

射影空間上の複素力学系

京都大学総合人間学部 上田哲生 (Tetsuo UEDA)

序

有理関数の iteration の理論の高次元の場合への自然な拡張として、複素射影空間 \mathbf{P}^n からそれ自身への正則写像の力学系を考えることができる。Hubbard-Papadopol [2] はこのような写像を \mathbf{C}^{n+1} の斉次正則写像と関連づけて考察している。また、Fornaess-Sibony [1] は射影平面 \mathbf{P}^2 上の critically finite な正則写像の例を考察している。本稿でも、 \mathbf{P}^n の正則写像を、具体例を中心にして取り扱おう。

一般に、複素多様体 X と正則写像 $F : X \rightarrow X$ の組 (X, F) を (離散的) 複素力学系とよぼう。ここでは主に $X = \mathbf{P}^n$ の場合を考える。より一般には、 X の、不定点をもつ有理型写像が考えられる。例えば、 \mathbf{C}^n の多項式写像は \mathbf{P}^n の有理写像とみなされる。この場合はかなり様相が異なるので、正則写像に限定しておく。力学系 (X, F) が与えられたとき、 F の iteration のもとで X の点がいかに挙動するかを調べたい。特に重要なのは Fatou 集合

$$\Omega_F = \{P \in X \mid F^m|U \ (m = 1, 2, \dots) \text{ が正規族をなすような } P \text{ の近傍 } U \text{ が存在する}\}, \tag{0.1}$$

および Julia 集合

$$J_F = X - \Omega_F \tag{0.2}$$

である。ここで用いる主要な方法を説明するために、次の定義をしよう：

定義 複素力学系 (X, F) , (Y, G) に対して、全射正則写像 $\Phi : Y \rightarrow X$ で、可換図式

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & X \\ G \downarrow & & F \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & X \end{array} \tag{0.3}$$

が成り立つものが存在するとき、 (Y, G) は (X, F) を (Φ を介して) dominate するという。(または、 G と F とは semi-conjugate であるという。) これを

$$(Y, G) \xrightarrow{\Phi} (X, F) \tag{0.4}$$

で表す. 特に, Φ が全単射のとき (Y, G) と (X, F) とは conjugate であるという.

力学系 (X, F) に対して, これを dominate する (Y, G) でその挙動が判っているものを見出すことができれば F の挙動も記述できるであろう. この方法を適用して, Ω_F, J_F の形が楕円関数によって具体的に記述できるような力学系 (\mathbf{P}^2, F) , および $J_F = \mathbf{P}^2$ なる力学系の例を構成することができる. このような例は [1] に異なる方法で与えられている.

本論の内容を節ごとに略述する. 第1節では, \mathbf{P}^1 上の力学系で, $J_f = \mathbf{P}^1$ なるものを, 楕円関数を用いて構成する. これは, Lattès によって与えられた例の1つの variant である. この例をもとにして, 第2, 4節で \mathbf{P}^2 上の力学系の種々の例をつくる. 第2節では, Fatou 集合 Ω_F の形を具体的に記述することができるものの例を挙げる. 第3節では, Böttcher の定理の1つの高次元化を与え, これを用いて Ω_F の形が記述できる例を示す. また第4節では, \mathbf{P}^1 上の力学系から出発して, \mathbf{P}^2 上の力学系を構成する方法を述べる. 特に, $J_F = \mathbf{P}^2$ となるようなものが得られる. 例として $[x : y : z] \rightarrow [(y+z-x)^2 : (z+x-y)^2 : (x+y-z)^2]$ で定まる力学系が挙げられる. 最後の補註では, Weierstrass の sigma 関数と cosigma 関数に関して必要な公式をまとめる.

1 一変数の力学系と楕円関数

まず準備として, リーマン球面 (複素射影直線) 上の力学系 (\mathbf{P}^1, f) で, その Julia 集合 $J_f = \mathbf{P}^1$ なる例を挙げよう. z を \mathbf{P}^1 の非同次座標として,

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1.1)$$

とおく.

力学系 (\mathbf{P}^1, f) を解析するために, これを dominate する力学系 (E, g) を構成しよう. E として, $\infty, 0, \pm 1$ を分岐点とする \mathbf{P}^1 の2葉の被覆面 E をとる. E は

$$w^2 = 4z^3 - 4z \quad (1.2)$$

で定まる楕円曲線である.

命題 1.1 E 上の力学系 (E, g) および正則写像 $\varphi : E \rightarrow \mathbf{P}^1$ で $(E, g) \xrightarrow{\varphi} (\mathbf{P}^1, f)$ なるものが存在する.

[証明] まず, E を複素数平面 \mathbf{C} (u -平面) の商多様体として表現しよう.

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - 4\wp(u) \quad (1.3)$$

で定まる Weierstrass の \wp 関数は $2\omega_1 = 2a, 2\omega_3 = 2ai$ を基本周期とする. ただし,

$$a = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4x}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1.311\dots \quad (1.4)$$

$2a, 2ai$ で生成される格子を Λ で表すと, $E = \mathbb{C}/\Lambda$.

簡単のために, $u \in \mathbb{C}$ に対応する E の点を同じ文字 u で表す. また,

$$\lambda = 1 + i \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1.5)$$

とおく.

写像 $g: E \rightarrow E$ を $g(u) = \lambda u$ で定める. これは 2 対 1 の不分岐被覆写像である. また $\varphi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\varphi(u) = \wp(u)$ で定める. 次の乗法公式から $\varphi \circ g = f \circ \varphi$ が成立することがわかる. 従って $(E, g) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{P}^1, f)$ が成り立つ. \square

命題 1.2 次の乗法公式が成り立つ:

$$\wp(\lambda u) = \frac{1}{2i} \left[\wp(u) + \frac{1}{\wp(u)} \right]. \quad (1.6)$$

[証明] これを証明するには, 両辺とも, $2a, 2ai$ を周期とすること; $0, \lambda a \pmod{\Lambda}$ を極 (2 位) として, また $a, ai \pmod{\Lambda}$ を零点 (2 位) として持つこと; および $z = 0$ の周りでの Laurent 展開が $1/(2iz^2) + \dots$ であることに注意すればよい. \square

定理 1.3 f の Julia 集合 J_f は \mathbb{P}^1 全体である.

