数理解析研究所講究録
第818巻1993年121-130

λ+項の値の上限について

東北大学工学研究科　竹内　泉（Takeuti, Izumi）

1　λ+項

λ+項は、型付λ計算の部分体系であり、型付λ項のβ変換列の長さの上限を与える際に有用である。［参考文献1］

λ+項は型付λ項に次のような制限を加えたものとして定義される。

・原子型はωのみ。

・型の構成子は$\supset$のみ。

・原子定項は$0 \in \omega$、$s \in \omega \supset \omega$、$+ \in \omega \supset \omega \supset \omega$のみ。

・変数は各型に対し十分に多くある。

・計算規則は、α同値、β同値、η同値に加えて、次のものがある。

$$+0t = +t0 = t \qquad +(st)u = +t(su) = s(+tu)$$

$$+tu = +ut \qquad +(+tu)v = +t(+uv)$$

●シュビッテンベルクの上界

型付λ項の正規化可能性［参考文献3］により、型がωで

ある λ ＋項はある数を表す。

項の構文上の複雑さから項の値に上界を与えることは重要である。シュビッテンベルクはこの問題に於いてある上界を与えた。

シュビッテンベルクの上界を説明する為に、クヌスの記号 ↑↑ を紹介する。これは二項演算であって、次のように定義する。

$$x \uparrow\uparrow 0 := 1$$

$$x \uparrow\uparrow n+1 := x^{x \uparrow\uparrow n}$$

普通の記号に依れば

$$x \uparrow\uparrow n = \left. x^{x^{\cdots^{x}}} \right\} n \text{ヶ}$$

n を固定して $x \to x+2 \uparrow\uparrow n$ という函数を考えると、これは初等函数であり、函数列 $\{ x \to x+2 \uparrow\uparrow n \}_{n=0,1,\cdots}$ は初等函数の中で共終である。

シュビッテンベルクは型が ω である任意の閉 λ ＋項 t に対して、項の値を ⟦t⟧、項の長さを l 、現れる変数の階級の最高のものを q で表すと、⟦t⟧ は $l+2 \uparrow\uparrow 2q$ 程度で圧さえられることを示した。［参考文献 2 ］

ここでは、$3l \uparrow\uparrow q+2$ で圧さえられることを示す。

2　項と型

● 長さ、階級、位数

型と項に対して、長さ $length[\,]$ 、階級 $rank[\,]$ 、位数 $order[\,]$ を定義する。

$$length[\,\omega\,] := 1$$

$$length[\,T \supset U\,] := length[\,T\,] + length[\,U\,]$$

X が型 T の原子項ならば　$length[\,\mathsf{X}\,] := length[\,T\,]$

$$length[\,\lambda \mathsf{x}.\mathsf{X}\,] := length[\,\mathsf{X}\,]$$

$$length[\,\mathsf{XY}\,] := length[\,\mathsf{X}\,] + length[\,\mathsf{Y}\,]$$

$$rank[\,\omega\,] := 0$$

$$rank[\,T \supset U\,] := max\{\,rank[\,T\,] + 1\,,\, rank[\,U\,]\,\}$$

$\mathsf{X} \in T$ ならば　$rank[\,\mathsf{X}\,] := rank[\,T\,]$

$$order[\,\omega\,] := 0$$

$$order[\,T \supset U\,] := order[\,U\,] + 1$$

$\mathsf{X} \in T$ ならば　$order[\,\mathsf{X}\,] := order[\,T\,]$

● 意味論

型が ω である閉項は整数を表す。数 n を表す項

$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\cdots \mathsf{s}(\mathsf{s}0)\cdots))$　　—　　s が n ヶ

