数理解析研究所講究録
第818巻 1993年 70-84

径路積分と超準解析

駿台予備学校 中村 徹 (Toru Nakamura)

Dirac方程式の基本解が径路にわたる積分として構成できることをはじめに指摘したのはR.P. Feynmanである([1])。その数学的合理化については関数解析の方向から([2],[3])、あるいは測度論の方向から([4],[5])など、現在に至るまでいろいろな研究がなされている。

ここでは超準解析の方向からのアプローチとして、径路積分の無限小random walk表現を考える。結果としてFeynmanの主張がそのままの形で合理化され、登場する*-測度は2×2行列値ではあるが、純虚数parameterのPoisson過程に対応するものである。([6],[7]参照) とくに電磁場がない場合の基本解は0次のBessel関数に共役Dirac作用素を作用させたものであることが知られているが、それも簡単な計算によって導かれる。

§1 定義

2次元時空で，電磁場$(A_0(t,x), A_1(t,x))$の中の電子はDirac方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=\left[-\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}-ieA_1(t,x)\right)-im\beta-ieA_0(t,x)\right]\psi(t,x) \qquad (1)$$

に従って運動する．ここにα, βは$\alpha^2=\beta^2=1$, $\alpha\beta+\beta\alpha=0$をみたす2×2エルミット行列で，ここでは

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \qquad \beta=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

を選ぶことにする．

2次元時空$\mathbb{R}^2$のかわりに無限小間隔の正方格子空間$\mathbb{L}$をとり，その上の径路$X_\omega(\cdot)$を考える．

<u>定義1.</u> $H\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$を1つ固定し，$\varepsilon=\frac{1}{H}$とする．

(1) $\mathbb{L}=\mathbb{T}\times\mathbb{X}$, $\mathbb{T}=\mathbb{X}=\varepsilon\,{}^*\mathbb{Z}$

(2) $N\in{}^*\mathbb{N}$に対し $\mathbb{T}_N=\{0,\varepsilon,2\varepsilon,\cdots,N\varepsilon\}$, $\Omega_N=\{-1,1\}^{\mathbb{T}_N}$

(3) $\omega\in\Omega_N$に対し，$\mathbb{L}$の点$(0,y)$から$(N\varepsilon, X_\omega(N\varepsilon))$へ至る径路$X_\omega(\cdot)$を次式で定義する．

$$X_\omega(k\varepsilon)=y+\sum_{l=0}^{k-1}\varepsilon\,\omega(l\varepsilon) \quad (k=1,2,\cdots,N) \qquad (2)$$

各径路に配分すべき行列値の*-測度を求めるために，$A_0=A_1=0$とした上で次の方針に従って，Dirac方程式を無限小差分方程式に書き換える．

(i) $\frac{\partial}{\partial x}$ が ψ の第1成分に作用するときは後退差分に

(ii) $\frac{\partial}{\partial x}$ が ψ の第2成分に作用するときは前進差分に

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}$ はつねに前進差分におきかえる。

その結果，

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t+\varepsilon, x) \\ \psi_2(t+\varepsilon, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t, x-\varepsilon) \\ \psi_2(t, x-\varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t, x+\varepsilon) \\ \psi_2(t, x+\varepsilon) \end{pmatrix} - im\beta \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。式(3)の右辺の第1項と第2項から

点 $(t, x-\varepsilon)$ と点 $(t+\varepsilon, x)$ を結ぶ線分に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を，

点 $(t, x+\varepsilon)$ と点 $(t+\varepsilon, x)$ を結ぶ線分に $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を

