数理解析研究所講究録
第817巻 1992年 88-91

分岐構造とフラクタル的定常状態

神戸大理　高安秀樹
Hideki TAKAYASU

ベキ乗則によって特徴付けられるフラクタル構造やフラクタル現象が数多く見つかっているが[1)]、それに伴い、フラクタルの成因を解明しようという研究も進歩している。フラクタルの成因は大きく分類すると、次の３つに分けられる[2)]。

1　非線形フィードバック
2　相転移
3　非可逆過程

これらのなかで、１はカオスと、２は熱平衡系の臨界現象の研究と密接に結びついており、数多くの研究がなされている。それに比べると、３の代表である破壊現象や凝集現象は、素過程から時間の矢の方向生を仮定するものであり、これまであまり体系だって研究されてきたとは言い難い。

非可逆な過程は、多くの場合、時空における分岐構造によって特徴付けられる。例えば、１つの岩石が時間と共に破壊されて小さな破片に壊されていく様子を象徴的に次のような図によって表現することができる。このように時間と共に次々と起こる分岐現象はカスケードとよばれ、コルモゴロフの乱流理論の根底をなすアイディアでもある。図１において時間の向きを逆にすると、今度はものが集まってくる凝集現象を現すこととなる。このように、１つのものが２つになったり、あるいは逆に２つのものが１つになる現象は熱平衡系でも起こりうるものであるが、熱平衡系の場合には詳細釣り合いが成立し、互いに逆過程である分岐と凝集が釣り合う状況を仮定する。それ

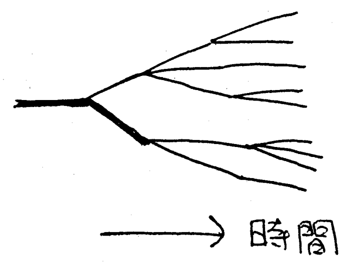

図１時空間での分岐構造

に対し、どちらか片方のプロセスだけしか起こらない状況を考えるのが3の非可逆過程の立場である。

統計物理学の立場から考えると、与えられた系の最も基本的な状態とは時間的に統計的な性質が変化しないような定常状態である。非可逆な系についても統計物理学的な視点から解析しようと思えば、まず、定常状態の有無から考えていく必要がある。素過程が非可逆なのであるから定常的な状態があるはずはない、という議論は、閉じた系を考えれば正しいが、開放系では正しくない。例えば、岩石の破壊でも、一定の割合で大きな岩石が外部から入ってきて、ある程度以上小さくなったものは外部に放出されるものとすれば、その開放系は定常的になりうる。このように、一般に開放系ならば、非可逆系であっても統計的な定常状態は実現しうるわけである。

そこで、非可逆系の定常状態の代表として、以下では、粒子がランダムウォークによって衝突合体するような系に、外部から小さな質量の粒子を絶えず注入するような場合を具体的に解析してみよう[3)]。物理的な状況としては、大気中のエアロゾルのダイナミクスをモデル化したようなものと思うこともできる。

1次元格子上の各サイトに質量を持った粒子が1つづつ存在する状態を考える。各粒子は、ランダムに移動するものとし、複数個の粒子が1つのサイト上に来た場合には、合計の質量を持った1つの粒子に凝集するものとする。さらに、系を定常化するために小さな質量の粒子を外部から一様な確率で注入する。(抜き取りは仮定しないことに注意。)座標j、時刻tにおける粒子の質量を$m(j,t)$とおくと、この凝集のプロセスは次のような確率方程式で表現できる。

$$m(j,t+1)=\sum_k W_{jk}(t)\,m(k,t)+I(j,t) \quad , \qquad (1)$$

ここで、$I(j,t)$は時刻tにj番目のサイトに注入された粒子の質量を表し、$W_{jk}(t)$は、座標kにいた粒子が座標jにジャンプしたときに1、それ以外は0となるような確率変数である。1つの粒子は分裂して2ケ所に行くことはできないので、各kに対して1となる$W_{jk}(t)$は1つしかない。$W_{jk}(t)$の型としては、次の2つを考える。

