数理解析研究所講究録
第815巻 1992年 190-193

Nash関数の重要な問題

(Important problems on Nash functions)

名大養 塩田昌弘 (Masahiro Shiota)

定義. $\mathbb{R}^n$に含まれている, semialgebraicなC^∞多様体をNash多様体とよぶ. グラフがsemialgebraicなNash多様体上のC^∞関数をNash関数とよぶ.

記号. Mを常にNash多様体とする. $\mathcal{N}$をM上のNash関数の芽の層とする. $\mathcal{O}$を実解析関数の芽の層とする. $\mathcal{N}(M)$と$\mathcal{O}(M)$をそれぞれM上のNash関数と実解析関数の環とする.

定義. $\mathcal{I}$を$\mathcal{N}$イデアルの連接層とする. もし連接層$\mathcal{I}_i$, $i=1,2,\dots$が存在して, $\mathcal{I}=\bigcap_i \mathcal{I}_i$となり, 各$i$に対して$\bigcap_{j\neq i}\mathcal{I}_j\neq\mathcal{I}$となるとき, $\mathcal{I}$を無限とよぶ. 無限でない$\mathcal{I}$を有限とよぶ. もし, Mの有限semialgebraic開被覆$\{U_i\}$が存在して, 各$\mathcal{I}|_{U_i}$が$H^0(U_i, \mathcal{I}|_{U_i})$で生成されているとき, $\mathcal{I}$を強有限とよぶ.

注意. Mがコンパクトのとき, 常に連接層は強有限. 一般に強有限層は有限. 有限でない連接層の例は$M=\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$の台$=\mathbb{Z}$.

Nash関数及びその層に関する色々な問題が多くの人達によって扱われてきた．しかし，重要な問題は決定的には解かれていない．これは偶然ではない．次に示す様に，その重要な問題は同値である．

予想1．$\mathcal{N}(M)$の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して$\mathfrak{p}\mathcal{O}(M)$は$\mathcal{O}(M)$の素イデアル．

予想2．$\mathcal{N}$イデアルの有限層$\mathcal{I}$は$H^0(M,\mathcal{I})$によって生成される．

予想3．同上の$\mathcal{I}$に対して，自然な準同型

$$H^0(M,\mathcal{N})\longrightarrow H^0(M,\mathcal{N}/\mathcal{I})$$

は全射．

予想4．$\mathcal{N}(M)$の元fと$\mathcal{O}(M)$の元f_1とf_2が$f=f_1f_2$を満たすとする．すると，$\mathcal{N}(M)$の元g_1とg_2，$\mathcal{O}(M)$の元φ_1とφ_2が存在して，$\varphi_1\varphi_2=1$，$f_1=\varphi_1 g_1$，$f_2=\varphi_2 g_2$とできる．

もし予想2と3で既約な$\mathcal{I}$のみを扱うとき，それぞれ予想2^r，3^rと言うことにする．予想1で$\mathfrak{p}$の高さが1のとき，予想2と3で各茎$\mathcal{I}_x$が単項イデアルのとき，それぞれ予想1_1，2_1，3_1とよぶ．

注意[S]．(1) 予想1は局所的には正しい．すなわち，xをMの点，$\mathfrak{p}$を$\mathcal{N}_x$の素イデアルとするとき，$\mathfrak{p}\mathcal{O}_x$は素イデア

ル．

(2) 予想2と3でMがコンパクトでも$\mathcal{J}$が連接$\mathcal{N}$加群なら反例がある．

(3) 予想3で，Mが0次元でないなら$H^1(M,\mathcal{N})\neq 0$．

(4) 予想4は局所的に正しい．予想4はNash関数のNash分解は解析分解と同値だといっている．

(5) 予想1と4が正しければ，Nash関数に関する問題のいくつかは実解析関数の問題に帰着できる．多くの場合，実解析の場合の方が容易．Cartanの定理AとBが解析関数の層理論の基礎であったことから，もし予想2と3が正しければNash関数の層理論が構成できることがわかる．

<u>定理1</u>．予想1と2^rと3^rは同値．予想1_1と2_1と2_1^rと3_1と3_1^rと4は同値．もし予想1が正しければ，2と3は強有限な$\mathcal{J}$に対して成り立つ．

<u>定理2</u>．予想は次の場合に成り立つ．

(1) 1で$\mathfrak{p}$のコハイト$\leqq 1$．

(2) 1で$\mathfrak{p}$が実（すなわち，$\mathfrak{p}$は$\mathfrak{p}^{-1}(0)$上で0になるNash関数全体），かつ$\mathfrak{p}^{-1}(0)$の特異点は孤立点のみ．

(3) 2と3で$\mathcal{J}$がいたる所コハイト$\leqq 1$．

(4) 2で各茎 $\mathcal{I}_x$ が実，かつ $p^{-1}(0)$ の Zariski 閉包と M の共通部分の特異点は孤立点のみ．

(5) 4で $f^{-1}(0) \cap \mathrm{Sing}\, f$ は孤立点のみ．

(6) 1で $\mathcal{N}(M)/\mathfrak{p}$ が正規．2と3で各茎 $\mathcal{N}_x/\mathcal{I}_x$ が正規．

(7) 1, 2, 3, 4で M の次元が $\leqq 2$．

参照

[B-C-R] J. Bochnak - M. Coste - M. F. Roy, Géométrie Algébrique Réelle, Ergeb. Math. 12, Springer, 1987.

[S] M. Shiota, Nash manifolds, Springer Lecture Notes in Math., 1269, 1987.

Department of Mathematics
College of General Education
Nagoya University
Nagoya, Japan