それぞれ配置すればよいことがわかる。したがって質量 m が 0 の場合，1つの径路に対してそれを形成している各線分に上の規則で行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ もしくは $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を配置しておき，それらを順に掛け合せて得られる行列をこの径路に配置することになる。

m と A_0, A_1 が 0 でない場合，径路上の各頂点でその情報

$$V(P_k) = \exp\left[-i\varepsilon\left(e^*A_0(P_k) - e\alpha^*A_1(P_k) + m\beta\right)\right]$$

$$\simeq 1 - i\varepsilon\left(e^*A_0(P_k) - e\alpha^*A_1(P_k) + m\beta\right)$$

を拾うことになるので，まとめて次の定義を得る。

<u>定義2</u>

(1) 径路 X_ω の上の頂点 $(k\varepsilon, X_\omega(k\varepsilon))$ を P_k とし，2点 P_k, P_{k+1}

を結ぶ線分を l_k とするとき，

$$\nabla_0(P_k) = \begin{cases} 1 & (k \in K_1) \\ -i\varepsilon m\beta & (k \in K_2) \end{cases},$$

$$L(l_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (l_k \text{の傾きが } 1 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (l_k \text{の傾きが } -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし

$K_1 = \{ k$: 径路 X_ω が点 P_k で向きを変えない $\}$

$K_2 = \{ k$: 径路 X_ω が点 P_k で向きを変える $\}$

(2) 点 $P_0, P_1, \cdots, P_N$ をつなぐ径路 X_ω に対して，その $*$-測度 $\mu(X_\omega)$ を

$$\mu(X_\omega) = L(l_{N-1})\nabla_0(P_{N-1})L(l_{N-2})\nabla_0(P_{N-2})\cdots\nabla_0(P_1)L(l_0) \quad (4)$$

で定める。

ここに $\nabla_0(P_k)$ の定義を $k \in K_1$ と $k \in K_2$ でわけたのは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(1-i\varepsilon m\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(1-i\varepsilon m\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(1-i\varepsilon m\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -i\varepsilon m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(1-i\varepsilon m\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\varepsilon m\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つからで，これからもわかるように質量 m は径路の向きを変えるという役割を果している。

こうして得られた径路空間上の 2×2 行列値の $*$-有限加法的測度による $*$-有限和（$*$-積分）として，Dirac 方程式の解 Ψ

を次のように構成することができる.

<u>定義 3</u>

(1) $\nabla(P_k)=1-i\varepsilon(e^*A_0(P_k)-e\alpha^*A_1(P_k)+m\beta)$ として, $K(X_\omega)$ を

$$K(X_\omega)=L(l_{N-1})\nabla(P_{N-1})L(l_{N-2})\nabla(P_{N-2})\cdots\nabla(P_1)L(l_0) \tag{5}$$

で定義する.

(2) 初期関数 $f_i(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $(i=1,2)$ が与えられたとき

$$\begin{pmatrix}\Psi_1(\underline{t},\underline{x})\\ \Psi_2(\underline{t},\underline{x})\end{pmatrix}=\sum_{X_\omega}K(X_\omega)\begin{pmatrix}{}^*f_1(X_\omega(0))\\ {}^*f_2(X_\omega(0))\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^\circ\Psi_1(\underline{t},\underline{x})\\ {}^\circ\Psi_2(\underline{t},\underline{x})\end{pmatrix} \tag{6}$$

とする. ただし $\underline{t}\in\mathbb{T}$, $\underline{x}\in\mathbb{X}$ は $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ から

$$\underline{t}\leqq t<\underline{t}+\varepsilon,\qquad \underline{x}\leqq x<\underline{x}+\varepsilon$$

で定める. また, 和 $\sum_{X_\omega}$ は $X_\omega(\underline{t})=\underline{x}$ をみたすすべての X_ω にわたる和とする. これは $*$-有限和である.

§2 定理と証明

<u>定理 1</u> $t\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $\underline{t}=N\varepsilon\in\mathbb{T}_N$ とする. $\omega\in\Omega_N$ からつくられる径路 X_ω の全体を D, そのうちでちょうど n 回だけ向きを変える径路の全体を D_n とする. 各 $X_\omega\in D$ に対する $*$-測度 $\mu(X_\omega)$ は

$$\mu(X_\omega)=(\text{スカラー})\times(\text{行列}),\quad (\text{行列})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

の形をしているので, このスカラー部分を $\tilde{\mu}(X_\omega)$ とする.

