数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 70-83

非可換接続と超対称性

信州大学理学部　浅田　明
(Akira Asada)

§1. 通常の接続

有限次元 Lie 群を構造群とする fibre bundle の接続については、[9] 等良書が多いが、こゝでは後で便利な様に、普通とは少し違った形で解説する。

M を C^∞-級関数による1の分割を持つ多様体（Hilbert 多様体なら良い），$\xi=\{g_{UV}\}$ を M 上の G-bundle とする。G は簡単の為 $GL(n,\mathbf{C})$ 又は $U(n)$ とし，G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と書く。次の問題を考える。

問題　M の外微分 d を ξ の cross-section に働く様 lift せよ。

$dg_{UV}\neq 0$ の時，この問題はそのまゝでは解けない。そこで d に低階摂動 θ_U を加える。θ_U は U 上の 0 階微分作用素として，$\mathfrak{g}$ に値を取る 1-形式とする（$d(\theta\wedge\cdot)=d\theta\wedge\cdot-\theta\wedge d\cdot$ と計算する）。

定義　U 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る 1-形式の集まり $\{\theta_U\}$ が

(1) $$(d+\theta_u)g_{uv} = g_{uv}(d+\theta_v)$$

を満たす時 $\{\theta_u\}$ を ($\xi =$) $\{g_{uv}\}$ の接続(形式)と言う．

$\omega_{uv} = g_{uv}^{-1} d g_{uv}$ とすれば

(2) $$\omega_{vw} - \omega_{uw} + g_{vw}^{-1}\omega_{uv}g_{vw} = 0$$

となる事から 1 の分割を使って接続の存在が解る．$\{\theta_u\}$ が $\{g_{uv}\}$ の接続なら $\{h_u\}$ による $\{\theta_u\}$ の gauge 変換 $\{h_u^{-1}\theta_u h_u + h_u^{-1}dh_u\}$ が $\{h_u^{-1}g_{uv}h_v\}$ の接続になる．又 $\{\theta_u\}$, $\{\theta_u'\}$ が $\{g_{uv}\}$ の接続なら，$\theta_u' = \theta_u + \eta_u$ と置いて，$\eta_v = g_{uv}^{-1}\eta_u g_{uv}$ となるから，接続の全体は affin 空間になる．

$\mathcal{U}$ が単連結の時，$\theta_u = h_u^{-1}dh_u$ と書ける為の必要十分条件は $d\theta_u + \theta_u \wedge \theta_u = 0$ であり，$\theta_u = h_u^{-1}dh_u$ と書ければ $h_u g_{uv} h_v^{-1}$ は定数になる．従って ξ は flat で M の基本群の G への表現から得られる．

<u>定義</u>　$\Theta_u = d\theta_u + \theta_u\wedge\theta_u$ と置き $\{\Theta_u\}$ を $\{\theta_u\}$ の曲率と呼ぶ．

曲率は次の性質を持つ．

(i) $\Theta_v = g_{uv}^{-1}\Theta_u g_{uv}$,

(ii) $d\Theta_u + [\theta_u, \Theta_u] = 0$,　$[\theta, \Theta] = \theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\theta$

(iii) $\mathrm{tr}(\Theta_u^p)$ は M 上の閉 2p-形式で，その de Rham 類は ξ だけで定まり ξ の接続の取り方によらない．

(i), (ii) は一般の Lie 群で成立し，(ii) は Bianchi 恒等式と呼ばれている．(iii) は $G = GL(n, C)$ 又は $U(n)$ の時成立し

Chernの定理(の前半)である．曲率が0となる接続 $\{\theta_u\}$ に対し $\mathrm{tr}(\theta_u^{2p+1})$ を考える事も重要である([3], [3]′)．

以上の説明は[12]でのYang-Mills場の導入と同じで，[1]，[2]での微分作用素の ξ のcross-sectionへのliftも同じ考えに基づいている．

§2．無限次元群を構造群とするbundleの接続

$\xi=\{g_{uv}\}$ をM上のG-bundle，Xを多様体とする時

$$(g_{uv}^{X}(f))(x)=g_{uv}(f(x)),\quad x\in X,$$

として，$\xi^X=\{g_{uv}^X\}$ と置けばMap(X, M)上のMap(X, G)-bundleが得られる．特に ξ がMの接bundleなら ξ^X はMap(X, M)の接bundleになる．Map(X, M)で写像をSobolev p-級 ($p\geq \dim X/2$) に取ればHilbert多様体となるが，Kuiperの定理([10])から，Hilbert bundleは構造群をunitary作用素全体の群等に取るとtrivialになるから，構造群を小さく取る必要がある．上記の事は，Map(X, M)の接bundleの自然な構造群はMap(X, G)である事を示している．