[証明] U を任意の開集合 $\subset \mathbb{P}^1$ とする. $\{f^m|U\}_m$ が正規族でないことをいうには, $m \geq m_0$ ならば $f^m(U) = \mathbb{P}^1$ なる m_0 がとれることを示せばよい. これを示すために, $V = \varphi^{-1}(U)$ とおく. φ は全射だから $\varphi(V) = U$. g の形から明らかなように, m_0 を十分大きくとれば, $m \geq m_0$ のとき $g^m(V) = E$ となる. 従って, $f^m(U) = f^m \circ \varphi(V) = \varphi \circ g^m(V) = \mathbb{P}^1$. \square

註 1.1 Julia 集合が \mathbb{P}^1 に一致する (4 次の) 有理関数の例は, Lattès によって, \wp 関数の 2 倍公式を用いて, 与えられた. ここでは, 同じ方法で, できるだけ単純な 2 次有理関数が現れるように, 特別な modulus を持つ \wp 関数の “ $(1+i)$ 倍公式” を用いた.

註 1.2 写像 f は \mathbb{P}^1 の非同次座標 $[x:y]$ ($y/x = z$) に関して

$$f([x:y]) = [2ixy : y^2 - x^2] \quad (1.7)$$

で表される. 写像 φ は, シグマ関数とコシグマ関数を用いて

$$[x:y] = \varphi(u) = [\sigma(u)^2 : \sigma_2(u)^2] \quad (1.8)$$

で表される. (補註 (A.11), (A.15) を参照)

註 1.3 次で定まる力学系 (\mathbf{P}^1, f_1) を考える.

$$\zeta \rightarrow f_1(\zeta) = \left(\frac{\zeta - 2}{\zeta} \right)^2. \quad (1.9)$$

また,

$$z \rightarrow \zeta = \psi(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (1.10)$$

で定まる正則写像 $\psi: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ をとると, $(\mathbf{P}^1, f) \xrightarrow{\psi} (\mathbf{P}^1, f_1)$. 従って $(E, g) \xrightarrow{\psi \circ \varphi} (\mathbf{P}^1, f_1)$. これより, f_1 の Julia 集合が \mathbf{P}^1 なることも判る.

2 齊次正則写像

2.1 正則写像 $F_0: \mathbf{P}^{n-1} \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ が与えられたとき, これは齊次座標 $[x_1: \dots: x_n]$ に関して, 多項式の組によって表される:

$$F_0: [x_1: \dots: x_n] \rightarrow [f_1(x_1, \dots, x_n): \dots: f_n(x_1, \dots, x_n)]. \quad (2.1)$$

ここで, f_j は q 次齊次多項式. これらの多項式は, \mathbf{C}^n の正則写像 F を定める:

$$F: x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)). \quad (2.2)$$

写像 F は次の意味で q 次齊次であることに注意しよう:

$$F(cx) = c^q F(x) \quad (x \in \mathbf{C}^n, c \in \mathbf{C}). \quad (2.3)$$

Hubbard-Papadopol [2] は, F_0 を調べるためには, 写像 F を考察すること, 特に, 原点 O の attractive basin

$$\Omega_F(O) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid F^m(x) \rightarrow O \ (m \rightarrow \infty)\} \quad (2.4)$$

を考察することが有効な手段であることを指摘した. ここでは, $\Omega_F(O)$ の初等的な性質を引用するにとどめる.

命題 2.1 ([2]) $\Omega_F(O)$ は O を中心とする完全円領域 (complete circular domain) である. (即ち, $x \in \Omega_F(O)$, $|c| \leq 1$, ならば $cx \in \Omega_F(O)$). また $\Omega_F(O)$ は正則 (従って擬凸) 領域である.

写像 F は自然に \mathbf{P}^n の正則写像

$$\tilde{F}: [x_0: \dots: x_n] \rightarrow [x_0^q: f_1(x_1, \dots, x_n): \dots: f_n(x_1, \dots, x_n)] \quad (2.5)$$

に拡張される. ここで, $[x_0: x_1: \dots: x_n]$ は \mathbf{P}^n の齊次座標である. F_0 は \tilde{F} の $\{x_0 = 0\} \cong \mathbf{P}^{n-1}$ への制限と同一視することができる. 明らかに $\Omega_F(O)$ は \tilde{F} の Fatou 集合 $\Omega_{\tilde{F}}$ の一連結成分である. 次の命題は容易に示される:

命題 2.2 $\Omega_F(O) = \Omega_{\tilde{F}}$ が成り立つための必要充分条件は F_0 の Julia 集合 J_{F_0} が \mathbb{P}^{n-1} 全体となることである.

2.2 ここで, 特別な例として, 第1節(1.1)で挙げた力学系 (\mathbb{P}^1, f) を考えよう. f は斉次座標に関して註 1.2 の(1.7)で表されるから, これに対応する \mathbb{C}^2 の正則写像は

$$F : (x, y) \rightarrow (2ixy, y^2 - x^2) \quad (2.6)$$

である.

命題 2.2 より, attractive basin $\Omega_F(O)$ は \tilde{F} の Fatou 集合 $\Omega_{\tilde{F}}$ に一致する.

下図は, $\Omega_F(O)$ の実2次元平面による切り口を示している. 図1, 2は, それぞれ $\Omega_F(O) \cap \mathbb{R}^2$ および $\Omega_F(O) \cap (i\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ を示す.

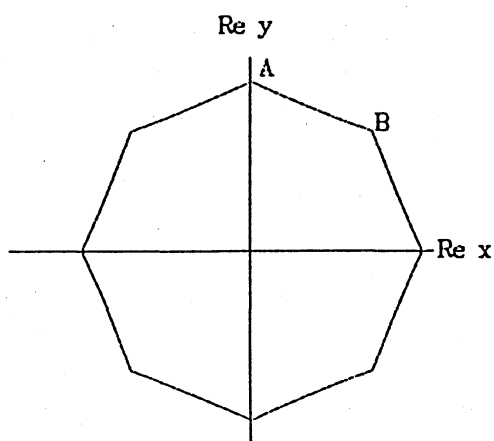


Figure 1

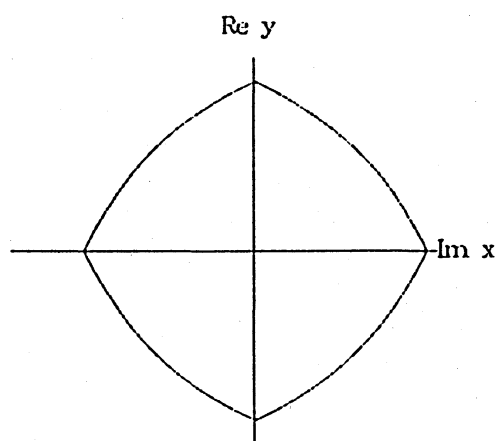


Figure 2

以下では, $\Omega_F(O)$ の形を楕円関数を用いて明示的に表そう. そのために, まず (\mathbb{C}^2, F) を dominate する力学系 (M, G) を構成しよう.