このとき, $\tilde{\mu}(D_n)=\sum_{X_\omega\in D_n}\tilde{\mu}(X_\omega)$ と $\tilde{\mu}(D)=\sum_{X_\omega\in D}\tilde{\mu}(X_\omega)$ について

$$\frac{\tilde{\mu}(D_n)}{\tilde{\mu}(D)} \simeq e^{imt}\frac{(-imt)^n}{n!} \tag{7}$$

が成り立つ.

証明. $X_\omega\in D_n$ のとき $\tilde{\mu}(X_\omega)=(-im\varepsilon)^n$, $\varepsilon=\frac{t}{N}$ であるから

$$\tilde{\mu}(D_n)=\binom{N}{n}(-im\varepsilon)^n=\frac{(-imt)^n}{n!}\frac{N!}{(N-n)!\,N^n}$$

であるが, $N\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ なので

$$\frac{N!}{(N-n)!\,N^n}=(1-\frac{n-1}{N})(1-\frac{n-2}{N})\cdots(1-\frac{1}{N})\simeq 1$$

となる. したがって

$$\tilde{\mu}(D_n)\simeq\frac{(-imt)^n}{n!}\simeq\frac{(-imt)^n}{n!}$$

である. これを

$$\tilde{\mu}(D)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}(-im\varepsilon)^n=(1-im\varepsilon)^N\simeq e^{-imt}$$

でわって (7) を得る. (証明終)

通常, parameter m の Poisson 過程 $X(t)$ に対する確率測度 μ^m とは, $X(0)=0$ を出発する非減少かつ右連続な階段径路 $X:[0,t]\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ の上に定義された確率測度であって

$$\int_{X(t)=n}d\mu^m(X)=e^{-mt}\frac{(mt)^n}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

をみたす. この式と (7) をくらべると, 定理 1 は我々の *-測度が純虚数 parameter $-im$ の Poisson 過程に対応していることを示している.

<u>定理 2</u> $A_1, A_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ つまりそれぞれ2階までの連続な(偏)導関数をもつとすると、定義3 (6)式で与えられる $\psi(t,x)=\begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix}$ は2次元時空のDirac方程式(1)の初期条件 $\begin{pmatrix}\psi_1(0,x)\\ \psi_2(0,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ をみたす古典解となる。

証明. 長くなるので概略を述べるにとどめる. 詳しくは, [8], [9]参照.

(i) X_ω が向きを変える回数を ℓ とすると

$$\| K(X_\omega) \| \leqq (1+2c\varepsilon)^{N-\ell}(m\varepsilon)^\ell \leqq c'(m\varepsilon)^\ell \quad , \; c, c' \in \mathbb{R} \tag{8}$$

という評価式が成り立つので, $X_\omega(N\varepsilon)=\underline{x}$ をみたす X_ω について

$$\sum_{X_\omega} \| K(X_\omega) \| \leqq \sum_{\ell=0}^{N} c'(m\varepsilon)^\ell \binom{N}{\ell} \lesssim c' e^{mt}$$

となり, $\Psi(\underline{t},\underline{x})$ が近標準, つまりその標準部分が存在する.

(ii) X_ω を空間軸 $\mathbb{X}$ 方向に $\pm\varepsilon$ だけ平行移動した径路を $X_\omega^\pm$ とするとき,

$$\| K(X_\omega) - K(X_\omega^\pm) \| \leqq c\varepsilon\,(m\varepsilon)^\ell \tag{9}$$

$$\| K(X_\omega^+) + K(X_\omega^-) - 2K(X_\omega) \| \leqq c\varepsilon^2 (m\varepsilon)^\ell \tag{10}$$

という評価式が(8)から得られる($c \in \mathbb{R}$ は (t,x) がコンパクト集合を動く限り X_ω, $\underline{t}$, $\underline{x}$ に依存しない定数).