を $\overline{n}$ と書く。そうすると、型 ω の閉項 t に対してある数 n があって、$\mathsf{t} = \overline{n}$ となる。この n を $[\![\mathsf{t}]\!]$ と書く。すなわち

$$\mathsf{t} = \overline{n} \quad \Leftrightarrow \quad n = [\![\mathsf{t}]\!]$$

● 整数の表す型

整数に依ってある一連の型を表す。

$$0 := \omega$$

$$n+1 := n \supset n$$

これは単なる略記であって、数と型を同じと見做すものではない。

3 順序

同じ型をした閉項の間に部分順序関係を定義する。定義は、型の複雑さに関する帰納法で行なう。

型ωに対しては、 $X \leqq Y \Leftrightarrow [\![X]\!] \leqq [\![Y]\!]$

$X, Y \in T \supset U$に対しては、

$X \leqq Y \quad \Leftrightarrow \quad$ 型Tの任意の閉項Zに対し、$XZ \leqq YZ$

一般の項に対しても、同じ型の項の間に同様の部分順序を定義する。今度は、『≦』の両辺に含まれる自由変数の数の帰納法に依り行なう。

X, Yは同じ型の項で、xはどちらかに自由変数として含まれる変数である時、 $X \leqq Y \quad \Leftrightarrow \quad \lambda x.X \leqq \lambda x.Y$

この定義は次を意味する。ここで$\vec{u}$はX、Yに含まれる自由変数を全て列べたものである。

$X \leqq Y \quad \Leftrightarrow$

$\vec{u}$と型が適合する任意の閉項の列$\vec{Z}$に対し、$X[\vec{Z}/\vec{u}] \leqq Y[\vec{Z}/\vec{u}]$

この時 $X[\vec{Z}/\vec{u}]$ と $Y[\vec{Z}/\vec{u}]$ は閉項になる。

次の命題が成り立つ。

項 $X \in T \supset U$、$Y,Z \in T$ に対して　$Y \leqq Z \quad \Rightarrow \quad XY \leqq XZ$

項 $X,Y \in T \supset U$、$Z \in T$ に対して　$X \leqq Y \quad \Rightarrow \quad XZ \leqq YZ$

変数 x と項 X,Y に対して　$X \leqq Y \quad \Rightarrow \quad \lambda x.X \leqq \lambda x.Y$

4　定項

● I、O、+

型 T に対して

$$\mathsf{I}^{T \supset T} := \lambda x^T.x^T$$

型 T に対して O^T は

$$\mathsf{O}^{\omega} := 0$$

$$\mathsf{O}^{T \supset U} := \lambda x^T.\mathsf{O}^U$$

型 T に対して $+_T \in T \supset T \supset T$ は

$$+_{\omega} := +$$

$$+_{T \supset U} := \lambda xyz.+_U(xz)(yz)$$

以降、+ はある型 T に対する $+_T$ を表し、必ずしも $+_{\omega}$ を表さない。

● P、Q、R、M

整数 $n \geqq 1$ に対して

$$\mathsf{P}_n \in n-1 \supset n-2 \supset \cdots 1 \supset 0 \supset n-1$$

$$\mathsf{P}_n := \lambda \mathsf{u}\mathsf{x}_{n-2} \cdots \mathsf{x}_0 \mathsf{y}_{n-2} \cdots \mathsf{y}_0.\mathsf{u}(+\mathsf{x}_{n-2}\mathsf{y}_{n-2}) \cdots (+\mathsf{x}_0\mathsf{y}_0)$$

次が成り立つ。

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{I}$$

整数 $n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \mathsf{Q}^n := \lambda \mathsf{uvx}_{n-3} \cdots \mathsf{x}_0.\ \mathsf{u}\ & (\mathsf{P}_{n-1}\mathsf{vx}_{n-3} \cdots \mathsf{x}_0) \\ & (\mathsf{P}_{n-2}(\mathsf{vx}_{n-3})\mathsf{x}_{n-4} \cdots \mathsf{x}_0) \\ & \cdots \\ & (\mathsf{P}_2(\mathsf{vx}_{n-3} \cdots \mathsf{x}_1)\mathsf{x}_0) \\ & (\mathsf{vx}_{n-3} \cdots \mathsf{x}_0) \end{aligned}$$

