数理解析研究所講究録
第 818 巻 1993 年 141-150

PTIME degrees の decidability problems について

神戸大自然科学　津田照子　(Teruko Tsuda)

1 (Honest) p-time degrees

$\Sigma = \{0,1\}$, Σ^* を Σ 上の有限列の集合とし, その要素を $x, y, z, \cdots$ で, 部分集合を $A, B, \cdots$ 等で表示する. $|x|$ は x の長さ, $\langle\ ,\ \rangle$ は invertible, p-time, pairing function で $|x|, |y| \leq |\langle x, y\rangle|$ を充たすものとする.

OTM (oracle Turing machine) が polynomially honest であるとは, polynomial p が存在して, 任意の input x と oracle query y に対して $|x| \leq p(|y|)$ であるときに言う.

A が B に p-T [hp-T] reducible, $A \leq_T^p B$ [$A \leq_T^{hp} B$] と書く, であるとは, A を accept するような p-time bounded (即ち, 任意の input x と oracle query y に対して $|y| \leq p(|x|)$ が成り立つ) [且つ, polynomially honest] で, B を oracle とする deterministic Turing machine が存在することである.

また, A が B に p-m [hp-m] reducible, $A \leq_m^p B$ [$A \leq_m^{hp} B$] と書く, であるとは, p-time computable [且つ, p-honest 即ち, $|x| \leq p(|f(x)|)$] function $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ [$f : \Sigma^* \to \Sigma^* \cup \{+,-\}$] が存在して $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ [$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \cup \{+\}$] なることである.

これらの reducibilities 間の関係は, 次のようである.

$$\begin{array}{ccc} A \leq_m^{hp} B & \Longrightarrow & A \leq_T^{hp} B \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A \leq_m^{p} B & \Longrightarrow & A \leq_T^{p} B \end{array}$$

各 reducibility による equivalent を $A \equiv_T^p B \Leftrightarrow A \leq_T^p B \ \& \ B \leq_T^p A$ 等とし, A の equivalent class を $\deg_T^p(A)$ 等と表わす. 以後, これらの degrees を単に $a, b, \cdots$ 等で表わす.

Recursive join を $A \oplus B = \{0x : x \in A\} \cup \{1x : x \in B\}$ で定義すると, 各 reducibility について $\deg_r(A \oplus B) = \deg_r(A) \vee \deg_r(B)$ となり, base set R に対して $\langle S, \leq_r \rangle$; $S = \{\deg_r(A) : A \in R\}$ は upper semi-lattice である.

$\langle S, \leq_r \rangle$ の elementary theory を $\mathrm{Th}(\langle S, \leq_r \rangle)$, その Π_n-theory (Π_n-sentences) を Π_n-$\mathrm{Th}(\langle S, \leq_r \rangle)$ とする.

Base sets は, 次のようなものを考えている.

$$\text{Base sets} \ : \left\{ \begin{array}{ll} REC & \text{(recursive sets)} \\ R & \text{(all sets)} \\ LOW & \text{(low sets)} \\ I & (\subseteq LOW) \end{array} \right.$$

ここで, A が low set であるとは, $A' \equiv_T \emptyset'$ なることである. また, I は, 次の条件を充たす. ([4])

(1) $A \in I$ で, B が recursive in A ならば $B \in I$

(2) $A, B \in I$ ならば $A \oplus B \in I$

上述の theories の decidability に関して得られている結果は, 以下の様である.

$\mathrm{Th}(\langle REC, \leq_T^p \rangle)$ は undecidable である. ([6])

$\mathrm{Th}(\langle REC, \leq_T^{hp} \rangle)$ は undecidable である. ([2])

Π_2-$\mathrm{Th}(\langle REC, \leq_T^p \rangle)$ は decidable である. ([7])

Π_2-Th($\langle I, \leq_T^{hp} \rangle$) は decidable である. ([4])(†)

Th($\langle REC, \leq_m^p \rangle$) は undecidable である. ([1])

Th($\langle REC, \leq_m^{hp} \rangle$) は undecidable である. ([2])

Th($\langle R, \leq_m^{hp} \rangle$) は undecidable である. ([5])

2 Construction

(†) で用いた方法で, REC 上の p-time degrees の structures の基本的なものは $\langle LOW, \leq_T^{hp} \rangle$ においても成立する.