同様に X_ω を時間軸 $\mathbb{T}$ 方向に ε, 2ε だけ平行移動した径路 $X_{\omega,+}$, $X_{\omega,2+}$ についても

$$\| K(X_\omega) - K(X_{\omega,+}) \| \leqq c\varepsilon (m\varepsilon)^\ell, \quad \| K(X_\omega) - K(X_{\omega,2+}) \| \leqq c\varepsilon (m\varepsilon)^\ell \quad (11)$$

$$\| K(X_{\omega,2+}) + K(X_{\omega,+}) - 2K(X_\omega) \| \leqq c\varepsilon^2 (m\varepsilon)^\ell \quad (12)$$

が成り立つ。

(iii) $D_{\mathbb{T}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Psi_1(\underline{t}+\varepsilon, \underline{x}) - \Psi_1(\underline{t}, \underline{x}) \\ \Psi_2(\underline{t}+\varepsilon, \underline{x}) - \Psi_2(\underline{t}, \underline{x}) \end{pmatrix}$

$D_{\mathbb{X}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Psi_1(\underline{t}, \underline{x}) - \Psi_1(\underline{t}, \underline{x}-\varepsilon) \\ \Psi_2(\underline{t}, \underline{x}+\varepsilon) - \Psi_2(\underline{t}, \underline{x}) \end{pmatrix}$

とすると

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) = &-\alpha D_{\mathbb{X}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) - i(e{}^*A_0 - e\alpha{}^*A_1) \begin{pmatrix} \Psi_1(\underline{t}, \underline{x}-\varepsilon) \\ \Psi_2(\underline{t}, \underline{x}+\varepsilon) \end{pmatrix} \\ &- im\beta \begin{pmatrix} \Psi_1(\underline{t}, \underline{x}+\varepsilon) \\ \Psi_2(\underline{t}, \underline{x}-\varepsilon) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

が成り立つ. ただし, ${}^*A_0$, ${}^*A_1$ の中の $\mathbb{T}$ 座標, $\mathbb{X}$ 座標の値はそれらがスカラーとして掛かる Ψ_i の中のものと一致するとする.

(9)～(12) を用いると $D_{\mathbb{X}}\Psi$, $D_{\mathbb{T}}\Psi$ が近標準であること及び

$$\| D_{\mathbb{X}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}+\varepsilon) - D_{\mathbb{X}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \| < c\varepsilon \quad (14)$$

$$\| D_{\mathbb{T}} \Psi(\underline{t}+\varepsilon, \underline{x}) - D_{\mathbb{T}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \| < c\varepsilon \quad (15)$$

がいえる.

(iv) (14), (15) を用いると直ちに, $k \in {}^*\mathbb{N}$, $k\varepsilon \simeq 0$ のとき

$$\frac{1}{k\varepsilon} \left(\Psi(\underline{t}, \underline{x}+k\varepsilon) - \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \right) \simeq D_{\mathbb{X}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \quad (16)$$

$$\frac{1}{k\varepsilon} \left(\Psi(\underline{t}+k\varepsilon, \underline{x}) - \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \right) \simeq D_{\mathbb{T}} \Psi(\underline{t}, \underline{x}) \quad (17)$$

であることが導かれる.

(V) $\Psi(t,x)$ の t-偏微分可能性を証明する.