次に $\xi=\{g_{uv}\}$ をM上のMap(X, G)-bundleとすれば

$$g_{uv}^{\natural}(m,x)=(g_{uv}(m))(x),\quad m\in M,\ x\in X,$$

として，M×X上のG-bundle $\xi^{\natural}=\{g_{uv}^{\natural}\}$ が得られる．ここで ξ の接続と $\xi^{\natural}$ の接続との関係を調べる．

ξの接続はU上の$Map(X, \mathfrak{g})$に値を取る1-形式$\{\theta_u\}$である．局所座標を使って$\theta_u = \sum \theta_{u,i} dm_i$と置き$\theta_u^\natural = \sum \theta_{u,i}^\natural dm_i$とすれば，接続の定義から

$$(g_{uv}^\natural)^{-1} d^M g_{uv}^\natural = \theta_v^\natural - (g_{uv}^\natural)^{-1} \theta_u^\natural g_{uv}^\natural$$

である．但しd^Mは$M \times X$の，M-方向の外微分である．$\xi^\natural$の接続$\{A_u\}$を$A_u = \sum A_{u,i} dm_i + \sum A_{u,j} dx_j$と書いて，$A_u^M = \sum A_{u,i} dm_i$，$A_u^X = \sum A_{u,j} dx_j$とすれば

$$(g_{uv}^\natural)^{-1} d^M g_{uv}^\natural = A_v^M - (g_{uv}^\natural)^{-1} A_u^M g_{uv}^\natural,$$

$$(g_{uv}^\natural)^{-1} d^X g_{uv}^\natural = A_v^X - (g_{uv}^\natural)^{-1} A_u^X g_{uv}^\natural,$$

だから，$\{\theta_u\}$から得られる情報は，$\{A_u^X\}$から得られるべき情報が不足している．実際$X = S^1$の場合の弦理論(string 理論)で最も困難だったのは，この失なわれた部分を恢復する事であった([3], [3′])．[3]での議論は，古典論的に$\{A_u^X\}$の情報を恢復する事だったが，これをそのまゝ高次元のXに拡張するのは難しい様である．これに対し，一般のXに対し量子論的に$\{A_u^X\}$の情報を恢復するのが非可換接続である．

§3 群GL_pとU_p及びConnesの量子化微分形式

$\mathcal{H}$をpolarization $\varepsilon = P_+ - P_-$を持つ可分なHilbert空間とする．こゝでP_+, P_-は射影作用素で$P_+ \cdot P_- = 0$，$P_+ + P_- = I$（恒等作用素），$P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$，$P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$とすれば$\mathcal{H}_+ \cong \mathcal{H}_-$

である．具体的には X を compact spin 多様体，$\mathcal{H}$ をその上の (vector 値) spinor 場の作る Hilbert 空間，D を Dirac 作用素 (必要なら質量項を加えて 0-mode はないとする) とした時 $\varepsilon = |D|^{-1}D$ と取る．

$\mathcal{H}$ の有界線形作用素全体の作る環を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，その中で逆を持つ元全体の作る群を $GL(\mathcal{H})$ とする．Kuiper の定理 ([10]) から $GL(\mathcal{H})$ は可縮である．

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は non-trivial な ideal を持ち，その構造は Calkin によって決定されている ([15], § 2)．T が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal に属すれば T は compact 作用素で $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ があって $T = \sum \mu_n(\ ,\psi_n)\phi_n$ と本質的に一意にかける．こゝで $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq 0$ は T の特異値である．特異値については Horn の不等式 ([15], 定理 1.13)

$$\prod \mu_n(TS) \leqq \prod \mu_n(T)\mu_n(S)$$

が成立する．T を compact 作用素とする時

$$I_p = \{T \mid \sum \mu_n(T)^p < \infty\},\quad p \geqq 0$$

と置けば I_p は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal で p-次 Schatten ideal と呼ばれる．$p \geqq 1$ であれば I_p は ℓ^p-型の norm が入り Banach 空間になるが $p > 0$ でも ℓ^p-型 norm について

$$\|T+S\|_p \leqq 2^{1/p}(\|T\|_p + \|S\|_p)$$

が成立するから位相が入り，Horn の不等式から

(3) $\quad I_p{}^k = I_{p/k}$

が成立する．尚 I_0 は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の最小の ideal である．