$\widehat{\mathbb{C}^2}$ を, \mathbb{C}^2 の $O = (0, 0)$ における blow-up とする. L_k を直線 $y/x = k$ ($k = \infty, 0, \pm 1$) の $\widehat{\mathbb{C}^2}$ における proper image とする. M として, $\widehat{\mathbb{C}^2}$ 上の, L_k ($k = \infty, 0, \pm 1$) を分岐集合とする2葉の被覆面(2次元複素多様体)をとる. M は自然に $E = \mathbb{C}/\Lambda$ 上の degree -2 の complex line bundle の構造をもつ.

命題 2.3 $(M, G) \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{C}^2, F)$ なる力学系 (M, G) が存在する.

[証明] まず, M を \mathbb{C}^2 の商空間としてあらためて構成する. \mathbb{C}^2 の自己同型 $T_{1,0}$, $T_{0,1}$ を

$$T_{1,0} : (u, v) \rightarrow \left(u + 2a, e^{-\pi\left(\frac{u}{a} + 1\right)v} \right) \quad (2.7)$$

$$T_{0,1} : (u, v) \rightarrow \left(u + 2ai, e^{-\pi\left(\frac{u}{ai} + 1\right)v} \right) \quad (2.8)$$

で定める. $T_{1,0}$ と $T_{0,1}$ とは可換であり, $T_{m,n} := T_{1,0}^m \circ T_{0,1}^n$ ($m, n \in \mathbf{Z}$) とおくと,

$$T_{m,n}(u, v) = \left(u + 2(m + ni)a, e^{-\pi(m-ni)(\frac{u}{a} + m + ni)v} \right). \quad (2.9)$$

M は $M := \mathbf{C}^2 / \{T_{m,n} (m, n \in \mathbf{Z})\}$ と表される. (u, v) に対応する M の点を同じ (u, v) で表す. 写像 $\tilde{G}: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ を $(u, v) \rightarrow (\lambda u, v^2)$ によって定めると $\tilde{G} \circ T_{m,n} = T_{m-n, m+n} \circ \tilde{G}$ が成り立つから, \tilde{G} から正則写像 $G: M \rightarrow M$ が誘導される. これは 4 対 1 の不分岐被覆写像である.

写像 $\tilde{\Phi}: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ を $(u, v) \rightarrow (\sigma(u)^2 v, \sigma_2(u)^2 v)$ によって定める. ここで, $\sigma(u), \sigma_2(u)$ は $2a, 2ai$ を基本周期とする σ および σ_2 関数である (補註参照). $\tilde{\Phi}$ は $T_{m,n}$ で不変である. 即ち $\tilde{\Phi} \circ T_{m,n} = \tilde{\Phi}$ が成り立つ. これを確かめるには $(m, n) = (1, 0), (0, 1)$ の場合を見れば充分である. 例えば, $\tilde{\Phi} \circ T_{1,0} = \tilde{\Phi}$ は次で確かめられる.

$$\begin{aligned} (u, v) &\xrightarrow{T_{1,0}} \left(u + 2a, e^{-\pi(\frac{u}{a} + 1)v} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{\Phi}} \left(\sigma(u + 2a)^2 e^{-\pi(\frac{u}{a} + 1)v}, \sigma_2(u + 2a)^2 e^{-\pi(\frac{u}{a} + 1)v} \right) = (\sigma(u)^2 v, \sigma_2(u)^2 v). \end{aligned}$$

ここで関係式 (A.5), (A.10) を用いた. これより正則写像 $\Phi: M \rightarrow \mathbf{C}^2$ が誘導される. $F \circ \Phi = \Phi \circ G$ が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned} (u, v) &\xrightarrow{\Phi} (\sigma(u)^2 v, \sigma_2(u)^2 v) \xrightarrow{F} (2i\sigma(u)^2 \sigma_2(u)^2 v^2, (\sigma_2(u)^4 - \sigma(u)^4) v^2) \\ &= (u, v) \xrightarrow{\tilde{G}} (\lambda u, v^2) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} (\sigma(\lambda u)^2 v^2, \sigma_2(\lambda u)^2 v^2). \end{aligned}$$

公式 (A.15) から $F \circ \tilde{\Phi}(u, v) = \tilde{\Phi} \circ \tilde{G}(u, v)$. 従って $F \circ \Phi = \Phi \circ G$ を得る. これで $(M, G) \xrightarrow{\Phi} (\mathbf{C}^2, F)$ が示された. \square

射影 $\mathbf{C}^2 \ni (u, v) \rightarrow u \in \mathbf{C}$ は複素直線束 $M \rightarrow E$ の構造を誘導する. 集合 $\{v = 0\}$ には M の零切断 O_M が対応する.

力学系 (M, G) を見るために, M 上に関数 ψ ($M \rightarrow E$ の fiber metric) を定義する. まず, \mathbf{C}^2 上の関数 $\tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\psi}(u, v) = |v| \exp\left(\frac{\pi|u|^2}{4a^2}\right) \quad (2.10)$$

で定めると, $\tilde{\psi} \circ T_{1,0} = \tilde{\psi}$, $\tilde{\psi} \circ T_{0,1} = \tilde{\psi}$ が成り立つ. 従って $\tilde{\psi}$ は $T_{m,n}$ で不変である: $\tilde{\psi} \circ T_{m,n} = \tilde{\psi}$. これより M 上の関数 ψ が定まる.

命題 2.4 次が成り立つ:

$$\psi(G(Q)) = \psi(Q)^2, \quad Q \in M. \quad (2.11)$$

[証明] これは次のようにしてわかる :

$$\tilde{\psi}(\tilde{G}(u, v)) = \tilde{\psi}(\lambda u, v^2) = |v|^2 \exp\left(\frac{\pi|\lambda u|^2}{4a^2}\right) = \left\{|v| \exp\left(\frac{\pi|u|^2}{4a^2}\right)\right\}^2 = \{\tilde{\psi}(u, v)\}^2.$$

□

さて, $\Omega_G(O_M)$ を次のように定義しよう :

$$\Omega_G(O_M) = \{Q \in M \mid G^m(Q) \rightarrow O_M \quad (m \rightarrow \infty)\}. \quad (2.12)$$

ψ は連続かつ非負で, $O_M = \{Q \in M \mid \psi(Q) = 0\}$ だから,

$$\Omega_G(O_M) = \{Q \in M \mid \psi(G^m(Q)) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)\}. \quad (2.13)$$

命題 2.5 次が成り立つ :

$$\Omega_G(O_M) = \{Q \in M \mid \psi(Q) < 1\}. \quad (2.14)$$

[証明] 命題 2.4 より, $\psi(G^m(Q)) = \psi(Q)^{2^m}$, $m = 1, 2, \dots$. 従って, $\psi(G^m(Q)) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) なる必要充分条件は $\psi(Q) < 1$. □

これで $\Omega_G(O_M)$ の形が具体的に得られた. 領域 $\Omega_G(O_M)$ の境界 $\partial\Omega_G(O_M)$ は実解析的 3次元多様体で, $(u, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ によって

$$(u, v) = \left(u, e^{i\theta} \exp\left(-\frac{\pi|u|^2}{4a^2}\right)\right). \quad (2.15)$$

のように径数付けられる. (u, θ) の変域を

$$0 \leq \operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u < 2a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (2.16)$$

に制限すると, これは 1対1対応を与える.