(t,x) を固定する. 各 $a\in\mathbb{R}$ $(a>0)$ に対し internal な集合

$$M_a=\left\{u\in{}^*\mathbb{R}^+\ ;\ (|k\varepsilon|<u \text{ かつ } k\in{}^*\mathbb{Z}) \text{ ならば } \left\|\frac{1}{k\varepsilon}(\Phi(\underline{t}+k\varepsilon,\underline{x})-\Phi(\underline{t},\underline{x}))-D_{\mathrm{T}}\Phi(\underline{t},\underline{x})\right\|<a\right\}$$

を考えると (17) より M_a は正の無限小数をすべて含む. したがって延長定理から M_a はある $d\in\mathbb{R}^+$ を要素として含む. M_a の定め方と (17) から

$$\left\|\frac{1}{k\varepsilon}(\Phi(\underline{t}+k\varepsilon,\underline{x})-\Phi(\underline{t},\underline{x}))-{}^{\circ}D_{\mathrm{T}}\Phi(\underline{t},\underline{x})\right\|<2a \qquad (18)$$

である. 一方, $h\in\mathbb{R}^+$ のとき $\underline{t+h}=\underline{t}+l\varepsilon$ とすると $\frac{l\varepsilon}{h}\simeq 1$ なので,

$$\frac{1}{h}(\Psi(t+h,x)-\Psi(t,x))=\frac{1}{l\varepsilon}({}^{\circ}\Phi(\underline{t}+l\varepsilon,\underline{x})-{}^{\circ}\Phi(\underline{t},\underline{x}))\frac{l\varepsilon}{h}$$

$$\simeq\frac{1}{l\varepsilon}(\Phi(\underline{t}+l\varepsilon,\underline{x})-\Phi(\underline{t},\underline{x})) \qquad (19)$$

となる. (18) と (19) から任意の $a\in\mathbb{R}^+$ に対して前述の $d\in\mathbb{R}^+$ をとると, $|h|<d$ をみたすすべての $h\in\mathbb{R}$ に対して

$$\left\|\frac{1}{h}(\Psi(t+h,x)-\Psi(t,x))-{}^{\circ}D_{\mathrm{T}}\Phi(\underline{t},\underline{x})\right\|<3a$$

となる. したがって $\Psi(t,x)$ は t-偏微分可能であって

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)={}^{\circ}D_{\mathrm{T}}\Phi(\underline{t},\underline{x})$$

が成り立つ.

x-偏微分についても全く同様であって, それらと (13) から Ψ が Dirac 方程式の解となることは直ちにわかる. 初期条件

をみたすことは定義から明らか．（証明終）

なお，証明は述べないが，次の式が成り立つことも簡単に示されることを付記しておく．

$$\left\| K(X_\omega) - \exp\left[-i\int_0^t \left\{ e^* A_0(s, X_\omega(s))\,ds - e^* A_1(s, X_\omega(s))\,dX_\omega(s) \right\}\right] u(X_\omega) \right\|$$
$$\leqq C\varepsilon(m\varepsilon)^n \quad , C \in \mathbb{R}$$

<u>定理３</u>　定義３で構成した径路積分は $A_0 = A_1 = 0$ のとき Dirac 方程式の基本解

$$K_0(t, x : 0, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} - im\beta\right)\left\{ J_0(m\sqrt{t^2 - x^2})\,\theta(t - |x|)\right\}$$

を与える．ここに J_0 は０次の Bessel 関数，$\theta(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0) \\ 0 & (u \leqq 0) \end{cases}$ とする．

証明．$\Psi(\underline{t}, \underline{x}) = \displaystyle\sum_{\xi} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{X_\omega \\ (X_\omega(0) = \xi,\, X_\omega(\underline{t}) = \underline{x})}} K(X_\omega)\, {}^* f(\xi) \cdot \varepsilon$ と分解し，

$\displaystyle\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{X_\omega \\ (X_\omega(0) = \xi,\, X_\omega(\underline{t}) = \underline{x})}} K(X_\omega) = \widetilde{K}(\underline{t}, \underline{x}; 0, \xi)$ とおく．