<u>定義</u> $GL(\mathcal{H})$ の部分群 GL_p, $\mathcal{U}_p$, $p \geq 0$ を

$$GL_p = \{T \in GL(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] = \varepsilon T - T\varepsilon \in I_p\},$$

$$\mathcal{U}_p = \{T \in GL_p,\ T \text{は unitary 作用素}\}$$

で定義する．

<u>定理</u>([11]) X が d-次元 compact spin 多様体，$\mathcal{H}$ を G の表現空間に値を取る spinor 場の作る Hilbert 空間，$\varepsilon = |D|^{-1}D$ とすれば $\mathrm{Map}(X, G) \subset GL_p$, $p \geq d/2$, である．特に G が unitary 群（の部分群）であれば $\mathrm{Map}(X, G) \subset \mathcal{U}_p$ となる．

$p = 1$ の時が GL_{res} だが $p > 1$ の場合については [7], [11] 等で研究されている．

最後に次の Connes による定理を引用しておく．

<u>定理</u>([6]) X を次元が 2 以上の spin^c 多様体，$\mathcal{H}$, ε は上と同じとする．$\mathcal{A}$, A^1 を X の C^∞-関数及び 1-形式の空間，$\Omega^1 = \{\sum a[\varepsilon, b],\ a, b \in \mathcal{A}\}$ とすれば $c(i[\varepsilon, a]) = da$ となる Ω^1 から A^1 への $\mathcal{A}$-module map が一意的に存在する．

この事から Connes は $\sum a[\varepsilon, b]$ の形の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の（実際は I_p, $p > d/2$, の）元を量子化 1-形式と呼んでいる．$\Omega^1 \subset I_p$ から I_p^k の元は量子化 k-形式の様だが，ε からきまる超対称性から $2k-1$-形式と $2k$-形式と思った方が良い様である．

§4　非可換接続

Kuiper の定理([10])から次の補題が成り立つ.

補題　$\xi=\{g_{uv}\}$ を GL_p-bundle とする. $\mathcal{U}_p$ に属する polarization の値を取る U 上の関数の集まり $\{\varepsilon_u\}$ があって

$$\varepsilon_u g_{uv} = g_{uv}\,\varepsilon_v$$

となれば ξ は trivial である.

この補題から, ε を ξ の fibre $\mathcal{H}$ に global に定義する事は一般には出来ない. そこで §1 と同様に次の様に定義する.

定義　U から I_p への関数の集まり $\{K_u\}$ が

$$(4)\qquad (\varepsilon+K_u)\,g_{uv} = g_{uv}\,(\varepsilon+K_v)$$

をみたす時 $\{K_u\}$ を $\xi=\{g_{uv}\}$ の非可換接続と呼ぶ.

ξ の底多様体 M が只一点の時, この定義は非可換微分幾何での定義と一致する([5], [6], [13], [14]).

通常の接続と同様に $\omega_{uv}=g_{uv}^{-1}[\varepsilon, g_{uv}]$ と置くと

$$\omega_{vw}-\omega_{uw}+g_{vw}^{-1}\omega_{uv}\,g_{vw}=0$$

となるから(1の分割を使って)非可換接続の存在が解る.

又非可換 gauge 変換 $h(K)$ は

$$h(K) = h^{-1}Kh + h^{-1}[\varepsilon, h]$$

で, 例えば $\{K_u\}$ が $\{g_{uv}\}$ の非可換接続なら $\{h_u(K_u)\}$ が $\{h_u^{-1}g_{uv}h_v\}$ の非可換接続になる.

定義　$\mathsf{K}_u=\varepsilon K_u+K_u\varepsilon+K_u^2$ $(=(\varepsilon+K_u)^2-\varepsilon^2)$ と置き, $\{\mathsf{K}_u\}$ を

$\{K_u\}$の(非可換)曲率と呼ぶ.

通常の曲率と同様に

$$K_V = g_{uv}^{-1} K_u g_{uv} \quad , \quad (\varepsilon + K_u) K_u = K_u (\varepsilon + K_u)$$

が成り立つが更に次の定理が成立する.

<u>定理</u>　ξをU_p-bundle, ξの非可換曲率がHermite作用素であるとする. $(I+K_u(x))$がすべての$x \in M$について逆を持てば, ξはtrivialである.

<u>定理</u>　$p > q > 0$とする. 上と同じ仮定で$K_u(x) \in I_q$であればξはU_q-bundleと同値である.

始めの定理はGL_p-bundleでも正しいと思はれるが, 後の定理の証明には摂動論のRellichの定理([8])を使うので, GL_p-bundleでも正しいかは解らない.

