

## 関数が星型であるための 十分条件について

坂口 泉 一 (奈良産業大学)

### 1. 序文

Petru T. Mocanu [1] はもっと広い定理の系としてではあるが、関数が星型であるための十分条件として、次のような結果を導いている。

THEOREM A. 関数  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  が開単位円板  $U$  において正則で、条件

$$(1.1) \quad |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{3}, \quad z \in U$$

又は条件

$$(1.2) \quad |zf''(z)/f'(z)| < 2, \quad z \in U$$

を満たすときは、 $f(z)$  は  $U$  において星型である。

本ノートでは、関数が  $f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \dots$  の形をしているときは条件 (1.1), (1.2) はそれぞれ次の (1.3), (1.4) のように改良できることを示す。

$$(1.3) \quad |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{p(p+2)}, \quad z \in U,$$

$$(1.4) \quad |zf''(z)/f'(z)| < p+1, \quad z \in U.$$

### 2. 準備

LEMMA 1. 関数  $f(z) = a_p z^p + \dots$ ,  $p \geq 1$ , が  $|z| \leq |z_1|$  において正則で、

$$(2.1) \quad |f(z)| < |f(z_1)|, \quad |z| < |z_1|$$

を満たすときは、

$$(2.2) \quad z_1 f'(z_1)/f(z_1) \geq p$$

である。

証明.  $f(z) = z^{p-1} F(z)$ ,  $F(z) = a_p z + \dots$  とおくと、

$$z_1 f'(z_1)/f(z_1) = p-1 + z_1 F'(z_1)/F(z_1).$$

$F(z)$  に対して Jack の Lemm を使うと、 $z_1 F'(z_1)/F(z_1) \geq 1$ . 故に (2.2) が成り立つ。

(注) この Lemma は Jack の Lemma の改良であり、同時に一般化にもなっている。なお Fukui-Sakaguchi [2] 参照。

LEMMA 2. 関数  $h(z) = 1 + c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots$ ,  $p \geq 1$ , が  $|z| \leq |z_1|$  において正則で、2つの条件

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} h(z) > 0, \quad |z| < |z_1|,$$

$$(2.4) \quad \operatorname{Re} h(z_1) = 0 \quad (\text{i.e. } h(z_1) \text{ は純虚数})$$

を満たすときは、

$$(2.5) \quad z_1 h'(z_1) \leq -p(1 + |h(z_1)|^2)/2$$

である。

証明. 関数  $w(z) = (h(z)-1)/(h(z)+1) = (c_p/2)z^p + \dots$  を考えれば、仮定により  $w(z)$  は  $|z| \leq |z_1|$  において正則で、かつ

$$|w(z)| < |w(z_1)| = 1, \quad |z| < |z_1|.$$

それ故、Lemma 1 により

$$(2.6) \quad z_1 w'(z_1)/w(z_1) \geq p$$

である。所が  $z_1 w'(z_1)/w(z_1) = 2z_1 h'(z_1)/(h(z_1)^2 - 1)$  であって、 $h(z_1)$  は純虚数であるから、(2.6) により (2.5) が得られる。

(注) この Lemma 2 は我々が Miller-Mocanu の Lemma と呼んでいるものの改良であり、同時に一般化にもなっている。Lemma 2 は Lemma 1 を使って証明できたが、逆に Lemma 1 は Lemma 2 を使って証明できるのである。その証明を以下に示そう。

$f(z)$  が Lemma 1 の仮定を満たすものとする。関数

$$t(z) = \{1 - f(z)/f(z_1)\} / \{1 + f(z)/f(z_1)\} = 1 + b_p z^p + \dots$$

を作れば、 $t(z)$  は

$$\operatorname{Re} t(z) > 0, \quad |z| < |z_1| \quad \text{及び} \quad \operatorname{Re} t(z_1) = 0$$

を満たす。それ故 Lemma 2 により

$$z_1 t'(z_1) \leq -p(1 + |t(z_1)|^2)/2.$$

然るに、等式  $t(z_1)=0$  及び  $z_1 t'(z_1) = -z_1 f'(z_1)/2f(z_1)$  が成り立つ。

よって 
$$z_1 f'(z_1)/f(z_1) \geq p.$$

LEMMA 3. 関数  $f(z) = a_p z^p + \dots$ ,  $p \geq 1$ , が開単位円板  $U$  において正則で、

$$(2.7) \quad |\operatorname{Im} f(z)| < K, \quad K > 0, \quad z \in U$$

を満たすときは、

$$(2.8) \quad |\operatorname{Im} f(z)| \leq (4K/\pi) \operatorname{Tan}^{-1} |z|^p, \quad z \in U$$