(A) 最近接ランダムウォーク

(B)　平均場（どのサイトにも等しい確率でジャンプ）

(A)の場合を例にとると、粒子の軌跡の時空パターンは、図２ののような川を思わせるパターンになる。以下では、定常状態でのmの分布に着目するが、それは、川のパターンの言葉で言えば、任意に選んだ点に流れ込んでくる流域の大きさの分布を求める問題と等価である。

詳細は省くが、質量の分布の特性関数が次のような方程式に従うことが示される[3)]。

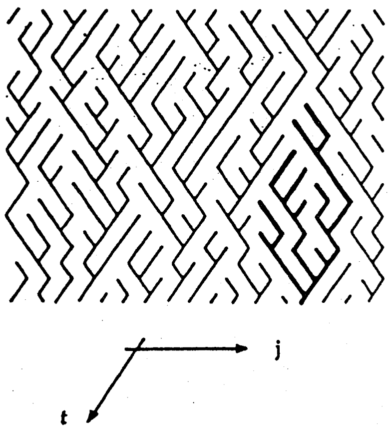

図２　注入のある凝集系の粒子の軌跡

$$Z_r(\rho,t) = \left\langle \exp\left[i\rho \sum_{j=1}^{r} m(j,t)\right] \right\rangle \qquad (2)$$

としたとき、

(A)　$$Z_r(\rho,t+1) = \frac{1}{4}\Phi(\rho)^r \left[Z_{r+1}(\rho,t) + 2Z_r(\rho,t) + Z_{r-1}(\rho,t)\right] \qquad (3.A)$$

(B)　$$Z_1(\rho,t+1) = \Phi(\rho)\cdot \exp\left[Z_1(\rho,t) - 1\right] \qquad (3.B)$$

ここで、$\Phi(\rho) \equiv \langle \exp[i\rho I(j,t)] \rangle$

（3.A）式は、初期条件 $Z_r(\rho,0)=1$ 、境界条件 $Z_0(\rho,t)=1$ のもとで解かれるが、解は与えられたIの分布に対して唯一存在し、次の形になることが厳密に示される。

(A)　$$Z_1(\rho) = 1 - c_1 \langle I \rangle^{1/3} i^{-1/3} |\rho|^{1/3} + c_2 |\rho| + \cdots \qquad (4.A)$$

また、（3.B）式より次の評価を得ることができる。

(B)　$$Z_1(\rho) = 1 - \sqrt{2} \langle I \rangle^{1/2} i^{-1/2} |\rho|^{1/2} + \cdots \qquad (4.B)$$

特性関数は確率密度のフーリエ変換であるから、これらの解より、次のような分布関数の振る舞いが見いだされる。

(A) $$P(m) \sim m^{-4/3} \quad , \quad (5.A)$$

(B) $$P(m) \sim m^{-3/2} \quad , \quad (5.B)$$

すなわち、いずれの場合も質量に関するベキ分布が定常状態として観測されるわけである。これらの定常状態が極めて安定で、どんなに大きな摂動を加えても必ずこの定常状態に戻ることが証明されており、さらに、そのときの緩和の関数型についても解明されている[3)]。

このように注入のある凝集系は極めて安定なベキ分布に従う定常状態を持っていることが明らかになったわけであるが、このことは、非可逆な系でも熱平衡系に負けないほど安定な統計的定常状態が存在しうることを示しており、大変興味深い。特に、注入するだけで抜き取りがないのに定常的になりうることは、平均値や分散が発散したベキ分布系ならではの性質であり、注入のある凝集系の定常状態は、1閉じた系、２熱平衡開放系、３散逸開放系、に続く第４の統計的定常状態と見做すことができると考えられる[4)]。

参考文献

１）H.Takayasu, Fractals in the Physical Sciences(Manchester University Press、 1990)
J.Feder, Fractals(Plenum, New York, 1988)
T.Vicsek, Fractal Growth Phenomena(World Scientific, 1989)
２）高安秀樹編、フラクタル科学（朝倉書店、1987）
３）H.Takayasu, Phys.Rev.Lett. 63, 2563(1989)
H.Takayasu, M.Takayasu, A.Provata and G.Huber, J. Stat. Phys. 65, 725(1991)
４）高安秀樹、科学、61、584(1991)