数理解析研究所講究録
第 816 巻 1992 年 46-70

可微分写像群及び無限対称群のユニタリ表現について

京大理　平井 武 (Takeshi HIRAI)

序. M を $C^{(r)}$-級微分多様体とする ($1 \leq r \leq \infty$)。M 上の $C^{(r)}$-級微分同相写像全体を $\mathrm{Diff}(M)$ で表わし, その部分群である

$$G = \mathrm{Diff}_0(M) \equiv \{ g \in \mathrm{Diff}(M) \,;\, \mathrm{supp}(g) \text{ compact} \}$$

の表現について論ずるのが, この論文の主目的である。ここに, $\mathrm{supp}(g) = \mathrm{cl}\{ p \in M \,;\, gp \neq p \}$, $\mathrm{cl}\{\ \}$ は閉包である。G に, $M \ni p \mapsto gp \in M$ の各階の導函数のコンパクト一様収束により位相を入れると, 局所コンパクトではないが位相群となる。我々の, G の表現の構成には, 無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ の任意の既約ユニタリ表現 (=IUR) が用いられるが, これについてはここで深入りする余裕はないので文献 [6] を参照されたい。但し, $\mathfrak{S}_\infty$ とは, 自然数全体 N の上の有限置換全体のなす離散群である。

これらの主題についての歴史的なことは割愛するが,

そのかわりとして，参考文献をやや詳しくしておいた。

この論文では，M は連結で非コンパクトとする。また $\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ で，$\mathbb{N}$ 上の置換全体のなす群を表わす。

§1. 測度空間

この§では，G が準不変的に働く測度空間を作る。Gelfand 達は [20] で，M 上の点の configuration（配位）のなす空間 Γ_M の上に Poisson 測度等を考えたが，ここで作る測度は本質的には "ordered configuration" の空間上に乗っていることが分る。

1.1. M 上の測度は各局所座標近傍に於て，その座標系に関する Lebesgue 測度と同値であるとき L-測度と呼ばれる。M 上の測度の系 $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で次の条件を満たすものを考える。

(M1) 各 μ_i は L-測度である。

(M2) M のコンパクト部分集合 K をとるとき，K の任意の可測分割 $K=\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ に対し，定数 $c_K>0$ があって

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(K_i) \leqslant c_K.$$

（注）M の可測集合 B に対し，その可測分割 $B=\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ に関する $\sup\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(B_i)\}$ をとって，$\mu_\infty(B)=\sup\{\sum_i \mu_i(B_i)\}$ とおくと，μ_∞ は M 上の測度になる。これを $\sup_i \mu_i$ と書く。すると，条件 (M2) は次と同値である。

(M2') $\quad (\sup_i \mu_i)(K) < \infty \quad (\forall K \subset M$, コンパクト$)$.

<u>1.2. 可測構造</u> $X = \prod_{i\in N} M_i$, $M_i = M$, には G が左から作用し, $\tilde{\mathfrak{S}}_\infty \supset \mathfrak{S}_\infty$ が右から作用する; $x = (x_i)_{i\in N} \in X$ に対し

$$gx = (gx_i)_{i\in N}, \quad x\tau = (x_{\tau(i)})_{i\in N} \quad \begin{pmatrix} g\in G \\ \tau\in\tilde{\mathfrak{S}}_\infty \end{pmatrix}.$$

さて, M の Borel 可測集合全体を $\mathfrak{M}_M$, X の直積可測構造における可測集合全体を $\mathfrak{M}_X$ と書く。X の直積部分集合 $E = \prod_{i\in N} E_i$, $E_i \subset M_i$, が 次の条件を満たすとき μ-unital であると言う。

(U1) $\quad E_i \in \mathfrak{M}_M$ は互に素で, $\mu_i(E_i) > 0 \ (\forall i)$.

(U2) $\quad \sum_{i\in N} |1 - \mu_i(E_i)| < \infty$.

<u>定義 1.1.</u> $E = \prod E_i$, $E' = \prod E'_i$ を μ-unital とする。E と E' が μ-<u>cofinal</u> (記号: $E \overset{\mu}{\sim} E'$, 又は, $E \sim E$) であるとは

(CF) $\quad \sum_{i\in N} \mu_i(E_i \ominus E'_i) < \infty \quad$ ($E_i \ominus E'_i$ は対称差)

を満たすことであり, <u>strongly cofinal</u> (記号: $E \approx E'$) とは

(SCF) $\quad i \gg 0$ に対して, $\mu_i(E_i \ominus E'_i) = 0$,

を満たすことである。

いま, μ-unital な E を1つ固定して,

$$\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(\mu, E) \equiv \{E' \ \mu\text{-unital};\ E' \overset{\mu}{\sim} E\}$$

と置く。この集合族 $\mathcal{E}(E)$ から生成された σ-ring

を $\mathfrak{M}(E)=\mathfrak{M}(\mu, E)$ と書く。但し，集合族 $\mathfrak{R}$ が σ-ring であるとは

(i) $A_n \in \mathfrak{R}\ (n=1,2,\cdots) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathfrak{R}$,

(ii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}$,

を満たすことである。σ-ring 上の測度についても，Radon-Nykodim の定理など，基本的なところは，問題なく成立する。

補題1.1. $\mathfrak{M}(E)$ の元は，$\mathfrak{M}_X$ の元であって，可算個の $\mathcal{E}(E)$ の元によってひふくされるものである。

補題1.2. (i) $E'=\prod_{i\in N} E_i' \in \mathcal{E}(E)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, $g\in G$, に対し，$E'\sigma \equiv \prod_{i\in N} E'_{\sigma(i)}$, $gE' \equiv \prod_{i\in N} gE_i'$, とおくと

$$E'\sigma \simeq E', \quad gE' \sim E'.$$

(ii) 集合族 $\mathcal{E}(E)$，従って $\mathfrak{M}(E)$ は $\mathfrak{S}_\infty$-不変，かつ G-不変である。