である。この限界は sharp である。

証明. 関数  $g(z) = \pi f(z)/2K = (a_p \pi/2K) z^p + \dots$  を考えると、

$$|\operatorname{Im} g(z)| < \pi/2, \quad z \in U$$

である。ここで  $w(z) = \{\exp(g(z)) - 1\} / \{\exp(g(z)) + 1\}$  とおく。

$$|\arg \exp(g(z))| = |\operatorname{Im} g(z)| < \pi/2, \quad z \in U \quad \text{なので、}$$

$$\operatorname{Re} \exp(g(z)) > 0, \quad z \in U.$$

それ故、 $w(z)$  は  $U$  において正則で、そこにおいて  $|w(z)| < 1$ 。

加えて  $w(z)$  は原点で  $p$  位の零点を持つので、一般化された Schwarz の Lemma により

$$|w(z)| \leq |z|^p, \quad z \in U.$$

それ故、 $|z| = r < 1$  に対して

$$|\arg\{(1+w(z))/(1-w(z))\}| \leq \max_{|z|=r} |\arg\{(1+z^p)/(1-z^p)\}|, \quad (*)$$

ここで  $(1+z^p)/(1-z^p)$ ,  $|z| \leq r$ , は点  $(1+r^{2p})/(1-r^{2p})$  を中心とする、半径  $2r^p/(1-r^{2p})$  の閉円板上にあるから、

$$(*) = \operatorname{Tan}^{-1} \{2r^p/(1-r^{2p})\} = 2 \operatorname{Tan}^{-1} r^p.$$

然るに、 $\exp(g(z)) = (1+w(z))/(1-w(z))$  .

よって、
$$|\operatorname{Im} g(z)| = |\arg\{(1+w(z))/(1-w(z))\}| \leq 2 \operatorname{Tan}^{-1} |z|^p, \quad z \in U.$$

故に、
$$|\operatorname{Im} f(z)| = (2K/\pi) |\operatorname{Im} g(z)| \leq (4K/\pi) \operatorname{Tan}^{-1} |z|^p, \quad z \in U.$$

これが sharp であることは、 $f(z) = (2K/\pi) \log\{(1+z^p)/(1-z^p)\}$  の場合を考えれば、

明らかである。

LEMMA 4. 関数  $f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ ,  $p \geq 1$ , が開単位円板  $U$  において正則で,

$$(2.9) \quad |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| < p\pi^2/4, \quad z \in U$$

を満たすときは,  $f(z)$  は原点以外には  $U$  内で零点を持たない。

証明.  $f(z)$  が原点以外に零点  $c = \rho e^{i\alpha}$ ,  $0 < \rho < 1$ , を持つものと仮定する。

原点から  $c$  に至る線分を  $L$  で表せば,  $f(z)$  による  $L$  の像は原点から出て原点に戻る閉曲線になる。他方  $f(z)$  の形から  $f'(0) \neq 0$  であり, かつ (2.9) により  $f'(z)$  は原点以外では  $U$  内で  $0$  になれないから, この閉曲線は, 方向が連続的に変る接線ベクトル  $df(z)$  を持ち, その方向の全変動は  $\pi$  以上でなければならない。よって

$$(2.10) \quad \int_L |d \arg df(z)| \geq \pi.$$

$$\text{所が, (2.10) の左辺} = \int_0^{\rho} |d \arg(f'(z)e^{i\alpha} dr)|, \quad z = re^{i\alpha},$$

$$= \int_L |d \operatorname{Im}(\log f'(z))| = \int_L |\operatorname{Im} d \log f'(z)|$$

$$= \int_0^{\rho} |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| (1/r) dr, \quad z = re^{i\alpha}, \quad (*)$$

