数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 153-162

Singularity Confinement と離散型Painlevé方程式

東大数理科学　薩摩 順吉　(Junkichi Satsuma)

1. はじめに

非線形偏微分方程式が与えられたとき，それが完全積分可能かどうかを判定する方法の1つにPainlevéテストがある。これは，Ablowitz，Ramani，Segurの予想[1)]

「与えられた非線形偏微分方程式が逆散乱変換で解けるための必要十分条件は，その方程式にReductionを行うことによって得られる非線形常微分方程式がすべてPainlevé型になることである。」

に基づいたものである。Painlevé型方程式とは，極以外に動く特異点はないという性質(Painlevé性)をもつ方程式のことをいう．KP方程式・KdV方程式などに代表されるソリトン方程式はたしかにこの性質をもっていることが知られている。

例えば，KdV方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1.1)$$

の場合，$u = U(z)$，$z = x - ct$ というReductionを行なう，すなわち進行波解を仮定すると，

$$U_{zz} - 3U^2 - cU = \alpha, \quad \alpha\text{:定数} \qquad (1.2)$$

と積分できるが，(1.2)はPainlevé型である．また，$u = t^{-2/3} v(z)$，$z = xt^{-1/3}$ の相似解を仮定すると，

$$vv_{zz} = \frac{1}{2} v_z^2 + 2v^3 - \frac{1}{3} z v^2 + \alpha, \quad \alpha\text{:定数} \qquad (1.3)$$

と積分できるが，これも P_{34} として知られているPainlevé型方程式である。さらに，mKdV方程式

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1.4)$$

について，$u = t^{-1/3} w(z)$，$z = xt^{-1/3}$ の相似解を仮定すると，

$$w_{zz} + 2w^3 - \frac{1}{3} + w + \alpha, \quad \alpha\text{:定数} \qquad (1.5)$$

と積分できるが，これは P_{II} として知られているPainlevé型方程式である。

それでは，非線形差分方程式についてもPainlevé性と同様の概念が存在するであろうか。また，そのような概念が存在するとき，離散型のPainlevé方程式とはどのようなものであろうか。

最近，Grammaticos，Ramani，Papageorgiou[2]が提出した「Singularity Confinement（以下SCと略称）」

の考え方は，まさにPainlevé性を離散系に拡張した概念になっていると考えられる。本稿では，まずSCとはどういうものかを簡単に紹介したのち，双1次形式で書かれる離散型ソリトン方程式についてSCの考え方が可積分性の判定にどう用いられるかを例示する。さらに，SCを用いてソリトン方程式から離散型Painlevé方程式と考えられるものを導びく例を示すことにする.

なお，以下の内容はGrammaticosとRamaniとの共同研究の結果[3-5]に主によっている.

2. Singularity Confinementと可積分性の判定

Grammaticosらが，非線形写像（非線形常差分方程式）の可積分性の判定に関して提出した予想は次のようなものである。

「与えられた非線形写像が可積分であるときには，その動く特異点は閉じ込められている。すなわち，初期値に依存してあるステップで特異性が現れたとき，その特異性は何ステップか後に打ち消しあってなくなってしまう。また，初期値に関する情報は特異点を通過した後に失われていない。」

彼らは差分方程式の解に関するこのような性質をSCと名づけたのである。予想の数学的根拠はまだ明らかではないが，

少なくとも代表的な非線形写像に対して有効であることがわかっている。

具体例として，広田[6]によって提出された非調和振動子の離散化方程式

$$X_{n+1} = \frac{8X_n}{1-X_n^2} - X_{n-1} \tag{2.1}$$

を考えてみよう。この方程式は可積分であることが知られている。いま，$X_{n-2}=\alpha$，$X_{n-1}=1+\varepsilon$ ただし，αは定数であり，$|\varepsilon| \ll 1$ とする。この初期値のもとで X_n, X_{n+1}, X_{n+2} を計算すると，

$$X_n = -\frac{4}{\varepsilon} - (2+\alpha) + O(\varepsilon)$$

$$X_{n+1} = -1 + O(\varepsilon)$$

$$X_{n+2} = -\alpha + O(\varepsilon)$$

を得る。$\varepsilon \to 0$ の極限では X_nで特異性が現れている。しかし，X_{n+1}でその特異性はなくなってしまうと同時に，X_{n+2}で初期値（X_{n-2}）の情報が再現している。すなわち上で述べたSCの性質が満されているというわけである。