$\underline{t} = n\varepsilon$，$\underline{x} = l\varepsilon$，$\underline{y} = m\varepsilon$ とおくとき，n が偶数（奇数）ならば $l - m$ が偶数（奇数）である m に対してのみ $K(\underline{t}, \underline{x}; 0, m\varepsilon)$ が考えられ，それ以外の m に対して $K(\underline{t}, \underline{x}; 0, m\varepsilon) = 0$ となるので

$$\Psi(\underline{t},\underline{x})=\sum_{k\in{}^*\mathbb{Z}}\frac{1}{2}\tilde{K}(\underline{t},\underline{x};0,\xi_0+2k\varepsilon)\,{}^*f(\xi_0+2k\varepsilon)\cdot 2\varepsilon$$

と変形した上で

$$\psi(t,x)=\int K_0(t,x;0,y)f(y)\,dy$$

と比較しなければならない．つまり

$$K_0(t,x:0,y)=\frac{1}{2}{}^{\circ}\left[\tilde{K}(\underline{t},\underline{x};0,\underline{y})+\tilde{K}(\underline{t},\underline{x};0,\underline{y}+\varepsilon)\right]$$

である．この右辺の第１項か第２項のいずれかは 0 である．

以下，簡単のため n と l の偶奇性が一致しているとして

$$K_0(t,x;0,0)={}^{\circ}\left\{\frac{1}{2}\tilde{K}(\underline{t},\underline{x};0,0)\right\}={}^{\circ}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\substack{X_\omega \\ (X_\omega(0)=0,\ X_\omega(\underline{t})=\underline{x})}}K(X_\omega)\right\}$$

について考える．

定義から明らかに

$$\tilde{K}(\underline{t},\underline{x};0,0)=\tilde{K}^{(1)}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\tilde{K}^{(2)}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\tilde{K}^{(3)}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\tilde{K}^{(4)}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

の形をしていて，各 $\tilde{K}^{(i)}$ はそれぞれ

(i) はじめ右上り，最後も右上りの径路

(ii) はじめ右下り，最後は右上りの径路

(iii) はじめ右上り，最後は右下りの径路

(iv) はじめ右下り，最後は右下りの径路

からの寄与である．

$\tilde{K}^{(1)}$ を求める．(i)の形の径路で向きを $2h$ 回変えるものから $(-im\varepsilon)^{2h}$ が係数としてでるので

$$\tilde{K}^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{h}(-im\varepsilon)^{2h}\times(\text{そのような径路の総数})$$

である．径路の総数を N_k とすると，N_k は

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = n_1 \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n_2 \end{cases} \quad (n_1 + n_2 = n,\ n_1 - n_2 = l)$$

をみたす1以上の整数の組 $(x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_k)$ の総数に一致するので

$$N_k = \frac{(n_1-1)!}{k!\,(n_1-1-k)!}\,\frac{(n_2-1)!}{(k-1)!\,(n_2-k)!} = \frac{A}{k!\,(k-1)!},\quad A = \frac{(n_1-1)!\,(n_2-1)!}{(n_1-1-k)!\,(n_2-k)!}$$

である．(8) を用いると折れ曲がる回数 k を1つの固定した無限大数以下に制限してもよいことがいえるので，それを p にしておく．ただし $p < N^{\frac{1}{3}}$ にとる．

(t, x) が光円錐上にない場合，つまり，$t^2 - x^2 > 0$ のときを考えると，$n_1 = \frac{1}{2\varepsilon}(t + x)$，$n_2 = \frac{1}{2\varepsilon}(t - x)$ はいずれも $\frac{1}{\varepsilon}$ つまり n や l と同じ order の無限大数である．したがって，A を $n_1{}^k n_2{}^{k-1}$ におきかえることができる．実際

$$\left|\log \frac{A}{n_1{}^k n_2{}^{k-1}}\right| \leqq \left|\log\left(1 - \frac{1}{n_1}\right)\right| + \cdots + \left|\log\left(1 - \frac{k}{n_1}\right)\right| + \left|\log\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)\right| + \cdots + \left|\log\left(1 - \frac{k-1}{n_2}\right)\right|$$