ここで  $zf''(z)/f'(z)$  の展開式は  $b_p z^p + \dots$  の形であり, 加えて (2.9) が成り立つので, Lemma 3 により

$$(*) \leq \int_0^{\rho} (p\pi \tan^{-1} r^p) (1/r) dr,$$

更に  $r > 0$  のときは  $\tan^{-1} r^p < r^p$  なので,

$$< \int_0^{\rho} p\pi r^{p-1} dr$$

$$= \pi.$$

これは (2.10) に反する。よって,  $f(z)$  は原点以外には  $U$  内で零点を持たない。

### 3. 定理

THEOREM 1. 関数  $f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \dots$  が開単位円板  $U$  において正則で、

$$(3.1) \quad |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{p(p+2)}, \quad z \in U$$

を満たすときは、 $f(z)$  は  $U$  において星型である。

証明. 不等式  $\sqrt{p(p+2)} < p\pi^2/4$  が成り立つことは容易に分かるので、 $f(z)$  は条件 (2.9) を満たしている。それ故 Lemm 4 により、 $f(z)$  は原点以外には  $U$  内で零点を持たない。よって、関数

$$(3.2) \quad h(z) = zf'(z)/f(z) = 1 + pa_{p+1} z^p + \dots$$

は  $U$  において正則である。

いま仮に  $\operatorname{Re} h(z) \leq 0$  となるような  $z$  が  $U$  内にあるとすれば、

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} h(z) > 0 \quad \text{for } |z| < |z_1| \quad \text{で、かつ } \operatorname{Re} h(z_1) = 0$$

を満たす点  $z_1 \in U$  が存在する。

このとき  $h(z_1) = iu$ ,  $z_1 h'(z_1) = v$  とおけば、Lemma 2 により  $u, v$  は実数で、

$$(3.4) \quad v \leq -p(1 + u^2)/2$$

を満たす。なお (3.1) により  $f'(z)$  は原点以外では  $U$  内で零点を持たないことが分かるが、加えて  $f'(0)=1$  なので、 $U$  内で  $f'(z)$  は  $0$  にはならない。それ故  $h(z)$  も  $U$  内で  $0$  になることはなく、従って  $u \neq 0$  である。

ここで等式

$$(3.5) \quad zf''(z)/f'(z) = -1 + h(z) + zh'(z)/h(z)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}\{zf''(z_1)/f'(z_1)\}| &= |u - v/u|, \quad (3.4) \text{ を使って,} \\ &\geq \{u^2 + p(1+u^2)/2\}/|u| \\ &= \{|u|(p+2) + p/|u|\}/2 \\ &\geq \sqrt{p(p+2)}. \end{aligned}$$

これは (3.1) に反する。よって  $U$  内で  $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re}\{zf'(z)/f(z)\} > 0$  でなければならぬ。

THEOREM 2. Theorem 1 において, (3.1) の代りに

$$(3.6) \quad |zf''(z)/f'(z)| < p+1, \quad z \in U$$

を仮定しても, 同じ結論が得られる。即ち,  $f(z)$  は  $U$  において星型である。

証明.  $p+1 < p\pi^2/4$  であるから,  $f(z)$  は (2.9) を満たしている。

それ故, Theorem 1 の証明で用いたのと同様の議論がここでも展開できる。(3.2) で定義される  $h(z)$  と, (3.3) を満たすと仮定される点  $z_1$  と,  $h(z_1) = iu$  及び  $z_1 h'(z_1) = v$  で定まる実数  $u, v$  に対して, 等式 (3.5) を用いると,

$$\begin{aligned} |z_1 f''(z_1)/f'(z_1)|^2 &= |-1 + i(u-v/u)|^2 \\ &= 1 + u^2 - 2v + v^2/u^2, \quad (3.4) \text{ を用いて,} \\ &\geq 1 + u^2 + p(1+u^2) + p^2(1+u^2)^2/4u^2 \\ &= (p+1)^2 + \{(p+2)u - p/u\}^2/4 \\ &\geq (p+1)^2. \end{aligned}$$

これは (3.6) に反する。それ故, Theorem 1 と同様に  $f(z)$  は  $U$  において星型でなければならない。

### 参考文献

- [1] P. T. Mocanu, Some integral operators and starlike functions, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 31 (1986), 231-235.
- [2] S. Fukui and K. Sakaguchi, An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Nat. Sci., 29 (1980), 1-3.

Department of Mathematics

Nara Sangyo University

Sango-cho, Nara-ken, Japan