(証) ここでは，$gE'\sim E'$ を証明する。$K=\mathrm{supp}(g) \equiv cl\{p\in M;\ gp\neq p\}$，とおくと

$$\mu_i(gE_i')=\mu_i[(gE_i'\cap K)+(E_i'\setminus K)]$$

$$\therefore \sum_i \mu_i[(gE_i')\ominus E_i'] \leqq \sum_i \mu_i(gE_i'\cap K)+\sum_i \mu_i(E_i'\cap K)$$

$$\leqq 2C_K \quad \text{(仮定(M2)による)} \quad //$$

定義1.2. M の点集合 γ が configuration であるとは，

γ が M に集積点を持たないことである。また $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in X$ が (infinite) ordered configuration であるとは，点集合 $\gamma_x\equiv\{x_i;i\in\mathbb{N}\}$ が configuration であることである。

M の infinite configuration の全体を Γ_M，ordered configuration の全体を $\tilde{X}$ と書く。

$$\tilde{X}\ni x\longmapsto\gamma_x\in\Gamma_M\cong\tilde{X}/\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$$

は $\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ をファイバーとする主ファイバーバンドルである。

この Γ_M 上に，$\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ の既約ユニタリ表現 (=IUR) に付随したベクトルバンドルを考えて Γ_M 上の Poisson 測度 P_m (m は M 上の無限 L-測度) に関する L^2-section のなす Hilbert 空間上に自然に出来た G の表現が既約であることを示したのが [20] である。

我々がここでやろうとしているのは，かいつまんで言えば $\Gamma_M\cong\tilde{X}/\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ のかわりに $\Omega_M=\tilde{X}/\mathfrak{S}_\infty$ をとり，Ω_M 上に $(\mu,\mathfrak{M}(E))$ から測度を作り，$\mathfrak{S}_\infty$-主ファイバーバンドル $\tilde{X}\to\Omega_M$ と $\mathfrak{S}_\infty$ の IUR に付随するベクトルバンドルから，G の IUR を作ろうとするものである。ところが，Ω_M は Γ_M と異なって，位相的には特異で病的であるので，可測構造のみを取扱わねばならない。しかし，こうして得られた G の IUR の族は非

常に大きく，例えば $L^2(M, m)$ 上の G の自然表現 T をとったとき，T の無限テンソル積は（例外的な場合を除いて）上記のIURの直積分に分解される。

1.3. 測度空間. 可測空間 $(\mathfrak{X}, \mathcal{M}(E))$ の上に，M 上の測度の系 $\mu = (\mu_i)_{i\in N}$ から出発して測度を作る。まず $E' = \prod_{i\in N} E_i' \in \mathcal{E}(E)$ をとる。$c_i = \mu_i(E_i')$ とおくと，$0 < \prod_{i\in N} c_i < \infty$ である。Kolmogorovの拡張定理により，直積空間 $E' = \prod_i E_i'$ の上に確率測度 $(c_i^{-1}\mu_i)|E_i'$ の直積が一意的に存在する。従って $\mu_i|E_i'$ の直積 $\nu_\mu^{E'}$ も存在する。そこで任意の $B \in \mathcal{M}(E)$ を考えると，補題1.1により，可算個の $E^{(k)} \in \mathcal{E}(E)$, $k \in N$, によりひふくされる。$\nu_\mu^{E^{(k)}}$ 達が互に consistent なので，

$$\nu_{\mu,E}(B) \equiv \sum_k \nu_\mu^{E^{(k)}}(B_k), \quad B_k \equiv B \cap \left(E^{(k)} \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} E^{(l)}\right),$$

と置けば，$\nu_{\mu,E}$ は $\mathcal{M}(E)$ 上の測度である。

命題1.3. (i) $E \sim F$ とすると，$\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(F)$，かつ

$$\nu_{\mu,E} = \nu_{\mu,F}.$$

(ii) $E \not\sim F$ とすると，$\forall B \in \mathcal{M}(E) \cap \mathcal{M}(F)$ に対し，

$$\nu_{\mu,E}(B) = \nu_{\mu,F}(B) = 0.$$

これにより，μ-unital 集合 E の各同値類 $[E]$ に対して，

それぞれ互に素な測度 $\nu_{\mu,E}$ が構成された。

<u>注意</u> $(\mathfrak{X}, \mathcal{M}(E), \nu_{\mu,E})$ は次の意味で σ-有限である：
$\forall B \in \mathcal{M}(E)$, $\exists B_n \in \mathcal{M}(E)$, $n=1,2,\cdots$, s.t.

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad \nu_{\mu,E}(B_n) < \infty \ (\forall n)$$

さて，$\tilde{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{X}$ を ordered configuration 全体のなす空間とする。次は我々の議論にとって基本的である．

<u>命題 1.4.</u> $\mathfrak{X}$ 上の測度 $\nu_{\mu,E}$ は次の意味で $\tilde{\mathfrak{X}}$ の上に乗っている：$\forall B \in \mathcal{M}(E)$ に対し，$B \cap \tilde{\mathfrak{X}}$ はまた $\mathcal{M}(E)$ の元であって

$$\nu_{\mu,E}(B) = \nu_{\mu,E}(B \cap \tilde{\mathfrak{X}}).$$

測度 $\nu_{\mu,E}$ のこの性質と，次で述べる $\mathfrak{S}_\infty$-準不変性とから，$\Omega_M = \tilde{\mathfrak{X}}/\mathfrak{S}_\infty$ 上に"ベクトル値 L^2-空間"が定義できることとなる。

<u>1.4. 準不変性.</u> ここでは，$\nu_{\mu,E}$ の $\mathfrak{S}_\infty$ および G_T に関する準不変性を主張する。$\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ に対し，