$K_u(x) \in I_p$だから$I + K_u(x)$にはregularized determinant $\det_p$が定義出来る([7], [8], [15]). これについて

(5)　$$\det_p (I + K_u(x)) = \det_p (I + K_v(x)), \quad x \in U \cap V$$

だからM上の関数が得られ, この関数の零点(因子)がξを決定する答だが, まだ解っていない.

§5　<u>量子化ghost場のcohomology</u>

$g \in GL_p$の$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$への作用を$g(T) = g^{-1} T g$とし, $I_p{}^k$をfibreとするξのassociate bundleを$\xi_{I_p, k}$,

$$\xi_{I_p}(k) = \xi_{I_p,k} / \xi_{I_p,k+1}$$

とする．$\xi_{I_p}(k)$の cross-section は $\xi_{I_p,k}$ の cross-section を mod. $I_p{}^{k+1}$ で考えたものとし，その germ の層を $C_d(\xi_{I_p}(k))$ と書く．非可換接続が存在する事から

$$\delta_\pm : C_d(\xi_{I_p}(k)) \to C_d(\xi_{I_p}(k)), \quad \delta_\pm T = \varepsilon T \pm T \varepsilon,$$

が定義出来

$$\delta_\pm \delta_\mp = 0, \quad \delta_\pm T = 0 \text{ なら local に } T = \delta_\mp S,$$

である．$\xi_{I_p}(k)$ の cross-section は M 上の（ghost 数 $2k-1$, $2k$ の）ghost 場の Connes の意味での量子化と思える（[4]）．$\xi_{I_p}(k)$ には ε で超対称性が入り，$\delta_\pm$ はそれぞれ even, 及び odd の微分（の量子化）である．

<u>定義</u>　上記の記号で次の cohomology 群を定義する．

$$H^{2k-1}(M, \xi_{I_p}) = H^0(M, \delta_- C_d(\xi_{I_p}(k))) / \delta_- H^0(M, C_d(\xi_{I_p}(k))),$$

$$H^{2k}(M, \xi_{I_p}) = H^0(M, \delta_+ C_d(\xi_{I_p}(k))) / \delta_+ H^0(M, C_d(\xi_{I_p}(k))).$$

<u>定理</u>　$\xi_{I_p}(k)$ が trivial なら $H^{2k-1}(M, \xi_{I_p}) = H^{2k}(M, \xi_{I_p}) = \{0\}$.

$k \geq p$ なら $I_p{}^k$ の元に trace が定義出来るが，この値は $I_p{}^{k+1}$ の元による摂動で変るから $C_d(\xi_{I_p}(k))$ の元に対して trace は定義出来ない．T が Hermite 作用素で $T \in I_p{}^k$ の時，T の η-関数 η_T を

$$\eta_T(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(T)} \mathrm{sgn}\lambda\, |\lambda|^s$$

で定義すれば η_T は $\mathrm{Re}\, s \geq p/k$ で正則である．もし η_T が，

$\mathrm{Re}\, s > p/(k+1)$ 迄解析接されれば，η_T の $p/k \geq \mathrm{Re}\, s > p/(k+1)$ での極とそこでの留数は I_p^{k+1} の元による摂動で不変だから，η-函数を用いて，上記の cohomology をもう少し計算しやすく変形出来る可能性がある．

§6　非可換 Chern 類

定理　ξ を GL_p-bundle，$\{K_u\}$ をその非可換曲率とすれば任意の自然数 k について $\{K_u{}^k\} \in H^0(M, \delta + C_d(\xi_{I_p(k)}))$ であり，その $H^{2k}(M, \xi_{I_p})$ での class は ξ で定まり，非可換接続の取り方によらない．

定義　$\{K_u{}^k\}$ の定める $H^{2k}(M, \xi_{I_p})$ の元を ξ の（I_p に関する）k-次非可換 Chern 類と呼び $C^k{}_{I_p}(\xi)$ と書く．

定理　ξ を U_p-bundle とする．$C^k{}_{I_p}(\xi)=0$ であれば，ξ は $U_{kp/(k+1)}$-bundle と同値である．逆も正しい．

この定理から U_p-bundle については，$C^k{}_{I_p}(\xi)=0$ であれば $C^m{}_{I_p}(\xi)=0$，$m>k$，となるが，この事は GL_p-bundle でも正しい．

$p=p_0$ とし，$C^{k-1}{}_{I_p}(\xi) \neq 0$，$C^k{}_{I_p}(\xi)=0$ となる k が存在した時 $p_1 = kp/(k+1)$，その様な k が存在しなければ $p_1 = p_0$ とする．$p_1 < p_0$ の時 $C^k{}_{I_{p_1}}(\xi)$ が定義出来るから同様の手続きで，p_2，p_3，…，がきめられる．定義から

