数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 197-205

Pfaffian 版のソリトンの双線形理論

広大工　　太田　泰広　(Yasuhiro Ohta)

1. はじめに

双線形理論においては、ソリトン方程式は、

① 代数恒等式

② 微差分構造

の二つから成る、と見る立場に立つ。従来のソリトン方程式は、そのほとんどが、行列式によって解が与えられるものばかりであり、代数恒等式とは、行列式に関する Plücker 関係式であった。すなわち、①行列式に対して、Plücker 関係式という二次の代数恒等式が成り立つ。②ここで行列式の要素に微差分構造をいれると、その恒等式中に現れるすべての行列式が、一つの行列式 τ の微分または差分で書ける。それによって、ただの代数式であった Plücker 関係式が、τ に関する微差分方程式になる。この二次の微差分方程式を変数変換したものがソリトン方程式であり、解は行列式 τ で与えられる、という筋書きである。

さて、行列式の代わりに Pfaffian を用いたらどうなるであろうか? 行列式と Pfaffian を置き換え、それ以外のすべての構成を変えない、という手法によって、新しいソリトン方程式の系列とその解が得られるであろう。本稿では、このようにしてできた Pfaffian 版のソリトンの双線形理論を、初等的に解説するのが目的である。行列式の場合の Plücker 関係式が、

$$\sum_{l=1}^{n+1}(-1)^l \xi^{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} j_l} \xi^{j_1 j_2 \cdots \widehat{j_l} \cdots j_{n+1}} = 0,$$

であるのに対して、Pfaffian の場合の対応する関係式は、これを反対称にした、

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l}\xi^{i_1 i_2\cdots i_m j_l}\xi^{j_1 j_2\cdots\widehat{j_l}\cdots j_n}$$
$$= -\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\xi^{i_1 i_2\cdots\widehat{i_k}\cdots i_m}\xi^{j_1 j_2\cdots j_n i_k}, \qquad (1)$$

で与えられる。現在までに素性がよくわかっているソリトン方程式は、すべて (1) から導出される。詳しくは文献 [1] を参照されたい。なお、簡単のため本稿では差分は考えず、微分方程式のみを扱う。

2. Pfaffian の定義と性質

Pfaffian と行列式の違いは、要素の並べ方だけである。要素を正方形に並べたものが行列式であり、三角形に並べたものが Pfaffian である。(i, j) 成分を単に (i, j) と書くと、Pfaffian は、

$$\left|\begin{array}{cccc} (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,2N) \\ & (2,3) & \cdots & (2,2N) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (2N-1,2N) \end{array}\right|,$$

と書かれる。上記の Pfaffian を $(1, 2, \cdots, 2N)$ と書くこともある。その定義は、

$$(1, 2, \cdots, 2N) = \sum \pm(i_1, i_2)(i_3, i_4)\cdots(i_{2N-1}, i_{2N}), \qquad (2)$$

である。ここで和は、すべての成分 $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 2N\}$ の中から N 個 (i_1, i_2), (i_3, i_4), $\cdots$, (i_{2N-1}, i_{2N}) を $i_\mu \neq i_\nu$ for $\mu \neq \nu$ を満たすように選び出してくるすべての選び方に対してとる。また、$\pm$ は置換の符号、$\pm = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2N \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{2N} \end{pmatrix}$ である。例えば、

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3).$$

以下では記号の便宜のために、$(i,j)=-(j,i)$ for $i>j$, $(i,i)=0$ と定義しておく。(別にこのような定義をする必要はないが、こうしておくと記号 $(1,2,\cdots,2N)$ が便利なものになる。)

定義からただちに、添字を一ヶ所いれかえた Pfaffian は符号が反転することがわかる。

$$(1,2,\cdots,i,\cdots,j,\cdots,2N)=-(1,2,\cdots,j,\cdots,i,\cdots,2N). \tag{3}$$

