数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 132-143

Self-Dual Yang Mills 方程式の Reduction

長崎大・経済　村田嘉弘 (Yoshihiro Murata)

1. 序

Self-Dual Yang Mills (SDYM) 方程式に twistor 対応を定義したことで有名な Ward は, SDYM 方程式が universal な可積分系であるかどうかということにも関心を持っていた。[1] の中で, 彼は, 複素化された Minkowski 空間上の SDYM 方程式が "Toda molecule" 方程式, "Toda lattice" 方程式, non-linear σ-model, Euler-Arnold-Manakov 方程式 (常微分方程式) 等を含むことを示し, SDYM 方程式の universality を示唆した。もっともその時点では, KdV 方程式, Non-Linear Schrödinger (NLS) 方程式といった代表的な可積分方程式が SDYM 方程式の reduction より得られるかどうか分らず, むしろ, SDYM 方程式の非 universality を暗示しているようでもあった。ところが, Mason-Sparling [2] が符号数 (2, 2) の metric を持つ $\mathbb{R}^4$ 上の SDYM 方程式の reduction により, KdV 方程式, NLS 方程式が得られることを示して以来, 情況は一変し, Bakas-Depireux [3], Lu [4] 他多くの研究者により SDYM の reduction が研究された。そして, 最近の Ivanova-Popov [5], Popov [6]

の研究により，(1+1) 次元のすべての可積分系，(2+1) 次元の多くの可積分系が generalized SDYM 方程式（$\mathbb{R}^{4k}$ 上の self-dual connection の満たす方程式）の reduction により得られることが明らかになった。従って，(generalized) SDYM 方程式はこの意味で universal な可積分系ということができる。

本稿は [2], [3], [5] を踏まえて筆者により得られたささやかな結果の報告と今後の展望を述べたものです。

2. SDYM 方程式とその Reductions

$X = \mathbb{R}^4 \ni \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$ （t は時間）

とし，X 上に符号数 (2,2) の metric

$$ds^2 = (dx)^2 - (dy)^2 - 4\, dz \cdot dt \tag{1}$$

を与える。また，$G \subset SL(n, \mathbb{C})$: 線形 Lie 群，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(G) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$: G の Lie 環として，X 上の G-bundle P を考える。P の connection

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i(\mathbf{x})\, dx^i \ , \quad A_i(\mathbf{x}) \in \mathfrak{g}$$

に対し，A の curvature を

$$F(A) = dA + A \wedge A$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij}(\mathbf{x})\, dx^i \wedge dx^j$$

とおくと，

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = \partial_i A_j(\mathbf{x}) - \partial_j A_i(\mathbf{x}) + [A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{x})]$$

$$= [\partial_i + A_i,\ \partial_j + A_j] \qquad (ただし\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$$

従って $D_i = \partial_i + A_i(x)$ とおくと,

$$F_{ij}(x) = [D_i, D_j]$$

ここで, A が Self-Dual であるとは,

$$* : \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{4-k}(X) \qquad (k=1\sim 4)$$

を Hodge の $*$-operator としたとき,

$$F(A) = * F(A) \tag{2}$$

が成り立つことである.

metric (1) の下で, (1) は系

$$\begin{cases} [D_x + D_y,\ D_z] = 0 \\ [D_x - D_y,\ D_x + D_y] + [D_z, D_t] = 0 \\ [D_x - D_y,\ D_t] = 0 \end{cases} \tag{3}$$

に同値になる。ただし,

$$\begin{aligned} D_1 &= D_x = \partial_x - A, & D_3 &= D_z = \partial_z - B \\ D_4 &= D_t = \partial_t - C, & D_2 &= D_y = \partial_y - D \end{aligned} \tag{4}$$

$$(A, B, C, D \in \mathfrak{g})$$

とする. 先に述べた $A_i(x)$ $(i=1\sim 4)$ と $A\sim D$ は, $A=-A_1$, $D=-A_2, \cdots$ のような関係にあることに注意する. また, A～D という名付け方とその順番は [2] に従っている.

(3) は A～D に関する非線形偏微分方程式であるが, これが今の場合の SDYM 方程式である.