について，k の限界 p を n_1，n_2 に比べて充分小さくしてあるので，この右辺は

$$2\left(\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{k}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{k-1}{n_2}\right) < \frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2}$$

でおさえられる．したがって

$$n_1{}^k n_2{}^{k-1} \exp\left[-\frac{(p+1)^2}{n_1} - \frac{p^2}{n_2}\right] < A \leqq n_1{}^k n_2{}^{k-1}$$

が成り立ち，この式から A を $n_1^{k} n_2^{k-1}$ におきかえたときの $\tilde{K}^{(1)}$ の値は高々

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{p} (-im\varepsilon)^{2k} \frac{n_1^{k} n_2^{k-1}}{k!(k-1)!} \left(\frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right) \right|$$

$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!(k-1)!} (m\varepsilon n_1)^{k} (m\varepsilon n_2)^{k-1} \right) \left(\frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right)$$

$$\leqq c \left(\frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right) \simeq 0$$

しか変化しない．以上より

$$\tilde{K}^{(1)} \simeq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n_1^{k+1} n_2^{k}}{(k+1)!\,k!} (-im\varepsilon)^{2k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,k!} \left(m\sqrt{n_1\varepsilon}\sqrt{n_2\varepsilon} \right)^{2k+1} \sqrt{\frac{n_1\varepsilon}{n_2\varepsilon}}\, m$$

$$\simeq -m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)!\,k!} \left(\frac{m}{2}\sqrt{t^2-x^2} \right)^{2k+1} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} \quad (p\text{は無限大数なので})$$

$$= -m\sqrt{\frac{t+x}{t-x}}\, J_1(m\sqrt{t^2-x^2})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) J_0(m\sqrt{t^2-x^2})$$

同様に $\tilde{K}^{(2)}$, $\tilde{K}^{(3)}$, $\tilde{K}^{(4)}$ を求めると

$$\tilde{K}^{(2)} \simeq -im J_0(m\sqrt{t^2-x^2}), \quad \tilde{K}^{(3)} \simeq -im J_0(m\sqrt{t^2-x^2})$$

$$\tilde{K}^{(4)} \simeq \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right\} J_0(m\sqrt{t^2-x^2})$$

を得る．以上をまとめて $t^2 - x^2 > 0$ のとき

$$K_0(t,x:0,0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} - im\beta \right) J_0(m\sqrt{t^2-x^2})$$

となる．

$t = |x|$ のときは

$$K_0(t,x;0,0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (t=x) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (t=-x) \end{cases}$$

$t < |x|$ のときは $K_0(t, x; 0, 0) = 0$ であるからこれらを θ 関数を用いてまとめると

$$K_0(t, x; 0, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} - im\beta\right)\left\{J_0\left(m\sqrt{t^2 - x^2}\right)\theta(t - |x|)\right\}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

References

[1] R.P. Feynman & A. Hibbs : Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, New York (1965)

[2] B. Simon : Functional integration and quantum physics, Academic Press (1979)

[3] D. Fujiwara : A constr ction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J. D'Analyse Mathématique 35 (1979)

[4] E. Nelson : Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5 (1964)

[5] T. Ichinose & H. Tamura : Path integral approach to relativistic quantum mechanics — Two-dimensional Dirac equation —, Suppl. Prog. Theor. Phys. 92 (1987)

[6] B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac & L.S. Schulman : Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, Phy. Rev. Lett. 53 (1984)

[7] B. Gaveau & L.S. Schulman : Dirac equation path integral : Interpreting the Grassmann variables, Nuovo Cimento D11 (1989)

[8] T. Nakamura : A nonstandard representation of Feynman's path integrals, J. Math. Phys. 32 (1991)

[9] 中村 徹：「超準解析と物理」日本評論社（近刊）