領域 $\Omega_F(O)$ については, 明らかに,

命題 2.6 次が成り立つ :

$$\Omega_F(O) = \Phi(\Omega_G(O_M)). \quad (2.17)$$

$\Omega_F(O)$ の境界 $\partial\Omega_F(O)$ は 3次元球面と同相である. S_j で円周 $\partial\Omega_F(O) \cap \{y/x = j\}$, $j = \infty, 0, \pm 1$ を表す. 写像 $\Phi|_{\partial\Omega_G(O_M)} : \partial\Omega_G(O_M) \rightarrow \partial\Omega_F(O)$ は $\cup_{j=\infty, 0, \pm 1} S_j$ を分岐集合とする被覆写像である. $\partial\Omega_F(O)$ は (u, θ) によって

$$(x, y) = \left(\sigma(u)^2 \exp\left(-\frac{\pi|u|^2}{4a^2}\right) e^{i\theta}, \sigma_2(u)^2 \exp\left(-\frac{\pi|u|^2}{4a^2}\right) e^{i\theta}\right) \quad (2.18)$$

のように径数表示される. (u, θ) の変域を (2.16) に制限すると, これは 2 対 1 の対応を与える. $\partial\Omega_F(O)$ は US_j 以外の点で実解析的であるが, US_j において角 (かど) を持っている

図 1 において, 弧 AB は

$$\begin{cases} x = \sigma(u)^2 \exp\left(-\frac{\pi u^2}{4a^2}\right) = u^2 + \dots \\ y = \sigma_2(u)^2 \exp\left(-\frac{\pi u^2}{4a^2}\right) = 1 - \frac{\pi u^2}{4a^2} + \dots \end{cases} \quad (0 \leq u \leq a) \quad (2.19)$$

で径数表示される. これより点 A における弧 AB の接線の傾きは

$$-\frac{\pi}{4a^2} = -\frac{8\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})} = -0.4567\dots \quad (2.20)$$

で与えられる.

註 2.1 第 1 節 註 1.3, (1.9) の f_1 に対応する写像 $F_1: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は

$$(X, Y) \rightarrow ((X - 2Y)^2, X^2) \quad (2.21)$$

である. いま, $\Psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$(x, y) \rightarrow (X, Y) = ((X - 2Y)^2, X^2), \quad (2.22)$$

で定めると, $(\mathbb{C}^2, F) \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{C}^2, F_1)$. 従って, $\Omega_{F_1}(O) = \Psi(\Omega_F(O))$ の形も具体的に表すことができる.

3 Böttcher の定理の高次元化

3.1 まず, 1 変数の Böttcher の定理とその証明を述べよう.

定理 3.1 (Böttcher) 原点 $0 \in \mathbb{C}$ の周りで正則な関数

$$f(z) = a_q z^q + a_{q+1} z^{q+1} + \dots \quad (q \geq 2, a_q \neq 0) \quad (3.1)$$

に対して, $z = 0$ の周りで正則かつ $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) \neq 0$ なる関数 $\varphi(z)$ で

$$\varphi(f(z)) = \{\varphi(z)\}^q \quad (3.2)$$

を満たすものが存在する. さらに, φ は 1 の $(q-1)$ 乗根倍を除いて一意的に定まる.

[証明] 充分小さい 0 の近傍 U において $\log\{f(z)/z^q\}$ の 1 価な分枝をとって $\alpha(z)$ とすると

$$f(z) = z^q e^{\alpha(z)} \quad (3.3)$$

と表される. 必要ならば U をさらに小さくにとって $f(U) \subset U$, かつ $\alpha(z)$ は U で有界としてよい. 条件を満たす関数 φ が存在するとしてその形を求めよう. 0 の周りの正則関数 $\psi(z)$ があって

$$\varphi(z) = ze^{\psi(z)} \quad (3.4)$$

の形に書ける. $\psi(z)$ は

$$h(z) + \psi(f(z)) \equiv q\psi(z) \pmod{2\pi i} \quad (3.5)$$

を満たす. 即ち, 整数 k があって

$$\psi(z) - \frac{1}{q}\psi(f(z)) = \frac{1}{q}(h(z) + 2k\pi i). \quad (3.6)$$

z を $f^{j-1}(z)$ で置き換えて, $1/q^{j-1}$ 倍すれば

$$\frac{1}{q^{j-1}}\psi(f^{j-1}(z)) - \frac{1}{q^j}\psi(f^j(z)) = \frac{1}{q^j}(h(f^{j-1}(z)) + 2k\pi i). \quad (3.7)$$

この (3.7) を $j = 1, 2, \dots$ について加えれば,

$$\psi(z) = \left\{ \frac{\alpha(z)}{q} + \frac{\alpha(f(z))}{q^2} + \dots + \frac{\alpha(f^j(z))}{q^{j+1}} + \dots \right\} + \frac{2k\pi i}{q-1} \quad (3.8)$$

を得る; ここで $q^{-j}\psi(f^j(z)) \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) および $q^{-1} + q^{-2} + \dots = (q-1)^{-1}$ を用いた. 従って φ は

$$\varphi(z) = \varepsilon^k z \exp \left\{ \frac{\alpha(z)}{q} + \frac{\alpha(f(z))}{q^2} + \dots + \frac{\alpha(f^j(z))}{q^{j+1}} + \dots \right\} \quad (3.9)$$

の形でなければならない. ここで ε は 1 の原始 $(q-1)$ 乗根で, $k = 0, 1, \dots, q-2$. これは U において well-defined であり, 要求された関数方程式を満たす.

この定理の高次元化が Hubbard-Papadopol [2] および Ushiki [3] によって与えられている. ここでは高次元化の 1 つの version として次の形の定理を与えよう:

定理 3.2 $H: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は q 次斉次正則写像:

$$H(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)) \quad (3.10)$$

とする. また $\alpha(x)$ を $x = 0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍で定義された正則関数として

$$F(x) = H(x)e^{\alpha(x)} = (h_1(x)e^{\alpha(x)}, \dots, h_n(x)e^{\alpha(x)}) \quad (3.11)$$

とする. このとき 0 の近傍で定義された \mathbb{C}^n の中への

$$\Phi(x) = xe^{\psi(x)} = (x_1e^{\psi(x)}, \dots, x_n e^{\psi(x)}) \quad (3.12)$$

(ここで $\psi(x)$ は O の近傍の正則関数) の形の正則写像 Φ で

$$\Phi(F(x)) = H(\Phi(x)), \quad (3.13)$$

満たすものが存在する. これは, 1 の $(q-1)$ 乗根倍を除いて一意的に定まる.

