cong (k_1, \Delta_1)$ かつ $(k', \Delta') \cong (k_n, \Delta_n)$ 。
(5) (k_{i+1}, Δ_{i+1}) は (k_i, Δ_i) から次の操作で得られる。



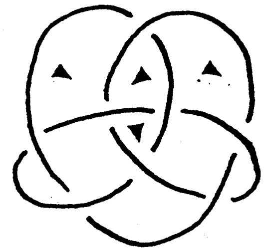
Example(1). 次の▲で示された、結び目解消操作は、上の意味で equivalent 。



6_3



8_{18}



8_{16}

Example(2). 定理の Δ_m はすべて equivalent 。

Problem. KをΔ-型結び目解消操作数1の結び目とする。Δ と Δ' をその様な操作とする。この時、Δ と Δ' は equivalent か?

REFERENCES

[M-N] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.

[Ko] T. Kobayashi, *Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots*, Kobe J. Math. **6** (1989), 53–62.

[S-T] M. Sharlemann and A. Thompson, *Link genus and the Conway moves*, Comm. Math. Helv. **64** (1989), 527–535.

[T] K. Taniyama, *On unknotting operations of two-bridge knots*, Math. Ann. **291** (1991), 579–589.

[Ka] A. Kawauchi, *Introduction to topological imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs*, preprint.

Department of Mathematics
Kobe University
Nada, Kobe 657
Japan