次が成り立つ。

$$\mathsf{Q}^2 = \mathsf{I}$$

整数 $n \geqq 2$ に対して

$$\mathsf{R}^2 := \mathsf{I}$$

$$\mathsf{R}^n := \lambda \mathsf{uvw}.\mathsf{Q}^{n-1}(\mathsf{uv})(\mathsf{uvw}) \quad \text{— 但し } n \geqq 3$$

整数 $n \geqq 1$ 及び $i \geqq 0$ に対して

$$\mathsf{M}_0^1 := \mathsf{s}$$

$n \geqq 2$ ならば $\mathsf{M}_0^n := +\mathsf{I}(\lambda \mathsf{u}.\mathsf{M}_0^{n-1})$

$i \geqq 1$ ならば $\mathsf{M}_i^n := (+\mathsf{I}\mathsf{R}^{n+1})\mathsf{M}_{i-1}^n$

+、Pの下付添字とI、O、Q、R、Mの上付添字は型を表す。型の推定が容易な場合には、型を表す添字は省略して書かない。

● F、G

階級nの型Tに対して、順序準同型写像F:（型Tの項）→（型nの項）とG:（型nの項）→（型Tの項）を導入する。項F_TとG_TはFとGの表現である。項によって表現される写像が準同型になることとは明かである。

型T及び整数$n \geqq rank[T]$に対して$\mathsf{F}^{T\supset n}$及び$\mathsf{G}^{n\supset T}$を定義する。これはTの帰納法で行なう。

まず$T=\omega$の場合、　　$\mathsf{F}^{\omega\supset n}:=\lambda \mathsf{v}\mathsf{x}_{n-1}\cdots \mathsf{x}_0.\mathsf{v}$

$$\mathsf{G}^{n\supset\omega}:=\lambda \mathsf{u}.\mathsf{u}\mathsf{O}^{n-1}\cdots \mathsf{O}^0$$

$T\neq\omega$の場合は、Tを

$$T=T_1\supset T_2\supset\cdots T_h\supset\omega$$

と表す。$h=order[T]$である。この$T_1\cdots T_h$を階級に依って分類する。

階級 0　―　$T_{j_{0,1}}\cdots T_{j_{0,h_0}}$

階級 1　―　$T_{j_{1,1}}\cdots T_{j_{1,h_1}}$

:　　　:

階級 $n-1$　―　$T_{j_{n-1,1}}\cdots T_{j_{n-1,h_{n-1}}}$

$h_0+h_1+\cdots h_{n-1}=h$であり、$j_{k,l}$は1からhまでを動く。$h_0,h_1\cdots h_{n-1}$の中には0があるかも知れない。以降は$T_{j_{k,l}}$を$T_{k,l}$と書く。$T_{k,1}\cdots T_{k,h_k}$の中には重複して現れるものがあるかも知れない。特に、$T_{0,1}\cdots T_{0,h_0}$は全て等しくωである。

さて、変数 $\mathsf{x}_1^{T_1}\cdots\mathsf{x}_h^{T_h}$ を考える。T_j と $T_{k,l}$ のように、$\mathsf{x}_{j_{k,l}}$ を $\mathsf{x}_{k,l}$ と書く。この時、$\mathsf{G}^{n\supset T}$ を

$$\mathsf{G}^{n\supset T}{:=}\lambda \mathsf{u}\mathsf{x}_1\cdots\mathsf{x}_h.\mathsf{u}\mathsf{V}_{n-1}\cdots\mathsf{V}_0$$

と定める。ここで $\mathsf{V}_{n-1}\cdots\mathsf{V}_0$ は

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}_k{:=}&+(\mathsf{F}^{T_{k,1}\supset k}\mathsf{x}_{k,1})\\
&\quad(+(\mathsf{F}^{T_{k,2}\supset k}\mathsf{x}_{k,2})\\
&\qquad(\quad\cdots\quad+(\mathsf{F}^{T_{k,h_k-1}\supset k}\mathsf{x}_{k,h_k-1})\\
&\qquad\qquad(\mathsf{F}^{T_{k,h_k}\supset k}\mathsf{x}_{k,h_k})\quad\cdots\quad))\qquad —\ h_k\geqq 2\text{ の時}\\
\mathsf{V}_k{:=}&\ \mathsf{F}^{T_{k,1}\supset k}\mathsf{x}_{k,1}\qquad —\ h_k=1\text{ の時}\\
\mathsf{V}_k{:=}&\ \mathsf{O}^k\qquad —\ h_k=0\text{ の時}
\end{aligned}$$