註 3.1 定理 3.1 は $n=1, H(z) = z^q$ の場合である.

証明 H の斉次性 (2.3) を用いて前定理と全く同様に証明できる. 写像 Φ は次で与えられる:

$$\Phi(x) = \varepsilon^k x \exp \left\{ \frac{\alpha(x)}{q} + \frac{\alpha(F(x))}{q^2} + \cdots + \frac{\alpha(F^j(x))}{q^{j+1}} + \cdots \right\}, \quad (3.14)$$

ここで $k = 0, \dots, q-2$. □

3.2 さて定理 3.2 を, 特別な形の正則写像 $F: \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ に応用しよう. \mathbf{P}^n の 1 点を O として, 写像 F は次の条件を満たすとする:

「点 O を通る任意の直線は O を通る直線に写る。」

\mathbf{P}^n の斉次座標 $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ を $O = [1 : 0 : \cdots : 0]$ なるように選び, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $[x_0 : x] = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ とすると F は次の形をとる:

$$[x_0 : x] \rightarrow [f_0(x_0, x) : f_1(x) : \cdots : f_n(x)]. \quad (3.15)$$

ここで, f_j はすべて q 次斉次式で, f_j ($j > 0$) は x_0 を含まない. F が不定点をもたないことから特に $f_0(1, 0) \neq 0$, 即ち f_0 は x_0^q の項を含むことに注意する.

正則写像 $H: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ を

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow H(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad (3.16)$$

で定める. こうすると (3.15) は

$$[x_0 : x] \rightarrow [f_0(x_0, x) : H(x)] \quad (3.15')$$

のように表される. また,

$$\Omega_F(O) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid F^m(P) \rightarrow O \ (m \rightarrow \infty)\}, \quad (3.17)$$

$$\Omega_H(O) = \{P \in \mathbf{C}^n \mid H^m(P) \rightarrow O \ (m \rightarrow \infty)\} \quad (3.18)$$

と定める. これらは O を含む開集合である. 命題 2.1 より, 領域 $\Omega_H(O)$ は完全円領域 $\subset \mathbf{C}^n$ である.

O の近傍で, 写像 F は

$$x \rightarrow \left(\frac{f_1(x)}{f_0(1, x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_0(1, x)} \right) = H(x)/f_0(x_0, x) \quad (3.19)$$

の形であるから, 前定理の条件を満たす. 従って O の近傍の正則写像 Φ_0 で $\Phi_0 \circ F = H \circ \Phi_0$ なるものが存在する.

さて, 次のように定義をする.

$$\Gamma = \{P \in \mathbf{P}^n \mid \frac{\partial f_0}{\partial x_0}(P) = 0\}. \quad (3.20)$$

定理 3.3 条件

$$\Omega_F(O) \cap \Gamma = \emptyset \quad (3.21)$$

が満たされるとき, Φ は双正則写像 $\Phi: \Omega_F(O) \rightarrow \Omega_H(O)$ に拡張される.

証明の前に, Γ の意味を明らかにしよう.

補題 3.4 O を通る任意の直線を L とするとき $F|L: L \rightarrow F(L)$ は q 対 1 の分岐被覆で, その *critical points* の集合は $(L \cap \Gamma) \cup \{O\}$ に一致する.

[証明] 直線 L は $\mathbf{P}^1 \ni s \rightarrow [s: \alpha_1: \dots: \alpha_n]$ で径数づけられる. ここで s は \mathbf{P}^1 の非斉次座標で, $s = \infty$ は O に対応する. また, 直線 $F(L)$ は $\mathbf{P}^1 \ni t \rightarrow [t: f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n): \dots: f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)]$ で径数づけられる. 従って $F|L$ は径数 s, t によって $s \rightarrow t = f_0(s, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ で表される. これは s の q 次多項式だから, 補題を得る.

[定理 3.3 の証明] 定理 3.2 より, O の近傍 $U_0 \subset \Omega_F(O), V_0 \subset \Omega_H(O)$ および双正則写像 $\Phi_0: U_0 \rightarrow V_0$ で $F(U_0) \subset U_0, H(V_0) \subset V_0$ かつ $\Phi_0 \circ F = H \circ \Phi_0$ なるものがとれる. ここで, O を通る任意の直線 L に対して $U_0 \cap L$ は単連結であると仮定してよい. $U_j = F^{-j}(U_0), V_j = H^{-j}(V_0)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) とおくと $U_j \subset U_{j+1}, \Omega_F(O) = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j, V_j \subset V_{j+1}, \Omega_H(O) = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$.

定理を証明するために, $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して, 次の (a), (b) を帰納的に示そう:

- (a) O を通る任意の直線 L について $U_j \cap L, V_j \cap L$ は単連結.
- (b) 双正則写像 $\Phi_j: U_j \rightarrow V_j$ で $\Phi_j \circ F = H \circ \Phi_j$, かつ $\Phi_j|_{U_{j-1}} = \Phi_{j-1}$ ($j > 0$) を満たすものが存在する.

いま, $j-1$ についてこれらの主張が証明されたとする. $\Phi_{j-1}: U_{j-1} \rightarrow V_{j-1}$ を $U_j \rightarrow V_j$ に拡張するには, 任意の O を通る直線 L について $\Phi_{j-1}|_{U_{j-1} \cap L}: U_{j-1} \cap L \rightarrow V_{j-1} \cap L$ が双正則写像 $U_j \cap L \rightarrow V_j \cap L$ に拡張できることを示せばよい. 次の図式を考えよう:

$$\begin{array}{ccccc} U_{j-1} \cap L & \subset & U_j \cap L & \xrightarrow{F} & U_{j-1} \cap L' \\ \Phi_{j-1} \downarrow & & \Phi_j \downarrow & & \Phi_{j-1} \downarrow \\ V_{j-1} \cap L & \subset & V_j \cap L & \xrightarrow{H} & V_{j-1} \cap L' \end{array} \quad (3.22)$$

ここで, $L' = F(L) = H(L)$. 図式において, $U_j \cap L \rightarrow U_{j-1} \cap L, V_j \cap L \rightarrow V_{j-1} \cap L$ は O へのみ分岐点をもつ q 葉の被覆面だから, $U_j \cap L, V_j \cap L$ は単連結である. $U_{j-1} \rightarrow V_{j-1}$ は丁度 q 通りの仕方で $U_j \rightarrow V_j$ に持ち上げることができる. このうちで, $U_{j-1} \cap L$ 上で Φ_{j-1} に一致するものが唯1つ定まる. これで Φ_j が確定する.