Belavin - Zakharov [7] は, Euclid 空間上の SDYM 方程式がある線形問題の compatibility condition になっていることを示し, SDYM 方程式を逆散乱法で解くことへの道を拓いたが, (3) も線形方程式系

$$\begin{cases} L_1\phi = [D_x - D_y + \lambda D_z]\phi = 0 \\ L_2\phi = [D_t + \lambda(D_x + D_y)]\phi = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$(\lambda \in \mathbb{P} : \text{spectral parameter})$$

の compatibility condition となっている. そして, 今の場合は, この (5) が SDYM 方程式 (3) が universality を持つことの原因となっている.

以下, [ ] に従って (3) を退化させた方程式を考えよう.

① Bogomolnyi 方程式

(3) で, A ~ D が y 方向に定常 ($A_y = 0, \cdots$) と仮定すると, (3) は

$$\begin{cases} [\partial_x - (A+D),\ \partial_z - B] = 0 \\ [\partial_x - A + D,\ \partial_x - (A+D)] + [\partial_z - B,\ \partial_t - C] = 0 \\ [\partial_x - A + D,\ \partial_t - C] = 0 \end{cases} \tag{6}$$

という方程式に帰着するが, これが Bogomolnyi 方程式である. (6) は (5) を退化させた線形方程式系の compatibility condition である.

② Reduced Bogomolnyi 方程式

(6) において更に, A ~ D が z 方向にも定常と仮定すると, (6) は

$$
\begin{cases}
[\partial_x-(A+D),\ B]=0 \\
[\partial_x-A+D,\ \partial_x-(A+D)]+[\partial_t,\ B]+[B,\ C]=0 \\
[\partial_x-A+D,\ \partial_t-C]=0
\end{cases}
\qquad (R_0)
$$

に帰着する．(R_0)において更に，$A+D=0$（Mason-Sparling [ ] の課した条件）を仮定すると，(R_0)は，

$$
\begin{cases}
[\partial_x,\ B]=0 \\
[\partial_x,\ 2A]-[B,\ C]-[\partial_t,\ B]=0 \\
[\partial_x-2A,\ \partial_t-C]=0
\end{cases}
\qquad (R)
$$

になるが，この(R_0)と(R)をここではReduced Bogomolnyi方程式と呼ぶことにする（正式名称はまだない）。(R_0)，(R)ともに(5)を退化させた線形問題のcompatibility conditionであるが，(R)に対する線形問題は，

$$
\begin{cases}
L_1\phi=(\partial_x-2A+\lambda B)\phi=0 \\
L_2\phi=(\partial_t-C+\lambda\partial_x)\phi=0
\end{cases}
\qquad (7)
$$

である．この(7)の形が(R)が多くの$(1+1)$次元可積分系を含むことの原因となっている．

3．(R)（(R_0)）の含むKdV方程式解

[2]においてMason-Sparlingが得た結果は次のようであった．

$\boxed{\text{定理 1}}$　$n=2$，$G=SL(2,\mathbb{C})$のとき，(R)は

$$
B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad 2A=\begin{pmatrix}q & 1\\ q_x-q^2 & -q\end{pmatrix}
$$

$$2C = \begin{pmatrix} (q_x - q^2)_x & -2q_x \\ 2w & -(q_x - q^2)_x \end{pmatrix}$$

を解に持つ。ただし，uをKdV方程式

$$4u_t = u_{xxx} + 12uu_x$$

の解として，

$$q = -\int u\,dx$$
$$4w = q_{xxx} - 4qq_{xx} - 2q_x^2 + 4q^2q_x$$

であるものとする。□

この定理はBakas - Depireux [3] により次のように一般化された。

$\boxed{\text{定理 2}}$　$G = SL(n, \mathbb{C})$ のとき，(R_0) は

$$B = \begin{pmatrix} & & \\ & O & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & O & & 1 \\ -u_n, & -u_{n-1}, & \cdots, -u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + D = \begin{pmatrix} 0 & & O \\ a_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

を解に持つ。ただし，$u_2 \sim u_3$ は

$$L_n = \partial_x^n + u_2\partial_x^{n-2} + u_3\partial_x^{n-3} + \cdots + u_n$$
$$\frac{\partial L_n}{\partial t_r} = [(L_n^{\frac{r}{n}})_+, L_n] \qquad r = n+1$$