$\mathrm{supp}(\sigma) \equiv \{i \in \mathbb{N} \,;\, \sigma(i) \neq i\}$ とおく。

<u>定理 1.5.</u> (i) 測度 $\nu_{\mu,E}$ は $\mathfrak{S}_\infty$-準不変である：$\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, $B \in \mathcal{M}(E)$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$ に対し，

$$(1.1) \qquad \frac{d\nu_{\mu,E}(x\sigma)}{d\nu_{\mu,E}(x)} = \prod_{i \in \mathrm{supp}(\sigma)} \frac{d\mu_{\sigma(i)}(x_i)}{d\mu_i(x_i)}.$$

(ii) 測度 $\nu_{\mu,E}$ は G_T-準不変である：$g \in G_T$ に対し，

(1.2) $$\frac{d\nu_{\mu,E}(gx)}{d\nu_{\mu,E}(x)} = \prod_{i\in N} \frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)} \qquad ({}^\forall B \in \mathfrak{B}(E) \text{ の上})$$

(∵) ここでは(ii)のみを証明する。そのために B として $E'=\prod_{i\in N} E_i' \in \mathcal{E}(E)$ をとって E' 上で2つの直積測度を比較するのに角谷の定理[12]の拡張を適用する。比較したいのは $\prod_i(\mu_i|E_i')$ と $\prod_i(\mu_i^g|E_i')$ とである。但し、$\mu_i^g(C)=\mu_i(gC)$ ($C\in\mathfrak{B}_{M}$)。後でも引用するので角谷の定理を述べておく。

補題1.6. 測度空間 (m_i, X_i), (m_i', X_i), $i\in N$, が $\prod_i m_i(X_i)<\infty$, $\prod_i m_i'(X_i)<\infty$, を満たし、$m_i \sim m_i'$ (${}^\forall i$) とする。
［互に絶対連続］

$$R(m_i, m_i') \equiv \int_{X_i} \sqrt{\frac{dm_i'(t)}{dm_i(t)}}\, dm_i(t)$$

とおく。$\prod_{i\in N} R(m_i, m_i') > 0$, $=0$, に従って $\prod_i X_i$ 上の直積測度 $\prod_i m_i$, $\prod_i m_i'$ は互に絶対連続、もしくは、互に素である。さらに、前者の場合の密度函数は次で与えられる: $x=(x_i)_{i\in N} \in \prod_i X_i$ に対し

$$\frac{d(\prod_i m_i')(x)}{d(\prod_i m_i)(x)} = \prod_{i\in N} \frac{dm_i'(x_i)}{dm_i(x_i)} \qquad \left(\text{右辺は } x \text{ につき概収束}\right)$$

さて、もとにもどって、$X_i \to E_i'$, $m_i \to \mu_i|E_i'$, $m_i' \to \mu_i^g|E_i'$, ととる。$K=\mathrm{supp}(g)$ とおくと $gK=K$.

$$R(m_i,m_i') = \int_{E_i'} \sqrt{\frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)}}\, d\mu_i(x_i) = \int_{E_i'\setminus K} d\mu_i(x_i) + \int_{E_i'\cap K} \sqrt{\frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)}}\, d\mu_i(x_i)$$

$$\therefore\ |\mu_i(E_i') - R(m_i, m_i')| \leqq \mu_i(E_i' \cap K) + \left(\mu_i(E_i' \cap K)\cdot \mu_i(gE_i' \cap K)\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ \sum_i |\mu_i(E_i') - R(m_i, m_i')|$$
$$\leqq \sum_i \mu_i(E_i' \cap K) + \left(\sum_i \mu_i(E_i' \cap K)\right)^{1/2} \left(\sum_j \mu_j(gE_i' \cap K)\right)^{1/2}$$
$$\leqq 2C_K < \infty \qquad (\text{仮定}(M2)\text{による}).$$

すると，$\prod_i \mu_i(E_i')$ が収束することから，$\prod_i R(m_i, m_i')$ も収束することが分り，(ii) の証明が終る。

§2. $G = \mathrm{Diff}_0(M)$ の表現の構成

2.1. 条件(M1)，(M2)を満たす測度系 $\mu = (\mu_i)_{i\in N}$，μ-unital 集合 $E = \prod_{i\in N} E_i$，および $\mathfrak{S}_\infty$ の IUR $(\pi, V(\pi))$ をとる。ここに $V(\pi)$ は π の表現空間を表わす。$\Sigma = (\mu, E; \pi)$ とおく。測度空間 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M}(E), \nu_{\mu,E})$ をとり，主ファイバーバンドル $\tilde{\mathfrak{X}} \to \Omega_M = \tilde{\mathfrak{X}}/\mathfrak{S}_\infty$ に対して，$(\pi, V(\pi))$ に associate したベクトルバンドルの L^2-section をとって Hilbert 空間を作る。その上に G の表現を与える。我々は Hilbert 空間の2つの実現を与えるが，それぞれに役に立つ。はじめに与える形は G の表現の既約性・同値性をしらべるのに適している。まず，$\mathfrak{X}$ 上の $V(\pi)$-値函数 $f(x)$ に対し，形式的に $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ 及び $g \in G$ の作用を次で与える：

$$(2.1)\quad R_\Sigma(\sigma) f(x) = \sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(x\sigma)}{d\nu_{\mu,E}(x)}} \cdot \pi(\sigma)\left(f(x\sigma)\right),$$

$$(2.2)\quad T_\Sigma(g)f(x) = \sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(g^{-1}x)}{d\nu_{\mu,E}(x)}}\, f(g^{-1}x) \quad (x\in \mathfrak{X}).$$