例えば、

$$(1,2,3,4)=(1,2)(3,4)-(1,3)(2,4)+(1,4)(2,3),$$

$$(1,2,4,3)=(1,2)\underbrace{(4,3)}_{\substack{\| \\ -(3,4)}}-(1,4)(2,3)+(1,3)(2,4),$$

$$\therefore\ (1,2,3,4)=-(1,2,4,3).$$

このことより、二ヶ所に同じ添字がある Pfaffian は 0 である。

$$(1,2,\cdots,i,\cdots,i,\cdots,2N)=0. \tag{4}$$

次に Pfaffian の展開式を与える。Pfaffian の定義 (2) の右辺の i_1, i_2, $\cdots$, i_{2N} のうち一つが $2N$ なので、その成分について和を整理すると、次のように書ける。

$$(1,2,\cdots,2N)=\sum_{i=1}^{2N-1}(i,2N)\Big((i,2N)\text{ の係数}\Big).$$

ここで $(i,2N)$ の係数は、$\sum\pm(i_1,i_2)\cdots(i_{2N-3},i_{2N-2})$ の形をしており、和は $\{(k,l)\mid 1\le k<l\le 2N-1,\ k,l\neq i\}$ の中から $N-1$ 個を $i_\mu\neq i_\nu$ for $\mu\neq\nu$ を満たすように選ぶ選び方についてとられるので、結局その係数は Pfaffian $(1,2,\cdots,\widehat{i},\cdots,2N-1)$ になる。正確には符号 $(-1)^{i-1}$ がついて、

$$(1,2,\cdots,2N)=\sum_{i=1}^{2N-1}(-1)^{i-1}(i,2N)(1,2,\cdots,\widehat{i},\cdots,2N-1), \tag{5}$$

である。上記の二つの性質 (4), (5) だけを用いることによって、Pfaffian に対する代数恒等式が証明される。

3. Pfaffian 版の Plücker 関係式

Pfaffian 版の Plücker 座標を

$$\xi^{i_1 i_2 \cdots i_\mu} = (1, 2, \cdots, M, i_1, i_2, \cdots, i_\mu), \qquad M + \mu : \mathrm{even}, \tag{6}$$

とおくと、この ξ に対して、Pfaffian 版の Plücker 関係式 (1) が成り立つ。このことを証明するために、まず、

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{L} (-1)^l (a_1, a_2, \cdots, a_K, b_l)(b_1, b_2, \cdots, \widehat{b}_l, \cdots, b_L) \\
&+ \sum_{k=1}^{K} (-1)^k (a_1, a_2, \cdots, \widehat{a}_k, \cdots, a_K)(b_1, b_2, \cdots, b_L, a_k) = 0, \\
&\qquad K, L : \mathrm{odd},
\end{aligned} \tag{7}$$

を示そう。上式の左辺を (5) を用いて展開すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{L} (-1)^l \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} (a_k, b_l)(a_1, a_2, \cdots, \widehat{a}_k, \cdots, a_K) \\
&\qquad \times (b_1, b_2, \cdots, \widehat{b}_l, \cdots, b_L) \\
&+ \sum_{k=1}^{K} (-1)^k \sum_{l=1}^{L} (-1)^{l-1} (b_l, a_k)(a_1, a_2, \cdots, \widehat{a}_k, \cdots, a_K) \\
&\qquad \times (b_1, b_2, \cdots, \widehat{b}_l, \cdots, b_L),
\end{aligned}$$

となる。ここで $(a_k, b_l) = -(b_l, a_k)$ なので、第一項と第二項は相殺し、確かに (7) が成り立つことがわかる。

さて(7)において、$K=M+m$, $L=M+n$ とおき、

$$a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots,\ a_M=M,$$
$$a_{M+1}=i_1,\ a_{M+2}=i_2,\ \cdots,\ a_{M+m}=i_m,$$
$$b_1=1,\ b_2=2,\ \cdots,\ b_M=M,$$
$$b_{M+1}=j_1,\ b_{M+2}=j_2,\ \cdots,\ b_{M+n}=j_n,$$

ととると、(4)により $k,l=1,2,\cdots,M$ に対しては $(a_1,a_2,\cdots,a_K,b_l)$, $(b_1,b_2,\cdots,b_L,a_k)$ が 0 になる。よって、このとき (7) は、

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}(-1)^l(1,2,\cdots,M,i_1,i_2,\cdots,i_m,j_l)\\
&\qquad\times(1,2,\cdots,M,j_1,j_2,\cdots,\widehat{j_l},\cdots,j_n)\\
&+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(1,2,\cdots,M,i_1,i_2,\cdots,\widehat{i_k},\cdots,i_m)\\
&\qquad\times(1,2,\cdots,M,j_1,j_2,\cdots,j_n,i_k)=0,
\end{aligned}$$