SCの考え方は，多次元の非線形差分方程式に応用することが可能である。可積分な離散型KdV方程式を例にとり，SCの性質が満されていることを示そう。

離散型KdV方程式は

$$X(i+1,j)-X(i-1,j+1)=\frac{\varepsilon}{\delta}\left\{\frac{1}{X(i,j)}-\frac{1}{X(i,j+1)}\right\}$$

ただし，ε，δ は定数　(2.2)

で与えられる。この式は変数変換

$$X(i,j)=\frac{f(i+1,j)\,f(i-1,j)}{f(i,j+1)\,f(i,j-1)} \tag{2.3}$$

によって，

$$\delta f(i+\tfrac{3}{2},j+\tfrac{1}{2})f(i-\tfrac{3}{2},j-\tfrac{1}{2}) + \varepsilon f(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{3}{2})f(i-\tfrac{1}{2},j-\tfrac{3}{2}) - (\varepsilon+\delta)f(i+\tfrac{1}{2},j-\tfrac{1}{2})f(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2})=0 \tag{2.4}$$

の双1次形式に書き換えることができる。さらに適当に変数をとりかえて，

$$z_1 f(m+1,n)f(m-1,n-1)+z_2 f(m+1,n-1)f(m-1,n) + z_3 f(m,n)f(m,n-1)=0$$

ただし，z_1，z_2，z_3 は $z_1+z_2+z_3=0$ を満たす定数

(2.5)

と書くこともできる。離散型KdV方程式の解 X が特異性をもつのは，変換された変数 f が0もしくは$\pm\infty$になるときである。すなわち，双1次形式(2.5)でSCの性質が満されるという要請は，あるnで f が0になったとき，$n+1$ で f が有限にとどまるという条件と同じになる。

いま，$f(m,n-1)$が有限で，$f(m,n)=0$であったとしよう。このとき，(2.5)から

$$z_1 f(m+1,n)f(m-1,n-1)+z_2 f(m+1,n-1)f(m-1,n) = 0 \qquad (2.6)$$

を得る。また，この条件のもとで，隣接する格子点での写像を与える5つの式から$f(m\pm 2,n)$を消去すると，

$$z_1 f(m+1,n+1)f(m-1,n)+z_2 f(m+1,n)f(m-1,n+1) = 0 \qquad (2.7)$$

を得る。(2.7)は$f(m,n)=0$のときに$f(m,n+1)$が有限であることを保証する。すなわち，(2.5)はSCの性質を満していることになる。

3. 離散型Painlevé方程式

冒頭で例示したように，ソリトン方程式にReductionを施すことによってPainlevé型方程式が導かれる。離散型ソリトン方程式に対しても，2で導入したSCの考え方を用いてReductionを行なうと非線形の常差分方程式が得られるが，それはPainlevé方程式の離散版と考えることができる。やはり例によって，その導出を見てみよう。

離散型mKdV方程式の双1次形式は

$$\left\{\begin{array}{ll}(\delta+\varepsilon)\,G(n+1,m)\,F(n,m+1)-(\delta-\varepsilon)\,G(n,m+1)\,F(n+1,m) & \\ -2\varepsilon\,G(n,m)\,F(n+1,m+1)=0 & (3.1)\\ (\delta+\varepsilon)\,G(n,m+1)\,F(n+1,m)-(\delta-\varepsilon)\,G(n+1,m)\,F(n,m+1) & \\ -2\varepsilon\,G(n+1,m+1)\,F(n,m)=0 & (3.2)\end{array}\right.$$

で与えられる。Reduction を行なうために、(3.1), (3.2) と同じ構造をもつ変数係数の双1次方程式

$$\left\{\begin{array}{ll}(1-A)\,G(n+1,m)\,F(n-1,m)+(1+A)\,G(n-1,m)\,F(n+1,m) & \\ =2G(n,m-1)\,F(n,m+1) & (3.3)\\ (1-B)\,G(n+1,m)\,F(n-1,m)+(1+B)\,G(n-1,m)\,F(n+1,m) & \\ =2G(n,m+1)\,F(n,m-1) & (3.4)\end{array}\right.$$

ただし、$A=A(n,m)$, $B=B(n,m)$

を考える。そして、これらの方程式が SC の性質をもつことを要請する。計算の結果

$$\begin{aligned}&(1-A(n,m-1))(1+B(n,m+1))(1+A(n+1,m))(1-B(n-1,m))\\ &=(1+A(n,m-1))(1-B(n,m+1))(1-A(n-1,m))(1+B(n+1,m))\end{aligned} \tag{3.5}$$