3.3 さて, 定理 3.3 の条件 (3.21) は F が H に充分近いときには成立することを示そう. まず記号を定める:

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2} \quad \text{ただし } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad (3.23)$$

\mathbb{P}^n の超平面 $\{x_0 = 0\}$ の " δ -近傍" を次で定める:

$$D_\delta = \{[x_0 : x] \in \mathbb{P}^n \mid |x_0| < \delta \|x\|\}. \quad (3.24)$$

命題 3.5 H を式 (3.16) で定まる正則写像とすると, 次のような定数 $\delta > 0$ および $\varepsilon_0 > 0$ が存在する: $f_0(x_0, x)$ が

$$|f_0(x_0, x) - x_0^q| < \varepsilon_0 \max\{|x_0|^q, \|x\|^q\} \quad (3.25)$$

なる q 次斉次多項式で, F が (3.15)' で定まる写像のとき, $F(D_\delta) \subset D_\delta$ および $D_\delta \cap \Omega_F(O) = \emptyset$ が成り立つ.

[証明] まず $\|H(x)\| \geq A\|x\|^q$ なる定数 $A > 0$ が存在することに注意する. δ を $0 < \delta < \min\{1, A^{1/(q-1)}\}$ なるようにとり, ε_0 を $0 < \varepsilon_0 < A\delta - \delta^q$ なるようにとる. $[x_0 : x] \in D_\delta$ のとき, $|x_0| \leq \delta \|x\|$ したがって $\max\{|x_0|, \|x\|\} = \|x\|$ が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} |f_0(x_0, x)| &\leq |x_0|^q + \varepsilon_0 \|x\|^q \leq (\delta^q + \varepsilon_0) \|x\|^q \\ &\leq \frac{1}{A} (\delta^q + \varepsilon_0) \|H(x)\| \leq \delta \|H(x)\|; \end{aligned} \quad (3.26)$$

すなわち $F([x_0 : x]) = [f_0(x_0, x) : H(x)] \in D_\delta$. □

定理 3.6 H を (3.16) で定まる正則写像とすると, 次のような定数 $\varepsilon_1 > 0$ が存在する: $f_0(x_0, x)$ が

$$|f_0(x_0, x) - x_0^q| < \varepsilon_1 \max\{|x_0|^q, \|x\|^q\} \quad (3.27)$$

なる q 次斉次多項式で F が (3.15)' で定まる写像のとき, $\Gamma \cap \Omega_F(O) = \emptyset$ が成り立つ.

[証明] δ を命題 3.5 のようにとる. 明らかに, $f_0(x_0, x)$ が x_0^q に十分近いとき, Γ は超平面 $\{x_0 = 0\}$ に十分近い. 従って, ε_1 を十分小さくとれば, 条件 (3.27) のもとで $\Gamma \subset D_\delta$ が成り立つ. □

註 3.2 $\Gamma \cap \Omega_F(O) = \emptyset$ が成り立つ他の場合は Fornaess-Sibony [1] に挙げられている. 次の写像を考える ([1] における f):

$$F : [x_0 : x_1 : x_2] \rightarrow [(x_1 - 2x_0)^2 : (x_1 - 2x_2)^2 : x_1^2]. \quad (3.28)$$

F に対応する H は

$$H : (x_1, x_2) \rightarrow ((x_1 - 2x_2)^2, x_1^2) \quad (3.29)$$

で与えられる. これは註 2.1 の (2.21) の写像に他ならない. F は定理 3.3 の条件を満たす. 実際, $\Gamma = \{x_1 - 2x_0 = 0\}$ は F の iteration によって

$$\Gamma = \{x_1 - 2x_0 = 0\} \Rightarrow \{x_0 = 0\} \rightarrow \{x_0 = x_2\} \Leftarrow \{x_0 = x_1\} \quad (3.30)$$

のように写される. 従って $\Gamma \cap \Omega_F(O) = \emptyset$. これから, $\Omega_F(O)$ と $\Omega_G(O)$ とが双正則であることがわかる. これは [1] の THEOREM 4.1 と 5.1 の別証明を与える.

4 $J_F = \mathbf{P}^2$ なる力学系

4.1 一般に, 射影直線の正則写像 $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ に対して, 射影平面の正則写像 $F : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ を以下のように構成することができる.

非特異 2 次曲線 $C \subset \mathbf{P}^2$ をとる. これを \mathbf{P}^1 と同一視すると, 正則写像 $f : C \rightarrow C$ が定まる. 点 $P \in \mathbf{P}^2$ に対して, $F(P)$ を次のように定める: P を通る C の接線を l_1, l_2 とし, 接点を Q_1, Q_2 とする ($P \in C$ のときは, $Q_1 = Q_2 = P$ とする). $f(Q_1), f(Q_2)$ における C の接線を m_1, m_2 とし, これらの交点を $F(P)$ と定める ($f(Q_1) = f(Q_2)$ のときは $F(P) = f(Q_1) = f(Q_2)$ とする).

この構成は次のように説明することもできる.

$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の位数 2 の自己同型 j を $j : (Q_1, Q_2) \rightarrow (Q_2, Q_1)$ で定める. j の不動点全体は対角集合 $\Delta = \{(Q, Q) | Q \in \mathbf{P}^1\}$. また, 商空間 $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) / \langle j \rangle$ は射影平面 \mathbf{P}^2 に双正則である. これから定まる写像 $\pi : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ は Δ の 2 葉の被覆で, 2 次曲線 $C = \pi(\Delta)$ を分岐集合とする. 正則写像 $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ に対して, $\hat{f} : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ を $\hat{f} = (f, f)$ で定めると, 正則写像 $F : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ で $F \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ なるものが定まる.

即ち $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \hat{f}) \rightarrow (\mathbf{P}^2, F)$.

次の命題は容易に示される. これより $J_F = \mathbf{P}^2$ なる例ができる.

命題 4.1 (1) $J_{\hat{f}} = (J_f \times \mathbf{P}^1) \cup (\mathbf{P}^1 \times J_f)$, $J_F = \pi(J_{\hat{f}})$.

(2) \hat{f} [resp. F] の反発周期点集合の閉包は $J_f \times J_f$ [resp. $\pi(J_f \times J_f)$].

(3) $J_f = \mathbf{P}^1 \iff J_{\hat{f}} = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \iff J_F = \mathbf{P}^2$.

4.2 上の構成を明示的に実行しよう. まず, 写像

$$\pi : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \ni ([\xi : \eta], [\xi' : \eta']) \rightarrow [x : y : z] \in \mathbf{P}^2 \quad (4.1)$$

は, (ξ, η) と (ξ', η') の対称双 1 次形式の組で与えられる. ここでは, 次のようにとる.

$$[x : y : z] = \pi([\xi : \eta], [\xi' : \eta']) = [\xi\xi' + \eta\eta' : \eta\eta' - \xi\xi' : \xi\eta' + \eta\xi'] \quad (4.2)$$

このとき $C = \pi(\Delta) = \{x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$.

