

完全可積分な symplectic 写像

前田 茂 (Shigeru Maeda)

本報告では, 当初 Hamilton 系の解を解析的に得るために Liouville が導入した完全可積分性の概念を symplectic 写像にも導入できることを示し, ある条件下で完全可積分な symplectic 写像の (反復によって得られる) 解点列が ergodic な挙動をすることを示す. 最後に, 線形 symplectic 写像に関して, 包合系をなす第 1 積分を写像から arithmetic に構成する方法を提示し, ほとんどの場合そのような保存量が自由度の数だけ構成できることを示す.

1. symplectic 写像とその可積分性

現れる量はすべて滑らかとする. (M, ω) を $2N$ 次元 symplectic 多様体 (ω は symplectic 構造) とし, 以下, Φ で M 上の 1 つの symplectic 写像を表すものとする. Hamilton 力学の用語にならって, N を Φ の自由度と呼ぶ. Φ による反復

$$x_{t+1} = \Phi(x_t) \quad (t=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

は, M 上に ordinary な差分方程式を定める. そして, (1)によって得られる任意の点列 $\{x_t\}$ を Φ (または差分方程式) の解と呼ぶことにする.

例 1. よく現れる R 上の 2 階差分方程式

$$x_{t+1} - 2x_t + x_{t-1} = F(x_t) \quad (2)$$

は, 新たな変数 p を $p_t = x_t - x_{t-1}$ によって導入すれば,

$$x_{t+1} - x_t = p_{t+1}, \quad p_{t+1} - p_t = F(x_t) \quad (3)$$

という 2 元 1 階差分方程式となる. (3) は R^2 上の写像

$$\Phi : (x, p) \rightarrow (x + p + F(x), p + F(x))$$

に伴う差分方程式で, Φ は F のいかんにかかわらず symplectic 構造 $\omega = dp \wedge dq$ を不変にする symplectic 写像である.

定義 1. M 上の関数 f が Φ の任意の解に沿って不変な値をとる, すなわち, $\Phi^* f = f$ ($f(\Phi(x)) = f(x)$) が成立するとき, f を保存量という.

symplectic 写像に関して, 後程使う既知の事実を幾つか掲げる [1].

1. M 上の (十分広い領域を cover する) 任意の symplectic 座標系において, 差分方程式は次の形に表現できる.

$$q_{t+1}^i - q_t^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_t, p_{t+1}), \quad p_{i,t+1} - p_{i,t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_t, p_{t+1}). \quad (4)$$

2. 2つの保存量 f, g に対して $\{f, g\}$ もまた保存量となる。但し, $\{, \}$ は Poisson 括弧。

3. 任意の保存量 f に対して, f を Hamiltonian とする Hamiltonian vector 場の生成する flow は Φ と可換な写像を与える (symmetry 性)。

2. 完全可積分な symplectic 写像

まず, 完全可積分な symplectic 写像の定義から始める。

定義 2. 自由度 N の symplectic 写像は, 次を満たす N 個の保存量 f_1, f_2, \dots, f_N を持つとき, 完全可積分と呼ばれる。

$$(A) \quad \{f_i, f_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

$$(B) \quad df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_N \neq 0$$

注: 自由度が 1 である (3) は保存量を 1 つ持てば完全可積分となる (そしてその保存量は energy 関数と呼ぶべき量である)。しかしながら, 差分系では Hamilton 系と事情が異なり, energy (に相当する量)すら存在しない場合がある [2]。

完全可積分な symplectic 写像に伴う差分方程式を可積分系と略称することにすれば, Liouville の定理の離散版は以下のように述べられる [3]。

定理 1. 可積分系は, ある symplectic 座標系上で線形系に表され, 解の解析的表現を求積法によって得ることができる。

実際、各保存量 $f_i(q, p)$ を新運動量 P_i とすれば、Lie-Carathéodory の定理 [4] から、conjugate な座標関数 $Q^i(q, p)$ を求積法によって構成できる。差分方程式を symplectic 座標系 (Q^i, P_i) において (4) の形に表現すれば、直ちに

$$Q_{t+1}^i - Q_t^i = \frac{\partial H}{\partial P_i}(Q_t, P_{t+1}), \quad P_{i,t+1} - P_{i,t} = -\frac{\partial H}{\partial Q^i}(Q_t, P_{t+1}) = 0 \quad (5)$$