を満たすものとする（generalized KdV hierarchy の r flow）。

また，$a_{i,j}$，$c_{k,l}$ は $u_2 \sim u_n$ の適当な微分多項式とする。□

4. (R)の含むNLS方程式解

Mason - Sparling [2] の結果は

$\boxed{定理 3}$ $n=2$, $G = SL(2, \mathbb{C})$ のとき, (R)は

$$B = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\tilde{\psi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$2C = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \psi\tilde{\psi} & \psi_x \\ \psi_x & -\psi\tilde{\psi} \end{pmatrix}$$

を解に持つ. ただし, $2\kappa = 1$ または $-i$ であり, ψ と $\tilde{\psi}$ は

$$2\kappa\psi_t = \psi_{xx} + 2\psi^2\tilde{\psi}, \quad 2\kappa\tilde{\psi}_t = -\tilde{\psi}_{xx} - 2\tilde{\psi}^2\psi$$

を満たすものとする. □

$A, B, C \in su(2)$ のときは $2\kappa = -i$, $\tilde{\psi} = \psi^*$ (: ψの複素共役) であり, ψは NLS 方程式

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi$$

を満たす. また, $A, B, C \in su(1,1)$ のときは, $2\kappa = -i$, $\tilde{\psi} = -\psi^*$ であり, ψは NLS 方程式

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi$$

を満たす.

本稿では, Fordy - Kulish [8] の n-wave equation の概念を用いて定理 3 を一般化する.

5. Reductive Homogeneous Space に付随する 2-wave equation と (R)

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra, $\bar{A} \in \mathfrak{h}$,

$C_{\mathfrak{g}}(\bar{A}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \bar{A}] = 0\} = \mathfrak{k}$ とし, $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (\mathbb{C}\text{-linear space として})$$

と分解する.

ここで, 線形方程式系

$$\begin{cases} \phi_x = (\lambda \bar{A} + \bar{Q})\phi \\ \phi_t = \bar{P}\phi \end{cases} \tag{8}$$

を考える. ただし,

$\bar{A}$ は constant, $\lambda \in \mathbb{P}$; spectral parameter

$\bar{Q} = \bar{Q}(x, t) \in \mathfrak{m}$

$$\bar{P} = \bar{P}(x, t; \lambda) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \bar{P}^{(j)}(x, t)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda^j (\bar{P}_k^{(j)} + \bar{P}_m^{(j)}) = \bar{P}_k + \bar{P}_m \in \mathfrak{g}$$

$$(\bar{P}_k^{(j)} \in \mathfrak{k}, \quad \bar{P}_m^{(j)} \in \mathfrak{m})$$

とする.

$\mathfrak{k}$ に対応する G の Lie subgroup を K とし, G/K が reductive homogeneous space である, つまり,

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \tag{9}$$

が成り立つと仮定すると,

(8) が compatible

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Q}_t = \bar{P}_{m x} - [\bar{Q}, \bar{P}_k] - [\bar{Q}, \bar{P}_m]_m - \lambda [\bar{A}, \bar{P}_m] \\ \bar{P}_{k x} = [Q, P_m]_k \end{cases} \tag{10}$$

ただし, $[\ ,\ ]_k$, $[\ ,\ ]_m$ は commutator $[\quad]$ の k 成分, m 成分を表す。

今, $N=2$, $\overline{A}=-B\in h$, $\overline{Q}=2A\in m$ を仮定すると, 積分定数を適当に取ることで, (9)は

$$\overline{P}=\lambda^2 B-2\lambda A+C \qquad (C\in g) \tag{11}$$

$$\begin{cases} 2A_x = [B, C] \\ 2A_t = C_x-[2A, C] \end{cases} \tag{12}$$

に帰着する。(12)を reductive homogeneous space G/K に付随する 2-wave equation (ただし $\overline{A}$, $\overline{Q}$ を上述のように仮定した場合の 2-wave equation) という。(11)より (8)は (7)と一致する。従って,

$\boxed{\text{定理 4}}$

$B\in h$: constant, $A(x, t)$, $C(x, t)\in m$ かつ (12)を満たす A, B, C は (R) の解である。□

6. 定理 4 の具体例

① Example 1. (Matrix NLS 方程式の場合)