このとき $\mathfrak{S}_\infty$ の作用と G の作用とは互に可換である。

2.2. 第一の実現. $E' = \prod_{i\in N} E_i' \in \mathcal{E}(E)$ をとり、測度空間 $(E', \mathfrak{B}(E)|E', \nu_{\mu,E}|E')$ を考える。ここで

$$\mathfrak{B}(E)|E' \equiv \{B\cap E' \,;\, B\in \mathfrak{B}(E)\}.$$

条件(C1)より $E'\cap E'\sigma = \phi$ ($\forall\sigma\in\mathfrak{S}_\infty$, $\sigma\neq 1$) であるから、さらに、命題1.4により、modulo $\nu_{\mu,E}$-null sets で、$E'\subset \tilde{\mathfrak{X}}$ と考えられる。そして、E' は集合 $E'\mathfrak{S}_\infty\subset\tilde{\mathfrak{X}}$ の fibre map $\tilde{\mathfrak{X}}\to\Omega_M = \tilde{\mathfrak{X}}/\mathfrak{S}_\infty$ に沿った1つの section (または"基本領域") と考え得る。E' 上の $V(\pi)$-値, L^2-関数全体のなす Hilbert 空間

$$\mathfrak{H}^\Sigma_{E'} \equiv L^2(E', \mathfrak{B}(E)|E', \nu_{\mu,E}|E'; V(\pi)) \cong L^2(E')\otimes V(\pi)$$

をとる。2つの $E', E''\in\mathcal{E}(E)$ に対し、$\varphi_1\in\mathfrak{H}^\Sigma_{E'}$, $\varphi_2\in\mathfrak{H}^\Sigma_{E''}$ の内積を

$$(2.3)\quad \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle \equiv \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty}\int_{E'\cap E''\sigma}\langle\varphi_1(x), R_\Sigma(\sigma^{-1})\varphi_2(x)\rangle_{V(\pi)}\, d\nu_{\mu,E}(x)$$

と置く。この内積によって $\mathfrak{H}^\Sigma_{E'}$, $E'\in\mathcal{E}(E)$, を張り合せることによって Hilbert 空間 $\mathfrak{H}^\Sigma$ が得られることが示される。定義により、$\mathfrak{H}^\Sigma = \bigvee_{E'\in\mathcal{E}(E)}\mathfrak{H}^\Sigma_{E'}$ (生成)

であるが，測度 $\nu_{\mu,E}$ の性質から次が分る。

<u>補題2.1.</u> (i) 測度0の集合を modulo として，$\mathfrak{M}(E)$ は，$\{E'\in\mathcal{E}(E);\ E'\simeq E$ (strongly cofinal)$\}$ により生成される。

(ii) $\mathfrak{H}^{\Sigma}$ は部分空間 $\mathfrak{H}^{\Sigma}_{E'}$，$E'\in\mathcal{E}(E)$ かつ $E'\simeq E$，から張られる。

我々は次の結果に到達する。

<u>定理2.2.</u> $T_\Sigma(g)$，$g\in G$，は Hilbert空間 $\mathfrak{H}^{\Sigma}$ の上に作用し，Gの(連続な)ユニタリ表現を与える。

注 $G\ni g\longmapsto T_\Sigma(g)$ の強連続性は，主として，条件(M2)から来る。

<u>2.3.</u> <u>第二の実現</u> Hilbert空間の別の実現を与える。こちらの実現から見ると，<u>2.2</u> の内容が見通しが良くなる。さて，$\mathfrak{X}$上の $V(\pi)$-値可測函数 f で

$$(2.4)\qquad R_\Sigma(\sigma)f = f \quad (\forall\sigma\in\mathfrak{S}_\infty)$$

を満たすもののうち，$\mathrm{supp}(f)\equiv\{x\in\mathfrak{X};\ f(x)\neq 0\}$ が $\mathfrak{M}(E)$ に属するものをとる。集合 $\mathrm{supp}(f)$ は，(2.4)より，$\mathfrak{S}_\infty$-不変であり，fibre map $\mathfrak{X}\longrightarrow\Omega_M$ に対する $\mathrm{supp}(f)$ の section，F が $\mathfrak{M}(E)$ からとれる(理由：$\mathfrak{S}_\infty$は可算)：$\mathrm{supp}(f)=F\mathfrak{S}_\infty$，$F\cap F\sigma=\phi$ ($\forall\sigma\in\mathfrak{S}_\infty,\neq 1$).

そのとき
$$\|f\|^2 \equiv \int_F \|f(x)\|^2_{V(\pi)}\, d\nu_{\mu,E}(x)$$

とおくと，この値は，Fのとり方には依らない。$\|f\|<\infty$を満たすfの全体をとると，modulo $\{f ; \|f\|=0\}$で，Hilbert空間$\mathcal{H}^{\Sigma}$を得る。

<u>定理2.3</u> (i) $\mathcal{H}^{\Sigma}$上に，公式(2.2)により，Gの表現が得られる。

(ii) $\mathfrak{H}^{\Sigma}$から$\mathcal{H}^{\Sigma}$への自然なG-同型は次で与えられる。
$E' \in \mathcal{E}(E)$，$\varphi \in \mathfrak{H}^{\Sigma}_{|E'}$に対し，

$$(2.5) \qquad Q_{\Sigma}\varphi = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\infty}} R_{\Sigma}(\sigma)\varphi$$

とおくと，$Q_{\Sigma}\varphi \in \mathcal{H}^{\Sigma}$であり，$\|Q_{\Sigma}\varphi\| = \|\varphi\|$.