となる。これは (6) の ξ に対する (1) 式に他ならない。以上で Pfaffian 版の代数恒等式 (1) が示された。

例として、$M=2N-2$, $m=3$, $n=1$, $i_1=2N-1$, $i_2=2N$, $i_3=2N+1$, $j_1=2N+2$ のときは、

$$\begin{aligned}
&(1,2,\cdots,2N-2,2N-1,2N,2N+1,2N+2)(1,2,\cdots,2N-2)\\
=&(1,2,\cdots,2N-2,2N-1,2N)(1,2,\cdots,2N-2,2N+1,2N+2)\\
-&(1,2,\cdots,2N-2,2N-1,2N+1)(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+2)\\
+&(1,2,\cdots,2N-2,2N-1,2N+2)(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+1), \quad (8)
\end{aligned}$$

となる。ここで、添字に関する交代性 (3) を用いている。また、$M=2N-1$, $m=2$, $n=2$, $i_1=2N+2$, $i_2=2N+3$, $j_1=2N$, $j_2=2N+1$ のとき

は、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&(1,2,\cdots,2N-1,2N+1,2N+2,2N+3)(1,2,\cdots,2N-1,2N)\\
&-(1,2,\cdots,2N-1,2N,2N+2,2N+3)(1,2,\cdots,2N-1,2N+1)\\
&+(1,2,\cdots,2N-1,2N,2N+1,2N+3)(1,2,\cdots,2N-1,2N+2)\\
&-(1,2,\cdots,2N-1,2N,2N+1,2N+2)(1,2,\cdots,2N-1,2N+3)\\
&=0. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Plücker 関係式は Grassmann 多様体を記述するものであった。Pfaffian の場合のこの関係式は、どのような多様体に対応するものなのであろうか? また、射影幾何的な意味付けに相当するものなどは、考えられるのであろうか?

4. 微分構造

Pfaffian の成分に微分構造をいれよう。微分構造のいれかたには二通りの方法が知られており、それぞれ Wronski 型、Gram 型と呼ばれる。ここでは Wronski 型のみを扱う。いま (i,j) 成分が $x_1,x_2,x_3,\cdots$ の函数であるとして、線形微分方程式、

$$\partial_{x_k}(i,j)=(i+k,j)+(i,j+k), \qquad (10)$$

が成り立っているとする。例えば (i,j) 成分を、

$$
\begin{aligned}
(i,j)&=\sum_l(\varphi_l^{(i)}\psi_l^{(j)}-\varphi_l^{(j)}\psi_l^{(i)}),\\
\varphi_l^{(i)}&=p_l^i\exp(p_lx_1+p_l^2x_2+p_l^3x_3+\cdots),\\
\psi_l^{(i)}&=q_l^i\exp(q_lx_1+q_l^2x_2+q_l^3x_3+\cdots),
\end{aligned}
$$

ととると、確かに (10) が成立する。このとき、

$$\partial_{x_k}(i_1,i_2,\cdots,i_{2N})=\sum_{\nu=1}^{2N}(i_1,i_2,\cdots,i_\nu+k,\cdots,i_{2N}), \qquad (11)$$

が成り立つ。実際、

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_k}(i_1, i_2, \cdots, i_{2N}) \\
&= \partial_{x_k} \sum \pm (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&= \sum \pm \Big\{ \Big(\partial_{x_k}(i_{l_1}, i_{l_2})\Big)(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})\Big(\partial_{x_k}(i_{l_3}, i_{l_4})\Big) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots \Big(\partial_{x_k}(i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}})\Big) \Big\} \\
&= \sum \pm \Big\{ (i_{l_1} + k, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2} + k)(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3} + k, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4} + k) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}} + k, i_{l_{2N}}) \\
&\qquad + (i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}} + k) \Big\} \\
&= \sum \pm \sum_{\nu=1}^{2N} \Big((i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \text{ で } i_\nu \text{ を} \\
&\qquad\qquad i_\nu + k \text{ に書き換えたもの} \Big) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2N} \sum \pm \Big((i_{l_1}, i_{l_2})(i_{l_3}, i_{l_4}) \cdots (i_{l_{2N-1}}, i_{l_{2N}}) \text{ で } i_\nu \text{ を} \\
&\qquad\qquad i_\nu + k \text{ に書き換えたもの} \Big) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2N} (i_1, i_2, \cdots, i_\nu + k, \cdots, i_{2N}).
\end{aligned}
$$