$g=sl(n, \mathbb{C})$ とし, 自然数 r, p は $r\le \frac{p}{2}$, $2r+p=n$ を満たすとする。$\Psi(x, t)\in M(r\times r, \mathbb{C})$ を Matrix NLS 方程式

$$i\Psi_t=-\Psi_{xx}+2\kappa\Psi(\Psi^*)\Psi \qquad (\kappa\in\mathbb{R}-\{0\})$$

の解 (* は転置共役を表す), $\varepsilon=\pm 1$ とすると,

$$B = \frac{i}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} E & & \\ \hline & O & \\ \hline & & -E \end{array}\right), \quad A = \frac{\sqrt{\varepsilon K}}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} & & \varepsilon \Psi^* \\ \hline & O & \\ \hline \Psi & & \end{array}\right)$$

$$C = i\sqrt{\varepsilon K}\left(\begin{array}{c|c|c} \varepsilon\sqrt{\varepsilon K}\,\Psi^*\Psi & & -\varepsilon \Psi_x^* \\ \hline & O & \\ \hline \Psi_x & & -\varepsilon\sqrt{\varepsilon K}\,\Psi\Psi^* \end{array}\right)$$

は(R)の解である。更に、

$$\varepsilon = 1,\ \sqrt{\varepsilon K} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{g} = su(r+p, r)$$

$$\varepsilon = -1,\ \sqrt{\varepsilon K} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{g} = su(n)$$

とできる。 □

② Example 2. (Generalized NLS 方程式 [8])

G/K が Symmetric Hermitian Space の場合、(9) において更に $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ が成り立つ。(11), (12) に対応する式は

$$\bar{P} = \lambda^2 B - 2\lambda A + C \quad (C \in \mathfrak{m} \ \text{s.t.}\ [A, C] = 0) \qquad (11)'$$

$$\begin{cases} 2A_x = [B, C] \\ 2A_t = C_x \end{cases} \qquad (12)'$$

となる。(12)' は、G/K 上の Generalized NLS 方程式である。よって、(12)' の解で $[A, C] = 0$ を満たすものは (R) の解である。G/K の分類に基づく (12)' の具体形は [8] を参照のこと。 □

7. 展望

SDYM方程式のuniversalityの問題は，Popov [6] により一応の成果を見たが，reductionとtwistor対応の関係，1次元の重要な可積分系であるPainlevé方程式及びその多変数版であるGarnier系とSDYM方程式の関係等は未だ明らかではない。筆者としては，まず，定理4のreductive homogeneous space G/Kに付随する2-wave equation (12) とtwistor対応の関係を調べてみたいと思います。

最後に，Mason-Sparlingの研究 [2] を教えて下さり，可積分系夏の合宿及び本研究会で話す機会を与えて下さった高崎金久氏，Fordy-Kulish [8]，Popov [6] を教えて下さった中村佳正氏，Ivanova-Popov [5] を教えて下さった藤井一幸氏，Yang-Mills方程式のことをいろいろ教えて下さった鈴木理先生，永友清和氏に感謝致します。

文献

[1] R. S. Ward, Multi Dimensional Integrable Systems, Sprinlinger Lecture Notes in Physics, Vol 280 (1986)

[2] L. J. Mason & G. A. J. Sparling, Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries are Reductions of Self-Dual Yang Mills, Physics Letters A, Vol 137, No 1.2 (1989), 29—33.

[3] I. Bakas & D. A. Depireux, Self-Duality and Generalized KdV flows, Modern Physics Letters A, Vol. 6, No. 5 (1991), 399–408.

[4] H. La, Symmetries of the 4D Self-Dual Yang-Mills Equation and Reduction to the 2D KdV Equation, Annals of Physics 215 (1992), 81–95.

[5] T. A. Ivanova & A. D. Popov, Soliton Equations and Self-Dual Gauge Fields, Physics Letters A 170 (1992), 293–299.

[6] A. D. Popov, On Embedding of Integrable Equations in (1+1) and (2+1) Dimensions into the Generalized Self-Dual Yang-Mills Equations, JINR Rapid Communications, N6 (57), 1992, 57–62.

[7] A. A. Belavin & V. E. Zakharov, Yang Mills Equations as Inverse Scattering Problem, Physics Letters, Vol. 73B, No. 1 (1978), 53–57.

[8] A. P. Fordy & P. P. Kulish, Nonlinear Schrödinger Equations and Simple Lie Algebras, Commun. Math. Phys. 89 (1983), 427–443.