(注) 主ファイバーバンドル $\tilde{\mathfrak{X}} \to \Omega_M = \tilde{\mathfrak{X}}/\mathfrak{S}_{\infty}$ は位相的には非常に病的なものとしか捉え得ないが，可測性だけに注目すれば，(結果として) うまく行くことが分る。

§3. 表現のパラメーター $\Sigma=(M, E; \pi)$ に於ける M, E の正規化

Gの表現$(T_{\Sigma}, \mathfrak{H}^{\Sigma})$の既約性，同値性を調べるのにも，$M, E$をできるだけ良い性質を持ったものに置き換えておくことが望ましい。

<u>3.1. $E=\prod_{i \in \mathbf{N}} E_i$ の正規化</u>　Eを，それとM-cofinalな$F=\prod_{i \in \mathbf{N}} F_i$に置き換えても，同一の$G$の

表現を得る： $\mathcal{E}(E)=\mathcal{E}(F)$, $\nu_{\mu,E}=\nu_{\mu,F}$, そして

$$T_\Sigma = T_{\Sigma'}\ ,\quad \Sigma'=(\mu, F; \Pi).$$

そこで，Eとして，条件(U1)，(U2)の他に次の性質を持つものをとっておくことが出来る。

(U3)　各E_iは，開かつ相対コンパクト。

(U4)　$\dim M \geq 2$とする。各E_iは連結かつ単連結。$\forall i, j\ (i\neq j)$に対し，$cl(E_i)$と$cl(E_j)$を$cl(\bigcup_{k\neq i,j} E_k)$の外で結ぶpathがある。

3.2. $\mu=(\mu_i)_{i\in N}$の正規化.

ここでは，山崎[22，第二章，定理9.1]から得られる次の補題を踏まえることとする。

補題3.1.　測度空間(m_i, X_i)，(m_i', X_i)，$i\in N$，は補題1.6の仮定を満たすとする。

(i)　直積測度が互に絶対連続：$\prod_i m_i \sim \prod_i m_i'$，である為の必十条件は

$$(3.1)\qquad \left|\left(\prod_{i=m}^{n} m_i\right)-\left(\prod_{i=m}^{n} m_i'\right)\right|\left(\prod_{i=m}^{n} X_i\right) \to 0 \quad (n\geq m\to\infty).$$

(ii)　$\prod_i m_i \sim \prod_i m_i'$のための十分条件としては，

$$(3.2)\qquad \sum_{i\in N} |m_i - m_i'|(X_i) < \infty .$$

但し，$|m_i-m_i'|$は符号付測度m_i-m_i'のtotal variation.

新しい定義を導入しておく。μと$\mu'=(\mu'_i)_{i\in\mathbb{N}}$に対して、
<u>$\mathcal{M}$上で</u>μとμ'が<u>strongly equivalent</u>（記号：$\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on $\mathcal{M}$）
であるとは

(SEM) $\quad (\sup_i |\mu_i-\mu'_i|)(\mathcal{M})<\infty$

を満たすことであり、直積集合 $F=\prod_{i\in\mathbb{N}} F_i$ の上で $\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ (on F) であるとは

(SEP) $\quad \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu_i-\mu'_i|(F_i)<\infty$

を満たすことである、とする。

<u>補題3.2</u> $\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on $\mathcal{M}$ とする。

(イ) 直積集合 F に於て F_i が互に素ならば

$$\mu \underset{st}{\sim} \mu' \text{ on } F$$

(ロ) F_i が互に素である F に対し、μ-unital $\Leftrightarrow$ μ'-unital,

従って、$\mathcal{E}(\mu,E)=\mathcal{E}(\mu',E)$, $\mathcal{N}(\mu,E)=\mathcal{N}(\mu',E)$.

また、先の補題3.1を用いると次を得る。

<u>補題3.3</u> $F\in\mathcal{E}(\mu,E)$ に対し、$\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on F、とすると、Fはまたμ'-unitalとなり、F上の直積測度につき、

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mu_i|F_i) \sim \prod_{i\in\mathbb{N}}(\mu'_i|F_i).$$

かくて次に到る。

<u>命題3.4</u> $\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on $\mathcal{M}$、とする。Eがμ-unitalならばμ'-unitalでもあり、$\Sigma'=(\mu',E;\Pi)$と置くと

$$T_\Sigma \cong T_{\Sigma'} \qquad \text{(ユニタリ同値).}$$

これによって，$\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ としては，はじめから次の条件を満たすものをとっておける。

(M3) 各 μ_i は，M 上の局所座標に関する Lebesgue 測度に関して，$C^{(r)}$-級の密度函数を持つ。

§4. G の部分群とその表現

4.1. 部分群 $B\subset M$ を開集合とするとき，$G(B)$ を $\mathrm{Diff}_0(B)$ の単位元の連結成分とする。$E=\coprod E_i$ を μ-initial で条件 (U3), (U4) を満たすものとするとき，

$$G((E))\equiv\{g\in G;\ gE_i=E_{\sigma(i)}\ (\exists\sigma\in\mathfrak{S}_\infty,\ \forall i\in\mathbb{N})\}$$

と置く。

補題 4.1. (i) $G(E)\equiv\prod'_{i\in\mathbb{N}}G(E_i)$ [制限直積] とおくと，

$$G((E))\supset G(E)$$

(ii) $\dim M\geqq 2$ とする。$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_\infty$ に対し，$\exists g_\sigma\in G$ s.t.

$$g_\sigma E_i=E_{\sigma(i)}\ (\forall i),\quad g_\sigma|E_j=\text{identity on } E_j\ (\forall j\notin\mathrm{supp}(\sigma)).$$

(注) 主張 (ii) の証明には条件 (U4) が効く。

$gE\equiv\coprod_i gE_i$，$E_\sigma=\coprod_i E_{\sigma(i)}$ とおくと，$g_\sigma E=E_\sigma$.