(a) いま, f として第 1 節, (1.7) の写像をとろう. F を求めるために $[x : y : z]$ は (4.2) で与えられるものとし

$$([\xi_1 : \eta_1], [\xi'_1 : \eta'_1]) = \widehat{f}([\xi : \eta], [\xi' : \eta']) = ([2i\xi\eta : \eta^2 - \xi^2], [2i\xi'\eta' : \eta'^2 - \xi'^2]), \quad (4.3)$$

$$[x_1 : y_1 : z_1] = \pi([\xi_1 : \eta_1], [\xi'_1 : \eta'_1]) = [\xi_1\eta'_1 + \eta_1\xi'_1 : \eta_1\eta'_1 - \xi_1\xi'_1 : \xi_1\eta'_1 + \eta_1\xi'_1] \quad (4.4)$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1\eta'_1 + \eta_1\xi'_1 = (2i\xi\eta)(2i\xi'\eta') + (\eta^2 - \xi^2)(\eta'^2 - \xi'^2) \\ &= (\eta\eta' - \xi\xi')^2 - (\xi\eta' + \eta\xi')^2 = y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

y_1, z_1 についても同様に計算して, F は次で与えられることがわかる:

$$F : [x : y : z] \rightarrow [y^2 - z^2 : 2x^2 - y^2 - z^2 : 2iyz]. \quad (4.6)$$

命題 4.1 より F の Julia 集合は \mathbf{P}^2 全体である.

さて, 第 1 節で見たように (\mathbf{P}^1, f) は楕円曲線 E 上の力学系 (E, g) によって dominate される: $(E, g) \xrightarrow{\varphi} (\mathbf{P}^1, f)$. 従って

$$(E \times E, \widehat{g}) \xrightarrow{\widehat{\varphi}} (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \widehat{f}), \quad (4.7)$$

ここで $\widehat{g} = (g, g), \widehat{\varphi} = (\varphi, \varphi)$. 従って $\Phi = \pi \circ \widehat{\varphi}$ とおくと

$$(E \times E, \widehat{g}) \xrightarrow{\Phi} (\mathbf{P}^2, F). \quad (4.8)$$

$\Phi : (u, v) \rightarrow [x : y : z]$ を具体的に書き表してみよう. 写像 f は斉次座標で (1.8) のように表されるから, 公式 (A.18), (A.19), (A.17) を使って, 次のようになる:

$$\Phi(u, v) = [\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) : \sigma_2(u+iv)\sigma_2(u-iv) : \sigma(u+iv)\sigma(u-iv)]. \quad (4.9)$$

(b) 力学系 (\mathbf{P}^2, F_1) を

$$F_1 : [X : Y : Z] \rightarrow [(Y+Z-X)^2, (Z+X-Y)^2, (X+Y-Z)^2] \quad (4.10)$$

で定める. 正則写像 $\Psi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ を

$$\Psi : [x : y : z] \rightarrow [X : Y : Z] = [x^2 : y^2 : x^2 - z^2], \quad (4.11)$$

で定めると, $(P^2, F) \xrightarrow{\Psi} (P^2, F_1)$. 従って, F_1 の Julia 集合は P^2 全体である.

$\Phi_1 = \Psi \circ \Phi$ とおくと $(E \times E, \hat{g}) \xrightarrow{\Phi} (P^2, F_1)$. 写像 $\Phi_1: E \times E \rightarrow P^2$ も具体的に書き表せる:

$$\Phi_1(u, v) = [\{\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)\}^2 : \{\sigma_2(u+iv)\sigma_2(u-iv)\}^2 : \{\sigma_2(\lambda u)\sigma_2(\lambda v)\}^2]. \quad (4.12)$$

この最後の式は次のようにして得られる:

$$\begin{aligned} Z &= x^2 - z^2 \\ &= \{\sigma_2(u)^2\sigma_2(v)^2 + \sigma(u)\sigma(v)^2\}^2 - \{\sigma(u)^2\sigma_2(v)^2 + \sigma(u)^2\sigma(v)^2\}^2 \\ &= \{\sigma_2(u)^4 - \sigma(u)^4\}\{\sigma_2(v)^4 - \sigma(v)^4\} \\ &= \{\sigma_2(\lambda u)\sigma_2(\lambda v)\}^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここで (A.15) を用いた.

註 4.1 F, F_1 は critically finite である. F の critical set は 3 つの成分 $\{x=0\}, \{y+iz=0\}, \{y-iz=0\}$ からなる. その軌道は次のようになる:

$$\begin{aligned} \{x=0\} &\Rightarrow \{x^2 - y^2 - z^2 = 0\} \leftrightarrow, \\ \{y+iz=0\} &\Rightarrow \{x+z=0\} \searrow \{x+y=0\} \rightarrow \{x-y=0\} \leftrightarrow, \\ \{y-iz=0\} &\Rightarrow \{x-z=0\} \nearrow \end{aligned}$$

また, F_1 の critical set は 3 つの成分 $\{Y+Z-X=0\}, \{Z+X-Y=0\}, \{X+Y-Z=0\}$ からなる. その軌道は次のようになる:

$$\begin{aligned} \{Y+Z-X=0\} &\Rightarrow \{X=0\} \rightarrow \{Y-Z=0\} \leftrightarrow, \\ \{Z+X-Y=0\} &\Rightarrow \{Y=0\} \rightarrow \{Z-X=0\} \leftrightarrow, \\ \{X+Y-Z=0\} &\Rightarrow \{Z=0\} \rightarrow \{X-Y=0\} \leftrightarrow. \end{aligned}$$

補註

ここでは, 特別な基本周期 $2a, 2ai$ を持つシグマ関数とコシグマ関数について, 必要な事柄をまとめておこう.