例えば,

Strong minimal pair theorem ([3])

Splitting theorem

ここでは, splitting theorem の証明で, その構成方法を示す.

Splitting Theorem:

$\forall b, c$ s.t. $c < b$ $\exists a_o, a_1 \, [\, b = a_0 \vee a_1 \;\&\; c < a_0, a_1 < b \;\&\; a_0 | a_1 \,]$

Proof

$\{\, (\Phi_e, p_e) \,\}$ を p-honest OTMs の recursive enumeration, $B \in b$, $C \in c$ とする.

$A_0 \in a_0$, $A_1 \in a_1$ を 次のように構成する.

Requirements を,

R_{2e} : $A_0 \neq \Phi_e(C)$

R_{2e+1}: $A_1 \neq \Phi_e(C)$

とする. priority は R の suffix の順とする. 途中決定する switching points を $l_0, l_1, \ldots, l_N, \ldots$, $D_k = \{\, x : \; l_k \leq |x| < l_{k+1} \,\}$ とし, $t(N)$ を D_N で attack された requirement の suffix とする.

A_0, A_1 を,

$$A_0(x) = \begin{cases} B(x) & \text{if} \quad x \in D_N \ \& \ t(N) = 2e \\ C(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_1(x) = \begin{cases} B(x) & \text{if} \quad x \in D_N \ \& \ t(N) = 2e+1 \\ C(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する.

この定義と後の construction で, R_{2e}, R_{2e+1} を充たすようにすることにより, 同時にそれぞれ $B \neq \Phi_e(A_1)$, $B \neq \Phi_e(A_0)$ も充たされる.

候補となる witnesses の sets として, Finite sets の recursive sequences, $\{V_{e,s}\}$, $\{\widehat{V}_{e,s}\}$, を構成し, $V_e = \cup_s V_{e,s}$, $\widehat{V}_e = \cup_s \widehat{V}_{e,s}$ とすると, これらは r.e. であるから index function で $V_e = W_{\theta(e)}$, $\widehat{V}_e = W_{\hat{\theta}(e)}$ と表わせる.

$$V_e \subseteq [\langle x, n\rangle : \exists s\,[\,B_s(x) = 1 \ \& \ \Phi_e(\sigma_n, x) = 0 \ \& \ \sigma_n = C_s \restriction p_e^x]\,\}$$

$$\widehat{V}_e \subseteq [\langle x, n\rangle : \exists s\,[\,B_s(x) = 0 \ \& \ \Phi_e(\sigma_n, x) = 1 \ \& \ \sigma_n = C_s \restriction p_e^x]\,\}$$

となるように構成される. ここで, $p_e^x = \{\, y \in \Sigma^* : |x| \leq p_e(|y|) \ \& \ |y| \leq p_e(|x|)\,\}$ で, $\{\,\sigma_n\,\}$ は $\mathrm{dom}(\sigma) = p_e^x$, $\mathrm{rng}(\sigma) \subseteq \{\,0, 1\,\}$ なる形の finite functions の recursive enumeration とする.

また, witnesses を certify するために, 次の Δ_2^0 sets を用いる.

$$H = \{\, e' : \exists \langle x, n\rangle \in W_{e'}\,[\,x \in B \ \& \ \sigma_n = C \restriction p_e^x \text{ for some } e\,]\,\}$$

$$\widehat{H} = \{\, e' : \exists \langle x, n\rangle \in W_{e'}\,[\,x \notin B \ \& \ \sigma_n = C \restriction p_e^x \text{ for some } e\,]\,\}$$

Limit lemma から, recursive functions h, $\hat{h}$ が存在して,

$$H(x) = \lim_s h(x, s), \ \widehat{H}(x) = \lim_s \hat{h}(x, s)$$

同様に, B, C についても, $B(x) = \lim_s B_s(x)$, $C(x) = \lim_s C_s(x)$ とする.