4.2. $G(B)$, $G(F)$ の表現

条件 (M1), (M2) を満たす $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$，$\mu'=(\mu'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を

とる。$B\subset M$ を開とすると, $L^2(B,\mu_i)$ 上に自然に $G(B)$ のユニタリ表現

(4.1) $$U_{\mu_i,B}(g)\psi(p)=\sqrt{\frac{d\mu_i(g^{-1}p)}{d\mu_i(p)}}\,\psi(g^{-1}p)\quad(p\in B)$$

が働く。また

μ-unital 集合 E, $F=\prod_i' F_i\in\mathcal{E}(E)$, F_i 開 $(\forall i)$, とすると, Hilbert空間 $L^2(F,\mathfrak{B}(E)|F,\nu_{\mu,E}|F)$ の上に $G(F)=\prod_i' G(F_i)$ のユニタリ表現

(4.2) $$V_{\mu,F}(g)\varphi(x)=\sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(g^{-1}x)}{d\nu_{\mu,E}(x)}}\,\varphi(g^{-1}x)$$

が働く。

補題4.2. (i) $G(B)$ の表現 $U_{\mu_i,B}$ は既約である。(ii) $U_{\mu_i,B}$ と $U_{\mu_i',B}$ とは同値であって, その同値対応は, 次で与えられる:

$$L^2(B,\mu_i|B)\ni\psi\longmapsto\sqrt{\frac{d\mu_i(p)}{d\mu_i'(p)}}\cdot\psi(p)\in L^2(B,\mu_i'|B).$$

補題4.3. (i) $G(F)$ の表現 $V_{\mu,F}$ は既約である。

(ii) E 及び $F\in\mathcal{E}(E)$ が μ'-unital でもある, とすると,

(イ) $V_{\mu,F}\cong V_{\mu',F}\iff\prod_{i\in N}(\mu_i|F_i)\sim\prod_{i\in N}(\mu_i'|F_i)$.

(ロ) $\cong$ のときの同値対応は, 次で与えられる:

$$L^2(F,\nu_{\mu,E}|F)\ni\varphi\longmapsto\sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(x)}{d\nu_{\mu',E}(x)}}\cdot\varphi(x)\in L^2(F,\nu_{\mu',E}|F).$$

(注) 主張(ii)の証明には，補題4.2(ii)および補題1.6を用いる。

4.3. $G((F))$の表現． Gの表現$(T_\Sigma, \mathfrak{H}^\Sigma)$を考える。部分群$G(F)$, $F=\coprod F_i \in \Sigma(E)$, F_i開(すべてi)，に対して，部分空間$\mathfrak{H}^\Sigma_{|F}$は不変である。さらに，群$G((F))$の構造に関する補題4.1を用いれば，次を得る。これはT_Σの既約性の証明にとり，基本的である。

補題4.4. $\dim M \geqq 2$とする。このとき$T_\Sigma | G((F))$は$\mathfrak{H}^\Sigma_{|F}$上で既約表現を与える。

§5. 表現$(T_\Sigma, \mathfrak{H}^\Sigma)$の既約性

我々は既約性の証明に次の一般的補題を用いる。

補題5.1. Hを群，TをHilbert空間$\mathfrak{H}$上のHのユニタリ表現とする。次の条件を満たすHの部分群の族$\{H_\delta\}_{\delta\in\Delta}$と$\mathfrak{H}$の部分空間の族$\{\mathfrak{H}_\delta\}_{\delta\in\Delta}$が存在すれば，$T$は既約である。

(a) $\mathfrak{H}_\delta$はH_δ-不変で，H_δ-既約；

(b) $\mathfrak{H}$は$\{\mathfrak{H}_\delta\}_{\delta\in\Delta}$で張られる；

(c) $\forall \delta, \delta' \in \Delta$に対し，有限鎖$\delta_1=\delta, \delta_2, \ldots, \delta_r=\delta'$が存在して，$\mathfrak{H}_{\delta_i}\cap\mathfrak{H}_{\delta_{i+1}} \neq (0)$ $(1\leqq i<r)$.

(d) ある$\delta_0\in\Delta$に対して，H_{δ_0}の$\mathfrak{H}_{\delta_0}$上のIURが

$(\mathfrak{H}_{\delta_0})^{\perp} \subset \mathfrak{H}$ には現われない。

この補題を $(T_\Sigma, \mathfrak{H}^\Sigma)$ に適用するには，まず，E を条件 (U3), (U4) を満たすように正規化しておく。そして，$\Delta \to \{F \in \mathcal{E}(E)\,;\, F \approx E\}$，$\delta \to F$，$H_\delta \to G(F)$，$\mathfrak{H}_\delta \to \mathfrak{H}^\Sigma_{(F)}$，と対応させて，(a)〜(d) が成立していることを示す。すると，$\dim M \geqq 2$ として，

<u>定理5.2.</u> $\mu = (\mu_i)_{i\in N}$ を条件(M1), (M2)を満たす M 上の測度の族，$E = \prod_{i\in N} E_i \subset \mathfrak{X}$ を μ-unital 集合，Π を $\mathfrak{S}_\infty$ の IUR とする。$\Sigma = (\mu, E\,;\, \Pi)$ に対し，G の表現 $(T_\Sigma, \mathfrak{H}^\Sigma)$ はつねに既約である。

§6. <u>同値性・非同値性</u>

$\Sigma = (\mu, E\,;\,\Pi)$ と $\Sigma' = (\mu', E'\,;\,\Pi')$ をとる。ここに，$\mu' = (\mu'_i)_{i\in N}$，$E' = \prod_{i\in N} E'_i$ は μ'-unital，Π' は $\mathfrak{S}_\infty$ の IUR，このとき T_Σ と $T_{\Sigma'}$ の同値・非同値を問題にする。

<u>6.1.</u> <u>自然な同値</u> $\widetilde{\mathfrak{S}}_\infty$ の元 a に対して，$\mu^a = (\mu_{a(i)})_{i\in N}$，$E a = \prod_{i\in N} E_{a(i)}$，$\Pi^a(\sigma) = \Pi(a\sigma a^{-1})$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_\infty)$ と置く。簡単に分るように，