を得る。上で P_i は運動定数であったから H は P だけの関数になることに注意すると、次の解析的表現が得られる。

$$Q_t^i = m^i t + n^i, \quad P_i = c_i \quad (m^i, n^i, c_i: \text{定数}) \quad (6)$$

面白いのは、可積分系が有界運動をする場合であろう。離散系でも普通の Hamilton 系と同様の性質が見られる。 f_i 達の level set を M_0 とかこう。

$$M_0 = \{(q, p) \mid f_i(q, p) = c_i, c_i: \text{const.}\}$$

M_0 が連結、かつ compact の場合、Arnold [5] の議論がそのまま使えて M_0 は N 次元 torus となる。

定理 2. 可積分系で上記 M_0 が連結、かつ compact とする。このとき、解は次のいずれかの挙動を示す。

- (A) M_0 上で dense,
- (B) 有限点列,
- (C) M_0 の部分多様体上で dense, 但し部分多様体は低次元 torus 上で dense.

この定理は、表現 (6) を与える座標 Q が S^1 の座標である ([5] に

よって保証される) ことを用いることで直ちに証明される。

例 2. 例 1 で触れた (3) は, $F(x) = cx$ (c : 定数) のとき, 線形系となり, 次の保存量をもつ可積分系である。

$$f(x, p) = p^2 + cxp - cx^2 \quad (7)$$

$-4 < c < 0$ のとき, f の level set は qp -平面内で楕円となり有界。

そして, 解点列は, $\cos^{-1}(1+c/2)/(2\pi)$ が無理数のとき楕円上で dense, 有理数のとき有限点列になる。

注: 定理 2 の条件が満たされるとき, Φ の各解点列を積分曲線が interpolate するような Hamilton v.f. が存在する。例 2 の線形系でいえば, (7) が Hamilton v.f. の Hamiltonian である。

3. 線形可積分系の斉 2 次保存量.

一般に, 差分方程式の保存量を求めるのは難しい。しかし, 線形系の場合, 包含系をなすある種の斉 2 次保存量が arithmetic な手続きで求まることがわかっている。

A を与えられた (しかし, 特定しない) symplectic 行列とし, 次の差分方程式を考える。

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad A \in \text{Sp}(N, \mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^{2N} \quad (7)$$

(7) の斉 2 次保存量

$$f_S(x) = x^T S x / 2 \quad (8)$$

を問題にする。 (8) の係数行列 S の全体がなす集合を Ω とかく。

$$\Omega = \{S \in M(2N, R) \mid [A, JS] = 0, S^T = S\} \quad (9)$$

§ 1性質2によって, Ω は Poisson括弧

$$\langle S, T \rangle = SJT - IJS$$

によって Lie環を作る. 目的は A から Ω の元を構成することであるが, 我々はより扱い易い集合 Ξ を導入することにする.

$$\Xi = \{L \in M(2N, R) \mid [A, L] = 0\} \quad (10)$$

2つの, 行列を行列に移す線形写像

$$\eta(L) = JL^T J, \quad \sigma(L) = \{(JL) + (JL)^T\} / 2 = J(L + \eta(L)) / 2$$

を考えよう. 証明抜きで次の事実を掲げる.

補題1. η, σ に関して次の事実が成立する.

(A) η は Ξ 上の involution map. 従って, Ξ は η の固有空間に直和分解される.

$$\Xi = \Theta \dot{+} \Phi,$$

$$\Theta = \{L \in \Xi \mid \eta(L) = L\}, \quad \Phi = \{L \in \Xi \mid \eta(L) = -L\}$$

(B) Θ は $sp(N, R)$ の部分 Lie環.