(11) と (3), (4) を用いると、$\tau = (1, 2, \cdots, 2N)$ に対する次のような微分則

を得る。

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1}\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+1),\\
\partial_{x_1}^2\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+2)+(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+1),\\
\partial_{x_2}\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+2)-(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+1),\\
\partial_{x_1}^3\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+3)+2(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+2)\\
&\quad +(1,2,\cdots,2N-3,2N-1,2N,2N+1),\\
\partial_{x_1}\partial_{x_2}\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+3)\\
&\quad -(1,2,\cdots,2N-3,2N-1,2N,2N+1),\\
\partial_{x_3}\tau &= (1,2,\cdots,2N-1,2N+3)-(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+2)\\
&\quad +(1,2,\cdots,2N-3,2N-1,2N,2N+1),\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

この微分則は Wronski 行列式の微分則と全く同じ形をしていることを注意しておく。上式を整理しなおせば、右辺に現れる各 Pfaffian が、τ の微分によって次のように書けることがわかる。

$$
\begin{aligned}
&(1,2,\cdots,2N-1,2N+1)=\partial_{x_1}\tau,\\
&(1,2,\cdots,2N-1,2N+2)=\frac{1}{2}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2})\tau,\\
&(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+1)=\frac{1}{2}(\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2})\tau,\\
&(1,2,\cdots,2N-1,2N+3)=\frac{1}{6}(\partial_{x_1}^3+3\partial_{x_1}\partial_{x_2}+2\partial_{x_3})\tau,\\
&(1,2,\cdots,2N-2,2N,2N+2)=\frac{1}{3}(\partial_{x_1}^3-\partial_{x_3})\tau,\\
&(1,2,\cdots,2N-3,2N-1,2N,2N+1)=\frac{1}{6}(\partial_{x_1}^3-3\partial_{x_1}\partial_{x_2}+2\partial_{x_3})\tau,\\
&\ \vdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

5. まとめ

Pfaffian に対する微分公式 (12) を用いて、代数恒等式 (1) を書き直すことによって、ソリトン方程式の双線形形式が得られる。例えば、(8), (9) は、

$$(D_{x_1}^4 - 4D_{x_1}D_{x_3} + 3D_{x_2}^2)\tau_{2N} \cdot \tau_{2N} = 24\tau_{2N+2}\tau_{2N-2},$$

$$(D_{x_1}^3 + 2D_{x_3} - 3D_{x_1}D_{x_2})\tau_{2N+2} \cdot \tau_{2N} = 0,$$

となる。ここで、$\tau_{2N} = (1, 2, \cdots, 2N)$ とおいた。上式は、変数変換 $u = (2\log\tau_{2N})_{xx}$, $v = \tau_{2N+2}/\tau_{2N}$, $\bar{v} = \tau_{2N-2}/\tau_{2N}$, $x = x_1$, $y = x_2$, $t = x_3$ によって、結合型 KP 方程式、

$$(4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} + 24(v\bar{v})_{xx} = 0,$$

$$2v_t + 3uv_x + v_{xxx} - 3(v_{xy} + v\int^x u_y \mathrm{d}x) = 0,$$

$$2\bar{v}_t + 3u\bar{v}_x + \bar{v}_{xxx} + 3(\bar{v}_{xy} + \bar{v}\int^x u_y \mathrm{d}x) = 0,$$

になる。解は Pfaffian τ で与えられる。他のソリトン方程式も同様にして、Pfaffian に対する代数恒等式と微分公式から得られる。

Pfaffian は特別な場合として、行列式を含んでいる。すなわち、任意の行列式 $\det(a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ は、Pfaffian $(1, 2, \cdots, 2N)$ において、$(i, j) = 0$ for $1 \le i < j \le N$, $(i, j) = a_{i,2N+1-j}$ for $1 \le i \le N$, $N + 1 \le j \le 2N$ ととることによって得られる。このような特別な場合を考えることにより、Pfaffian の代数恒等式 (1) から、行列式に対する通常の Plücker 関係式が導出される。またこのとき、結合型 KP 方程式は $\bar{v} = 0$ となって、通常の KP 方程式に帰着する。このようにして、従来の KP 系列の方程式はすべて、Pfaffian 版のソリトン方程式から直接導くことができる。

参考文献

[1] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理 (岩波書店, 1992).