<u>補題6.1.</u> $a \in \widetilde{\mathfrak{S}}_\infty$ に対し，$\Sigma^a = (\mu^a, Ea\,;\,\Pi^a)$ と置くと

$$T_\Sigma \cong T_{\Sigma^a} \quad \text{である。}$$

6.2. 同値の十分条件. 命題3.4を用いれば次を得る。

補題6.2. Σ, Σ'に対して, $\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on M, $E \sim E'$ μ-cofinal (従って μ'-cofinal), $\Pi \cong \Pi'$, とすれば

$$T_\Sigma \cong T_{\Sigma'} \quad \text{である。}$$

ところが一般には "$\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on M" は $T_\Sigma \cong T_{\Sigma'}$ のためには強過ぎる条件である。実際次の定理が証明される。

定理6.3. Σ, Σ'に対して, $F = \prod_{i \in N} F_i$ が存在して,

(a) $F \overset{\mu}{\sim} E$ かつ $F \overset{\mu'}{\sim} E'$ で

$$\prod_i (\mu_i | F_i) \sim \prod_i (\mu'_i | F_i) \quad (F\text{上}),$$

(b) $\mathrm{supp}(F) \equiv \bigcup_{i \in N} F_i$ の外で $(\mu_i)_{i \in N}$ と $(\mu'_i)_{i \in N}$ が comparable,

とすると, $\mathcal{E}(\mu, E) = \mathcal{E}(\mu', E')$,

$$\mathfrak{M}(\mu, E) = \mathfrak{M}(\mu', E'), \quad \nu_{\mu, E} \sim \nu_{\mu', E'},$$

となり, $T_\Sigma \cong T_{\Sigma'}$ が自然に得られる。

但し, 次の定義を採用している。

定義6.1. 可測集合 $B \subset M$ の上で μ と μ' とが comparable であるとは, 互に素な $D_i \subset B$ $(i \in N)$ に対し,

$$\sum_{i \in N} \mu_i(D_i) < \infty \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \mu'_i(D_i) < \infty.$$

6.3. $\mu_i = \mu'_i = m$ ($\forall i$) の場合.

この特別な場合には，条件 "$\mu \underset{st}{\sim} \mu'$ on M" は自明である。我々は [7] において，次の必十条件を得た。ここでは，μ, μ' をともに m で代表させることにする。

定理 6.4. $\Sigma = (m, E; \pi)$, $\Sigma' = (m, E'; \pi')$, とすると，$T_\Sigma \cong T_{\Sigma'}$ (ユニタリ同値) の必十条件は，

$$\exists a \in \mathfrak{S}_\infty \text{ s.t. } E' \sim Ea, \ \pi' \cong \pi^a.$$

この定理の証明のうち，必要条件であることの証明は意外に長くかかる [7]。もっと短かい証明がないか何度も検討してみた結果である。我々の証明の要点は次の問題になる。

問題 6.5. ($E\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$) $\cap E'$ が $\nu_{m,E'}$ - 外測度で >0 ならば，ある $a \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ があって，$\nu_{m,E'}(Ea \cap E')$ >0，即ち $Ea \sim E'$ (m-cofinal) となるか ?

この問題が一筋縄でいかないのは 群 $\hat{\mathfrak{S}}_\infty$ が非可算であり，$E\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ が 非可算個の Ea の和になっているからである。

§7. Remarks

7.1. Gelfand 達 [20] の IUR との非同値

M上のL-測度 m に対して $\Gamma_M \cong \tilde{X}/\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ 上のPoisson測度 P_m は次のように与えられる。$B \in \mathfrak{M}_M$ と $k \geq 0$ に対し、$\Gamma(B,k) = \{\gamma \in \Gamma_M ; |\gamma \cap B| = k\}$ と置く。ここに $|\gamma \cap B|$ は $\gamma \cap B$ の位数である。このとき

$$P_m(\Gamma(B,k)) = e^{-m(B)} \frac{m(B)^k}{k!}.$$

さらに、$B_j \in \mathfrak{M}_M$, $1 \leq j \leq N$, を互いに素、とすると

$$P_m\Big(\bigcap_{j=1}^{N} \Gamma(B_j,k_j)\Big) = \prod_{j=1}^{N} P_m(\Gamma(B_j,k_j)) \quad (k_j \geq 0)$$

さて、$\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ のIUR $\tilde{\pi}$ をとり、それにassociateしたベクトルバンドルの、P_m に関する L^2-sectionsの空間の上に、標準的な方法で、G の表現 $S_{m,\tilde{\pi}}$ を得る。$I_n = \{1,2,\dots,n\}$ とおくとき、$\tilde{\pi}$ が $\mathfrak{S}_n \times \tilde{\mathfrak{S}}_{\infty-n} = \{\tau \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty ; \tau I_n = I_n\}$ の有限次元既約表現の誘導表現であるときは、$S_{m,\tilde{\pi}}$ は既約である[20]。

定理7.1. $\Sigma = (M, E ; \pi)$ に対する G のIUR T_Σ は、表現 $S_{m,\tilde{\pi}}$ (もしくはその部分表現)に同値ではない。

(注) 証明には、$[(E\tilde{\mathfrak{S}}_\infty) \cap \tilde{X}]/\tilde{\mathfrak{S}}_\infty \subset \Gamma_M$ の P_m-測度が0であること、を用いる。

7.2. Gelfand達のIURの間の同値・非同値

M上の2つのL-測度 m, m' に対して、$P_m \sim P_{m'}$

の為の必十条件は，完全には分らないが或程度のことは証明できた。それによって，$S_{m,\pi}$ と $S_{m',\pi'}$ の間の関係も或程度分る。

<u>命題7.2.</u> $m \underset{st}{\sim} m'$ on $\mathcal{M}$，即ち $|m-m'|(\mathcal{M})<\infty$，とすると，

(イ) $P_m \sim P_{m'}$ ($\Gamma_{\mathcal{M}}$上)；

(ロ) $S_{m,\pi} \cong S_{m',\pi'} \Leftrightarrow \pi \cong \pi'$.