A.1 正定数 a は第 1 節で定義したものとして, $2\omega_1 = 2a, 2\omega_3 = 2ai$ で生成される格子を $\Lambda = \{2(m+ni)a \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ とする. シグマ関数 $\sigma(u)$ は次の無限乗積で定義される整関数である:

$$\sigma(u) = u \prod_{w \in \Lambda'} \left(1 - \frac{1}{w}\right) \exp\left(\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}\right), \quad \Lambda' = \Lambda - \{0\}.$$

次が成り立つ：

$$\left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right)' = \wp(u). \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma(u) \text{ は } u \equiv 0 \pmod{\Lambda} \text{ に 1 位の零点をもつ.} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma(-u) = \sigma(u) \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma(iu) = i\sigma(u) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{cases} \sigma(u+2a) = -e^{\frac{\pi}{2}(\frac{u}{a}+1)}\sigma(u), \\ \sigma(u+2ai) = -e^{\frac{\pi}{2}(\frac{u}{ai}+1)}\sigma(u) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma(u) = u - \frac{1}{60}u^5 + \dots \quad (u=0 \text{ の周りで}) \quad (\text{A.6})$$

上の性質のうち、(A.1-3) は一般の周期のシグマ関数について成り立つ。(A.4) は無限乗積の形からわかる。(A.5) を示すには、一般に、 $2\omega_1, 2\omega_3$ を基本周期とするシグマ関数について、関係式

$$\sigma(u+2\omega_r) = -e^{2\eta_r(u+\omega_r)}\sigma(u) \quad (r=1,3)$$

が成り立つことに注意する。ここで η_1, η_3 は Legendre の関係式 $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pi i/2$ を満たす。 $\omega_1 = a, \omega_3 = ai$ のとき (A.4) から容易に判るように $\eta_3 = -i\eta_1$ だから $\eta_1 = \pi/(4a)$, $\eta_3 = \pi/(4ai)$ を得る。(A.6) は (A.1) と \wp の Laurent 展開から導かれる。

A.2 $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3 = -(1+i)a$, $\eta_2 = -\eta_1 - \eta_3 = (i-1)\pi/(4a)$ とおく。コシグマ関数 $\sigma_k(u)$ は

$$\sigma_k(u) = \frac{1}{\sigma(\omega_k)} e^{-\eta_k u} \sigma(u + \omega_k), \quad k=1,2,3.$$

で定義される整関数である。次が成り立つ：

$$\sigma_k(u) \text{ は } u \equiv \omega_k \pmod{\Lambda} \text{ に 1 位の零点をもつ.} \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_k(-u) = \sigma_k(u). \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_2(iu) = \sigma_2(u), \quad \sigma_1(iu) = \sigma_3(u). \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{cases} \sigma_k(u+2a) = e^{\frac{\pi}{2}(\frac{u}{a}+1)}\sigma_k(u), \\ \sigma_k(u+2ai) = e^{\frac{\pi}{2}(\frac{u}{ai}+1)}\sigma_k(u) \end{cases} \quad (k=1,2,3). \quad (\text{A.10})$$

$$\wp(u) = \left\{\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right\}^2 + 1 = \left\{\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right\}^2 - 1. \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_2(u)^2 - \sigma(u)^2 = \sigma_1(u)^2, \quad \sigma_2(u)^2 + \sigma(u)^2 = \sigma_3(u)^2. \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_2(u) = 1 + \dots \quad (u=0 \text{ の周りで}) \quad (\text{A.13})$$

これらの性質のうち (A.7-10) は定義より容易に確かめられる. (A.5), (A.10) から はすべて同じ関係式

$$f(u+2a) = e^{\pi(\frac{u}{a}+1)} f(u), \quad f(u+2ai) = e^{\pi(\frac{u}{ai}+1)} f(u), \quad (*)$$

を満たすこと, 従ってこれらの比は Λ を周期とする楕円関数であることに注意する. $\wp(a) = 1, \wp(ai) = -1, \wp((1+i)a) = 0$ より (A.11), (A.12) が確かめられる. (A.13) は $u=0$ における $\wp(u), \sigma(u)$ の展開から得られる.

A.3 $\lambda = 1+i$ とおくととき, 次の乗法公式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda u) &= \lambda \sigma(u) \sigma_2(u), & \sigma_2(\lambda u) &= \sigma_1(u) \sigma_3(u), \\ \sigma_1(\lambda u) &= \sigma_2(u)^2 - i \sigma(u)^2, & \sigma_3(\lambda u) &= \sigma_2(u)^2 + i \sigma(u)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma(\lambda u)^2 = 2i \sigma(u)^2 \sigma_2(u)^2, \quad \sigma_2(\lambda u)^2 = \sigma_2(u)^4 - \sigma(u)^4. \quad (\text{A.15})$$

(A.14) の最初の 2 式を示すには, 両辺が関係式 (*) を満たすからその比は楕円関数になること, 両辺の零点の位置が一致すること, $u=0$ における展開の最初の項が一致することに注意すればよい. これよりただちに (A.15) を得る. \wp 関数の乗法公式 (命題 1.2) は (A.11), (A.15) から導かれる. (A.14) の第 3 式を示すには (A.11), (A.15) より

$$\sigma_1(\lambda u)^2 = \sigma_2(\lambda u)^2 - \sigma(\lambda u)^2 = \{\sigma_2(u)^2 - i \sigma(u)^2\}^2$$

に注意する. この平方根で $u=0$ のとき値 1 となる方をとれば, 求める式を得る. 第 4 式も同様.

最後に次の加法公式を挙げる:

$$\sigma(u+v)\sigma(u-v) = \sigma(u)^2 \sigma_2(v)^2 - \sigma_2(u)^2 \sigma(v)^2. \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma(u+iv)\sigma(u-iv) = \sigma(u)^2 \sigma_2(v)^2 + \sigma_2(u)^2 \sigma(v)^2. \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) = \sigma_2(u)^2 \sigma_2(v)^2 + \sigma(u)^2 \sigma(v)^2. \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_2(u+iv)\sigma_2(u-iv) = \sigma_2(u)^2 \sigma_2(v)^2 - \sigma(u)^2 \sigma(v)^2. \quad (\text{A.19})$$

これらの式はシグマ関数の一般の加法公式から導くことができるが, 次のようにしてもよい: 例えば (A.18) を示すには, まず, (A.14), (A.9) から

$$\sigma_2(2u) = \sigma_2(u)^4 + \sigma(u)^4 \quad (\text{A.20})$$

が成り立つことに注意する. v を固定して (A.18) の左辺を $f(u)$, 右辺を $g(u)$ とおくと, $f(u), g(u)$ は同じ関係式 (*) を満たす. また, $f(u)$ は Λ の基本周期平行四辺形の中で 2 個の零点をもつ. 従って, $f(u)/g(u)$ は定数でなければ 2 位の楕円関数である. ところが (A.20) より $u=0, \pm v$ において $f(u), g(u)$ の値が一致するから, $f(u)/g(u)$ は 3 点で値 1 をとる. 従って $f(u)/g(u) \equiv 1$. 次に (A.9) を用いれば (A.19) が得られる.

参考文献

- [1] J. Fornæss and N. Sibony, Critically Finite rational maps on \mathbf{P}^2 , preprint.
- [2] J. Hubbard and P. Papadopol, Superattractive fixed points in \mathbf{C}^n , preprint.
- [3] S. Ushiki, Böttcher's theorem and super-stable manifolds for multidimensional complex dynamical systems, preprint.