Construction:

補助関数 $l(s)$, $r(s)$ はそれぞれ, stage s での対象となっている区間 D と requirement R の suffix を表わす. また, $LIST$ を certify されていない requirements のリスト, c を global counter とする.

Stage 0

$c = 0$, $l(0) = l_0 = 0$, $r(0) = 0$, $LIST = \{\text{all requirements}\}$, $V_{e,0} = \widehat{V}_{e,0} = \emptyset$ とし, (stage) 0 を testing phase とする.

Stage (s + 1)

$l(s) = l_N$ とし, $\mathrm{R}_{t(N)}$ を $LIST$ の中で highest priority を持つ requirement とする.

<u>Case 1</u>　s が testing phase である場合.

<u>Case 1.1</u>　$t(N) = 2e$ である場合.

<u>Case 1.1.1</u>　$p_e(l_N) \leq |x| < s + 1$ なる x で次の条件のいずれかを充たすものが存在する場合.

(1) $B_{s+1}(x) = 1$ & $\Phi_e(C_{s+1}, x) = 0$

(2) $B_{s+1}(x) = 0$ & $\Phi_e(C_{s+1}, x) = 1$

そのような最小の x を取る. (1) を充たすならば,

$$V_{2e,s+1} = V_{2e,s} \cup \{\langle x, n\rangle\}$$

(2) を充たすならば,

$$\widehat{V}_{2e,s+1} = \widehat{V}_{2e,s} \cup \{\langle x, n\rangle\}$$

とする. ここで, $\sigma_n = C_{s+1} \restriction p_e^x$.

<u>Case 1.1.1.1</u>　次のいずれかを充たす場合.

(i) $h(\theta(2e), s + 1) = 1$ and

$(\exists\langle x, n\rangle \in V_{2e,s+1})\,[\,B_{s+1}(x) = 1\ \&\ \sigma_n = C_{s+1} \restriction p_e^x\,]$

(ii) $\hat{h}(\hat{\theta}(2e), s + 1) = 1$ and

$(\exists\langle x, n\rangle \in \widehat{V}_{2e,s+1})\,[\,B_{s+1}(x) = 0\ \&\ \sigma_n = C_{s+1} \restriction p_e^x\,]$

このとき, R_{2e} は certify されたと言い, $N := N + 1$, $l_N =$ (current value of counter c) とする. そして, R_{2e} を $LIST$ から除き, $s + 1$ を waiting phase とする.

<u>Case 1.1.1.2</u>　Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.1.2　Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.2　$t(N) = 2e+1$ である場合.

Case 1.2.1　$p_e(l_N) \leq |x| < s+1$ なる x で次の条件のいずれかを充たすものが存在する場合.

(1) $B_{s+1}(x) = 1$ & $\Phi_e(C_{s+1}, x) = 0$

(2) $B_{s+1}(x) = 0$ & $\Phi_e(C_{s+1}, x) = 1$

そのような最小の x を取る. (1) を充たすならば,

$$V_{2e+1,s+1} = V_{2e+1,s} \cup \{\langle x, n\rangle\}$$

(2) を充たすならば,

$$\widehat{V}_{2e+1,s+1} = \widehat{V}_{2e+1,s} \cup \{\langle x, n\rangle\}$$

とする. ここで, $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x$.

Case 1.1.1.1　次のいずれかを充たす場合.

(i) $h(\theta(2e+1), s+1) = 1$ and

$(\exists \langle x, n\rangle \in V_{2e+1,s+1})\,[\,B_{s+1}(x) = 1$ & $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x\,]$

(ii) $\hat{h}(\hat{\theta}(2e+1), s+1) = 1$ and

$(\exists \langle x, n\rangle \in \widehat{V}_{2e+1,s+1})\,[\,B_{s+1}(x) = 0$ & $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x\,]$

このとき, R_{2e+1} は certify されたと言い, $N := N+1$, $l_N =$ (current valueof counter c) とする. そして, R_{2e+1} を *LIST* から除き, $s+1$ を waiting phase とする.