これと逆方向の結果としては，

<u>命題7.3.</u> m, m' に対して，$\exists c>1$, s.t.

$$m\left(\left\{p\in\mathcal{M};\ \frac{dm'(p)}{dm(p)} \geqq c\right\}\right)=\infty\text{，とする。}$$

(イ) $P_m \not\succ P_{m'}$ ［$P_{m'}$ は P_m に対して絶対連続でない］

(ロ) つねに $S_{m,\pi} \not\cong S_{m',\pi'}$.

(注) 証明には，$A=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\Gamma(B_j,0)^c$，$B_j\subset\mathcal{M}$，閉で互に素，の形の $\Gamma_{\mathcal{M}}$ の部分集合で，$P_m(A)=0$，$P_{m'}(A)>0$ となるものを見付ける。ここに $D^c=\Gamma_{\mathcal{M}}\setminus D$ (補集合)．

命題7.3の仮定は緩められる。

<u>7.3. テンソル積表現の既約分解</u>

m_i，$i\in\mathbb{N}$，を $\mathcal{M}$ 上の L-測度とする。$L^2(\mathcal{M}, m_i)$ 上の G の自然表現の ($i\in\mathbb{N}$ にわたる) テンソル積の既約分解を，我々の IUR T_Σ を用いて，かなりの場合に実行できる。

7.4. $\mathfrak{S}_\infty$ のIURの具体的構成[6]との関係

我々は，μ-unital 集合 $E=\prod_{i\in N} E_i$ の定義に，“E_iは互に素”という条件(U.1)を置いた。この条件から“測度 $\nu_{\mu,E}$ が $\hat{\mathfrak{X}}\subset\mathfrak{X}$ に乗っている”ことが出るので非常に重要なものである。しかし，[6]の結果を見ると，この条件を緩められることが分る。即ち，$N\geqq 2$ を取って，(Mの代りに) $M^N=M\times\cdots\times M$ (N個)を単位として，考えていくことができる。

参考文献

[1] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn & D. Testad, Irreducibility and reducibility for the energy representation of the group of a Riemannian manifold into a compact semisimple Lie group, J. Funct. Anal., **41**(1981), 378-396.

[2] H. Araki, Factorizable representations of current algebras, Publ. RIMS, **5**(1969/70), 361-422.

[3] P. Delorme, Irréductibilité de certaines représentations de $G^{(X)}$, J. Funct. Anal., **30**(1977), 36-47.

[4] M.I. Golenishcheva-Kutuzova, Local classification of moments for groups of diffeomorphisms, Usp. Mat. Nauk, **42**(1987), 181-182 (= Russ. Math. Surv., **42**(1987), 217-218).

[5] -----, Functional moduli of moments for groups of diffeomorphisms of two-dimensional manifolds, Funct. Anal. Appl., **21**(1987), 69-70 (= Funct. Anal., **21**(1988), 315-316).

[6] T. Hirai, Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group S_∞, J. Math. Kyoto Univ., **31**(1991), 495-541.

[7] -----, Irreducible unitary representations of the group of diffeomorphisms of a non-compact manifold, preprint.

[8] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of a circle, Funct. Anal. Appl., **5**(1971), 45-53 (= Funct. Anal., **5**(1971), 209-216).

[9] -----, On unitary representations of diffeomorphisms of a compact manifold, Izv. Akad. Nauk SSSR, **36**(1972), 180-208 (= Math. USSR Izv., **6**(1972), 181-209).

[10] -----, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of the space $\mathbf{R}^n$, $n \geqq 2$, Funct. Anal. Appl., **9**(1975), 144-145 (= Funct. Anal., **9**(1975), 154-155).

[11] -----, Imbedding of a group of measure-preserving diffeomorphisms into a semidirect product and its unitary representations, Mat. Sb., **113**(1980), 81-97 (= Math. USSR Sb., **41**(1982), 67-81).

[12] S. Kakutani, On equivalence of infinite product measures, Ann. Math., **49**(1948), 214-224.

[13] A.A. Kirillov, Orbits of the group of diffeomorphisms of a circle and local Lie superalgebras, Funct. Anal. Appl., **15**(1981), 75-76 (= Funct. Anal., **15**(1981), 135-137).

[14] -----, Kähler structures on K-orbits of the group of diffeomorphisms of a circle, ibid., **21**(1987), 42-45 (= Funct. Anal., **21**(1987), 122-125).

[15] ----- & D.V. Yu'rev, Kähler geometry of the infinite-dimensional homogeneous space $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}(S^1)$, ibid., **21**(1987), 35-46 (= Funct. Anal., **21**(1988), 284-294).

[16] Yu.A. Neretin, The complementary representations of the group of diffeomorphisms of the circle,Usp. Mat. Nauk, **37**(1981), 213-214 (= Russ. Math. Surv., **37**(1982), 229-230).

[17] N. Obata, Measures on the configuration space, 1-42, unpublished.

[18] G.B. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, Commun. Math. Phys., **80**(1981), 301-342.

[19] A.M. Vershik, I.M. Gelfand & M.I. Graev, Irreducible representations of the group G^X and cohomology, Funct. Anal. Appl., **8**(1974), 67-69 (= Funct. Anal., **8**(1974), 151-153).

[20] -----, ----- & -----, Representations of the group of diffeomorphisms, Usp. Mat. Nauk, **30**(1975), 3-50 (= Russ. Math. Surv., **30**(1975), 1-50).

[21] H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1946.

[22] Y. Yamasaki, Measures on infinite dimensional spaces, Vol.2, Kinokuniya, 1978, Tokyo (in Japanese).