(C) σ は Ξ から Ω の上への写像で, $\ker \sigma = \Phi$.

補題2. $\sigma: \Theta \rightarrow \Omega$ は Lie環同相.

注: Ξ から Θ への射影 P は $P(L) = (L + \eta(L)) / 2$. そして, $\sigma(L) = \sigma(P(L))$ が成り立つ.

2つの補題から, 我々は A と可換な行列で, Θ 上へ射影した結果が 1次独立となるようなものを特定すればよいことがわ

かる. A と可換な行列のうち自明なのは A の多項式であるから,
 Ξ の代わりにその部分空間

$$\Xi_{\mathbf{1}} = \text{span}\{I, A, A^2, A^3, \dots\}$$

に注目しよう.

補題 3. A の最小多項式が固有多項式と一致するとき, $\Xi_{\mathbf{1}} = \Xi$.

ほとんどの A に対して, Ξ の代わりに $\Xi_{\mathbf{1}}$ を考慮するだけで,
 すべての斉 2 次保存量を得ることができる. しかも, そのと
 き得られる斉 2 次保存量は互いに可換である.

定理 3. $\sigma(A), \sigma(A^2), \dots, \sigma(A^d)$ が 1 次独立, $\sigma(A^{d+1})$ がこ
 れらに 1 次従属であるとする. このとき, 初めの d 個の行列は
 $\sigma(\Xi_{\mathbf{1}}) = \sigma(P(\Xi_{\mathbf{1}}))$ の基底を与える.

そして, 次元 d は次で規定される.

補題 4. A の最小多項式 ϕ_A の次数を k , $d = \dim P(\Xi_{\mathbf{1}})$ とする.

このとき

$$(A) \quad k = 2s + 1 \rightarrow d = s$$

$$(B) \quad k = 2s \text{ かつ } \phi_A(0) = -1 \rightarrow d = s - 1$$

$$(C) \quad k = 2s \text{ かつ } \phi_A(0) = 1 \rightarrow d = s$$

注. $d = 0 \iff A^2 = I$ なので $A^2 = I$ である限り, 上記の構成法で少な
 くとも 1 つ斉 2 次保存量を得られる.

定理 4. A の最小多項式が固有多項式と一致するとき, 上記構成法で自由度の数だけ可換な斉 2 次保存量が得られ, 従って完全可積分である. しかも, 任意の斉 2 次保存量はこれらの 1 次結合で表わされる.

注: A が定理 4 の仮定を満たさない場合でも線形系 (7) は完全可積分であるが, 保存量は別途導出せねばならない.

注: symplectic 写像は, (4) 以外に離散型変分原理から従う Euler difference 方程式にも表現される. 線形系 (7) に対応する (離散型) Lagrangian を $L(q, v) (v_t = q_{t+1} - q_t)$ とすると, $\sigma(A)$ から導出される斉 2 次保存量は以下の通り.

$$-\left(v^i \cdot \frac{\partial L}{\partial v^i} - L\right) + \frac{1}{2} v^i \cdot \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

References

- [1] S. Maeda, Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math. Japon., 25, 4, 405-420, 1980.
- [2] M. Bruschi, O. Ragnisco, P. M. Santini & Tu Gui-Zhang, Integrable symplectic maps, Physica D 49, 273-294, 1991.

- [3] S.Maeda, Completely integrable symplectic mapping, Proc. Japan. Acad., 63A, 6, 198-200, 1987.
- [4] C.Carathéodory, Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung, Verlag und Druck von B.G.Teubner, 1935.
- [5] V.I.Arnold, Mathematical methods for classical mechanics (Engl. Trans. by K.Vogtmann and A.Weinstein), Springer, 1978.
- [6] S.Maeda, Quadratic conservatives of linear symplectic system, Proc. Japan. Acad., 64A, 2, 1988.
- [7] R.Sato and S.Maeda, Conservation laws in continuous and discrete models, Conservation laws and symmetry, Kluwer, 135-174, 1990.