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_m,\quad \{P_0, P_1, \cdots\} \text{ が有限数列の時},$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_\infty,\quad \{P_0, P_1, \cdots\} \text{ が無限数列の時}$$

のいずれかが成立する．そこで U_p-bundle ξ に対し

$$\nu(\xi) = \lim_{n\to\infty} P_n$$

と置く．

<u>定理</u>　(i)　$\nu(\xi) = P_m$ であれば ξ は U_{P_m}-bundle と同値で，$q < P_m$ なら U_q-bundle とは同値にならない．

(ii)　$\nu(\xi) = P_\infty$ であり，$P_\infty \neq 0$ なら ξ は U_{P_∞}-bundle とは同値にならず，$q > P_\infty$ であれば U_q-bundle とは同値になる．

U_p の stable homotopy 型は p に関係しないから，これ等の結果は非可換 Chern 類が homotopy 不変ではない事を示している．

$\nu(\xi)$ を定義から計算するのは難しい様だが，ξ の非可換曲率 $\{K_u\}$ の η-関数 η_{K_u} は，η-関数の定義から

$$\eta_{K_U(x)} = \eta_{K_V(x)},\quad x \in U \cap V$$

となるから，$M \times C$（の領域）上の関数 $\eta_K = (\eta_K(x))(s)$ が定義出来る．この時

$$\mu(\eta_K(x)) = \inf\{\sigma \mid \eta_K(x)(s) \text{ は } \mathrm{Re}\, s > \sigma \text{ で正則}\}$$
$$\mu(K) = \sup_{x\in M} \mu(\eta_K(x))$$

と置けば

$$p \geqq \mu(K) \geqq \nu(\xi)$$

である．従ってKのζ-関数から$\nu(\xi)$ の評価が出来る．特にξがMap(X,G)-bundleであれば，§2の記号でξの非可換接続として，$\{A_u{}^X\}$ のConnesの意味での量子化が取れる．この場合非可換曲率は（Xの）－1階の擬微分作用素だから，これが(準)楕円型になれば，$\zeta_K(x)$ は全平面で有理型で$\mu(\zeta_K(x))$はその最初の極の位置の実数部分である．この時次の事が成り立たないか問題になる．

(i) $\mu(K)=\nu(\xi)$

(ii) $\mu(K)$ が最大値として実現されゝば $\nu(\xi)=P_\infty$ で逆も正しい．

いずれにしても$\zeta_K(x)$ の最初の極の位置とそこでの留数がξの幾何学的性質と深く関係している事は確実で，その解明は今後の課題である．

文献

[1]. Andersson, S.I.: Vector bundle connections and lifting of partial differential operators, Lect. Notes in Math., 905 (1980), 119－132.

[2]. Asada, A.: Connections of differential operators, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 13(1978), 87－102.

[3] Asada, A.: Characteristic classes of loop group bundles and generalized string classes, Differential Geometry and Its Applications, North Holland, 1992, 33-66.

[3]′ Asada, A.: 特性類入門, 横浜市立大学論叢 43-1 (1992)

[4] Baulieu, L.: Chern-Simons three-dimensional and Yang-Mills-Higgs two-dimensional systems as four-dimensional topological quantum field theories, Phys. Lett. B 232 (1989), 473-478.

[5] Coquereaux, R.: Noncommutative geometry and theoretical physics, J. Geo. Phys., 6 (1989), 425-490.

[6] Connes, A.: The action functional in non-commutative geometry, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 673-683.

[7] Fujii, K.-Tanaka, M.: Universal Schwinger cocycles of current algebra in (D+1)-dimensions; Geometry and Physics, Commun. Math. Phys., 129 (1990), 267-280.

[8] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, 1980.

[9] 小林昭七：接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.

[10] Kuiper, N.H.: The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology 3 (1965), 19-30.

[11] Mickelsson, J.-Rajeev, S.G.: Current algebras in D+1-dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmanians, Commun. Math. Phys., 116 (1988), 365-400.

[12] 宮地良彦：私の物理学遍歴 私家版, 1991.

[13] Rajeev, S.G.: Universal gauge theory, Phys. Rev. D42 (1990) 2279-2291.

[14] Scheck, F.: Anomalies, Weinberg angle and a noncommutative geometric description of the standard model, Phys. Lett. B284 (1992) 303-308.

[15] Simon, B.: Trace Ideals and Their Applications, London Math. Soc. Lect. Notes 35, 1979.