を表す。

$\mathsf{F}^{T\supset n}$ は

$$\mathsf{F}^{T\supset n}{:=}\lambda \mathsf{v}\mathsf{x}_{n-1}\cdots\mathsf{x}_0.\mathsf{v}\left(\mathsf{G}^{rank[T_1]\supset T_1}\mathsf{x}_{rank[T_1]}\right)\cdots\left(\mathsf{G}^{rank[T_h]\supset T_h}\mathsf{x}_{rank[T_h]}\right)$$

と定める。

単に型 T のみを指定した時には、

$$\mathsf{F}_T{:=}\mathsf{F}^{T\supset rank[T]}\quad,\qquad \mathsf{G}_T{:=}\mathsf{G}^{rank[T]\supset T}$$

を表す。

次が成り立つ。

$$\mathsf{G}_T(\mathsf{F}_T\mathsf{x})\ \geqq\ \mathsf{x}$$

$n\geqq rank[\mathrm{T}]$ ならば、n に依らず

$\lambda \mathsf{x}.\mathsf{G}^{n\supset T}(\mathsf{F}^{T\supset n}\mathsf{x})=\lambda \mathsf{x}.\mathsf{G}_T(\mathsf{F}_T\mathsf{x})$

5　補題

補題 1　$\lambda \mathsf{u}.\mathsf{F}_T(\mathsf{G}_T\mathsf{u}) \leqq \mathsf{M}_{length[T]-1}$

補題 2　$\lambda \mathsf{v}.\mathsf{QM}_i^n(\mathsf{M}_j^n\mathsf{v}) \leqq \mathsf{M}_{i+j+2}^n$

補題 3　$\mathsf{M}_i^{n+1}\mathsf{O}^n \leqq \mathsf{M}_{2^{i+3}-3}^n$　　但し　$n \geqq 1$

6　定理

閉項Xの長さ$l = length[\mathsf{X}]$、階級$r = rank[\mathsf{X}]$、Xの中にある変数と原子定項の中で階級が一番高いものの階級がqである時、　$\mathsf{FX} \leqq \mathsf{M}_{3l-3}^{q+1}\mathsf{O}^q \cdots \mathsf{O}^r$

7　系

閉項$\mathsf{X} \in \omega$に対し、$length[\mathsf{X}] = l$、Xの中にある原子項の中で階級が一番高いものの階級をqと書く時、

$$[\![\mathsf{X}]\!] \leqq 2_{q+1}^{3l} - 3$$

但しここで　$2_0^n = n$, $2_{i+1}^n = 2^{2_i^n}$

8　結論

定理により、項の列$\{\,\mathsf{M}_i^n\,\}_{i=0,1,\cdots}$は型$n$の閉項の中で共終である。またF(Gx)≧ xであることから、列$\{\,\mathsf{G}_T\mathsf{M}_i\,\}_{i=0,1,\cdots}$もまた型$T$の閉項の中で共終であることが示される。

特に、型ωに対しては、系の示すように$[\![\mathsf{X}]\!] \leqq 2_{q+1}^{3l} - 3 \leqq 3l$

$\uparrow\uparrow q+2$という評価が得られる。この不等式に於いて、$\uparrow\uparrow$の第二引数に於けるqの一次の係数が1より小さくならないことは既に知られている。［参考文献2］その意味で、この不等式は最良の評価である。

9　参考文献

[1] Gandy, R. O. : Proof of strong normalization. *To H.B.Curry Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.* 1980

[2] Shwichtenberg, H. : Complexity of normalization in the pure typed lambda - calculus. *The L.E.J.Brower Centenary Syposium.* 1982

[3] Girard, J.-Y. et al. : Proofs and Types. 1989

[4] 竹内泉：修士論文，東北大学工学研究科（1993年提出予定）