Case 1.1.1.2　Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.1.2　Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 2　s が waiting phase である場合.

Case 2.1　$s = l_N$ の場合.

$l(s) = l_N$ とおき, $s+1$ を checking phase とする.

Case 2.2　Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 3　s が checking phase である場合.

Case 3.1　次の条件を充たす requirement R_r $(r \leq r(s))$ が存在する場合.

(1) $h(\theta(r), s) = 0$ and

$(\forall \langle x, n\rangle \in V_{r,s})\,[\,B_s(x) = 0 \vee \sigma_n \neq C_s \upharpoonright p_e^x\,]$

(2) $\hat{h}(\hat{\theta}(r), s) = 0$ and

$(\forall \langle x, n\rangle \in \widehat{V}_{r,s})\,[\,B_s(x) = 1 \vee \sigma_n \neq C_s \upharpoonright p_e^x\,]$

このとき, R_r は injure されたと言い, そのような最小の r を取り, R_r を $LIST$ に入れる. $s+1$ を testing phase とする.

Case 3.2　Otherwise.

$r(s+1)$ を $\mathrm{R}_{r(s)}$ の次の requirement の suffix とし, $s+1$ を testing phase とする.

End of Construction.

Verification:

Claim 1　Construction で, testing phase から waiting phase に必ず移る.

Proof　Case 1.1 の場合を考える. Case 1.2 の場合も同様. $B \not\leq_T^{hp} C$ であるから, $p_e(l_N) \leq |x|$, $B(x) \neq \Phi_e(C, x)$ なる x が存在するので, そのような最小の x を取る. 例えば, $B(x) = 1$, $\Phi_e(C, x) = 0$ とすると, 十分先の s では, $B_s(x) = B(x)$, $C_s \upharpoonright p_e^x = C \upharpoonright p_e^x$ であるから, Case 1.1.1 (1) が充たされ, $\langle x, n\rangle \in V_{2e} = W_{\theta(2e)}$, $x \in B$, $\sigma_n = C \upharpoonright p_e^x$. 従って, $\theta(2e) \in H$. 若し, い

つまでも Case 1.1.1.1 の条件が充たされないとすると, $h(\theta(2e))=0$, 即ち, $\theta(2e)\notin H$ となり, 矛盾する. □

Claim 2　各 requiremment は, 高々有限回しか attack されない.

Proof　R_r を, 無限回 attack されるような requirement の中で highest priority を持つものとすると, ある stage から先では R_r より higher priority を持つ requirement は attack されない. また, さらに十分先の stage s では, $H(\theta(r))=h(\theta(r),s)$, $\widehat{H}(\hat{\theta}(r))=\hat{h}(\hat{\theta}(r),s)$ である. Case 3.1 より, それより先の stage s' で R_r は injure されて, $h(\theta(r),s')=\hat{h}(\hat{\theta}(r),s')=0$. ところが, 次の stage $s'+1$ で R_r は attack されるから, Claim 1 より, ある $t>s'+1$ で $h(\theta(r),t)=1$ または $\hat{h}(\hat{\theta}(r),t)=1$ となるが, これは矛盾である. □

Claim 3　各 requirement は充たされる.

Proof　R_{2e} が充たされることを示す. R_{2e+1} の場合も同様.
若し, $H(\theta(2e))=\widehat{H}(\hat{\theta}(2e))=0$ とすると,

$\forall\langle x,n\rangle\in V_{2e}\,[\,B(x)=0\ \vee\ \sigma_n\neq C\restriction p_e^x\,]$, 且つ

$\forall\langle x,n\rangle\in \widehat{V}_{2e}\,[\,B(x)=1\ \vee\ \sigma_n\neq C\restriction p_e^x\,]$.

また, さらに十分先の stage s では, $H(\theta(2e))=h(\theta(2e),s)$, $\widehat{H}(\hat{\theta}(2e))=\hat{h}(\hat{\theta}(2e),s)$ である. Claim 2 から R_{2e} は有限回しか attack されないから, 十分先の s では $V_{2e,s}$, $\widehat{V}_{2e,s}$ は fix する. 従って, それらよりさらに十分先の t では,

$\forall\langle x,n\rangle\in V_{2e,t}\cup\widehat{V}_{2e,t}\,[\,B_t(x)=B(x)\ \&\ C_t\restriction p_e^x=C\restriction p_e^x\,]$

となり, 上式より, Case 3.1 の条件が充たされ, R_{2e} は injure されることになり, 矛盾する.