が成立するときに SC の条件を満すことがわかる。(3.5) の自明でない簡単な解として、

$$A=-B=-n/m \tag{3.6}$$

が存在する。(3.6) を (3.3), (3.4) に代入すると、

$$\left\{\begin{array}{l}(n+m)\,G(n+1,m)\,F(n-1,m)-(n-m)\,G(n-1,m)\,F(n+1,m)\\ =2m\,G(n,m-1)\,F(n,m+1) \qquad (3.7)\\ (n-m)\,G(n+1,m)\,F(n-1,m)-(n+m)\,G(n-1,m)\,F(n+1,m)\\ =-2m\,G(n,m+1)\,F(n,m-1) \qquad (3.8)\end{array}\right.$$

が得られるが，上記の計算結果は，(3.7)，(3.8)が変数係数の可積分な差分方程式系であることを示唆している。また，それらは連続のソリトン方程式からPainlevé方程式を導出する際に用いた相似解の仮定に相当したものと考えることができる。すなわち，方程式系(3.1)，(3.2) および (3.6)，(3.7) から1つの独立変数を消去すると，常差分方程式が得られるが，それが離散型Painlevé方程式に相当したものになるのである。

実際に変数の消去を行なうためには，目下のところ多少の技巧が必要である。すなわち，

$$f(l,k)=F\left(\frac{l-k}{2},\ \frac{l+k}{2}\right) \qquad (3.9)$$

$$g(l,k)=G\left(\frac{l-k}{2},\ \frac{l+k}{2}\right) \qquad (3.10)$$

とし，$k=m-n$ を有限に保ったまま，$m, n\to\infty$ の極限操作を行なう。また，このとき $l=m+n$ 方向の格子定数 δ を 0 に近づけ，l 方向については連続体近似をする。すると，

(3.6), (3.7) から

$$k\left(g(k+1)f(k-1)-g(k-1)f(k+1)\right)$$
$$=2\tau\left(g'(k-1)f(k+1)-g(k-1)f'(k+1)\right)$$
$$=2\tau\left(g'(k+1)f(k-1)-g(k+1)f'(k-1)\right) \qquad (3.11)$$

が得られる。ただし，′は l 方向の微分を表し，τは $-l\delta$ で与えられる定数である。また，離散型 mKdV 方程式 (3.1), (3.2) は，同じ極限操作で

$$g(k-1)f(k+1)+g(k+1)f(k-1)=2g(k)f(k) \qquad (3.12)$$
$$2\varepsilon\left(g'(k)f(k)-g(k)f'(k)\right)$$
$$=g(k+1)f(k-1)-g(k-1)f(k+1) \qquad (3.13)$$

と変形される。ただし，εは k 方向の格子定数である。(3.11)〜(3.13) で $v(k)=f(k)/g(k)$ とおき，$v'(k)$ を消去すると，

$$k\left(v(k+1)-v(k-1)\right)\left(v(k+1)+v(k-1)\right)$$
$$=\frac{2\tau}{\varepsilon}v(k+1)v(k-1)\left\{\frac{v(k+2)-v(k)}{v(k+2)+v(k)}+\frac{v(k)-v(k-2)}{v(k)+v(k-2)}\right\}$$
$$(3.14)$$

が得られる。さらに，

$$W(k)=\frac{v(k+1)-v(k-1)}{v(k+1)+v(k-1)} \qquad (3.15)$$

の変数を導入すると，(3.14) は

$$W(k+1)+W(k-1)=\frac{2k\varepsilon}{\tau}\frac{W(k)}{1-W(k)^2} \qquad (3.16)$$

となる。これは連続極限をとると P_{II} になる差分方程式であり，離散型 Painlevé 方程式と考えることができる。

他の離散型ソリトン方程式からも同様の手法でさまざまな離散型 Painlevé 方程式が得られる。その際，つねに重要となるのは，SCの考え方を用いて変数係数の可積分な差分方程式を導びく点であることを最後に指摘しておきたい。

引用文献

1) M.J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur, Lett. Nuov. Cim. 23 (1978) 333.

2) B. Grammaticos, A. Ramani and V.G. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1825.

3) A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma, Phys. Letters A169 (1992) 323.

4) J. Satsuma, A. Ramani and B. Grammaticos, submitted to Phys. Letters.

5) B. Grammaticos, J. Satsuma and A. Ramani, in preparation

6) R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 321