つまり, $H(\theta(2e))=1$ あるいは $\widehat{H}(\hat{\theta}(2e))=1$ である. 例えば, $H(\theta(2e))=1$ とする. $B(x)=1\ \&\ \sigma_n=C\restriction p_e^x$ なる $\langle x,n\rangle\in V_{2e}$ を取れば, ある stage

$s+1$ で, $\langle x,n\rangle \in V_{2e,s+1} - V_{2e,s}$. 従って, $B_{s+1}(x) = 1$, $\Phi_e(C_{s+1},x) = 0$, $\sigma_n = C_{s+1}\restriction p_e^x$. ところが $C\restriction p_e^x = C_{s+1}\restriction p_e^x = \sigma_n$ であるから, $\Phi_e(C,x) = 0$ となり, 確かに $A_0(x) = B(x) \neq \Phi_e(C,x)$. □

以上の A_0, A_1 の構成から, $c < a_0, a_1 < b$. 最後に, $b \leq \deg_T^{hp}(A_0 \oplus A_1) = (a_0 \vee a_1) \leq b$ なることは, input x に対して, $l_N \leq |x| < l_N + 1$ なる N, $t(N)$ を計算して, $t(N) = 2e$ なら $y = 0x$, $t(N) = 2e+1$ なら $y = 1x$ とすれば, $B(x) = A_0 \oplus A_1(y)$ より左不等式が, また, $C \leq_T^{hp} B$ より右不等式が得られる. $a_0 \mid a_1$ は明らか. □□

3 Problems

PTIME degrees の structures を調べる目的の 1 つは, 先に挙げた decidability に関する結果に続く open problems, 例えば,

- $\mathrm{Th}(\langle S, \leq_T^{hp}\rangle)$; $S = I, LOW, R,$ or Δ_2^0 は undecidable か ?
- Π_3-$\mathrm{Th}(\langle S, \leq_T^{hp}\rangle)$ は undecidable か ?

等を 既知の undecidability に帰着させて考えるためである.

つまり, (finite) partial orderings の theory の undecidability から, language $L(\leq)$ の formula φ で

$\forall\langle P, \leq_P\rangle$ p.o. $\exists\bar{a}$ (finite parameters) s.t.

$$\langle \{\, b \in S : \langle S, \leq_r\rangle \models \varphi_{\bar{x},y}(\bar{a}, b)\,\}, \leq_r\rangle \simeq \langle P, \leq_P\rangle$$

なるものを見つけることである.

References

[1] K. Ambos-Spies and A. Nies, *The Theory of the Polynomial Many-One Degrees of Recursive Sets is Undecidable*, Proc. STACS'92, LNCS 577, 1992

[2] K. Ambos-Spies and D. Yang, *Honest polynomial time reducibilities* (announce)

[3] K. Aoki, J. Shinoda, and T. Tsuda, *Strong minimal pair theorem for the honest polynomial degrees of* Δ_2^0 *low sets*, J.Math.Soc.Japan, vol.44, no.3, 1992

[4] K. Aoki, J. Shinoda, and T. Tsuda, *On* Π_2 *theories of hp-T degrees of low sets*, Preprint Series, Nagoya Univ., No. 1, 1992 (to appear)

[5] R. Downey, W. Gasarch, and M. Moses, *The Structure of the Honest Polynomial m-degrees* (to appear)

[6] J. Shinoda and T. Slaman, *On the Theory of the PTIME Degrees of the Recursive Sets*, J. Comp.Sys.Sci., vol. 41, No. 3, 1990

[7] R. Shore and T. Slaman, *The p-T-degrees of the recursive sets: lattice embeddings, extensions of embeddings and two-quantifier theory*, Theor.Comp.Sci. 97, 1992