

A-アルゴリズム とその応用

徳島大学教養部 大宮 真弓 (Mayumi Ohmiya)

1. A-アルゴリズムの概略.

この報告では、筆者がA-アルゴリズムと呼ぶところの極めて初等的かつ代数的な方法で、複素領域における2階線形常微分作用素

$$H(u) = -\partial^2 + u(x), \quad \partial = ' = \frac{d}{dx}$$

の、ある種のスペクトルに対応するものを解析する。ここに $u(x)$ は複素平面のある領域で定義された有理型関数である。本稿では上記の2階常微分作用素のみを扱うが、結果及び手法は少なくとも原理的には、そのまま他の高階あるいは多成分の作用素に拡張可能である。

$H(u)$ に付随する積分微分作用素

$$\Lambda(u) = \partial^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}u'(x) + u(x)\partial - \frac{1}{4}\partial^3 \right)$$

を $H(u)$ に付随する Λ 作用素、または漸化作用素と呼ぶ。A-アルゴリズムの名称の由来はこの作用素である。また3階常微分作用素

$$K(u) = \partial \cdot \Lambda(u) = \frac{1}{2}u'(u) + u(x)\partial - \frac{1}{4}\partial^3$$

も同時に用意しておく。なお $A \cdot B$ は作用素 A, B の作用素としての積を表す。例えば、 f をスカラー関数とすると、 $\partial f = f'$ だが、 $\partial \cdot f$ と書くと f を乗法作用素と考えて $f\partial + f'$ である。また、不定積分作用素 ∂^{-1} は次の様に意味付ける： $u = u(x)$ の微分多項式 $P(u)$ は、微分多項式 $Q(u)$ が存在して $\partial Q(u(x)) = P(u(x))$ が成立するとき、ここでは、可積分であると言おう。そこで、定数項の無い可積分微分多項式 $P(u)$ に対して、上記の微分多項式 $Q(u)$ で、定数項が無いものを対応させる作用素が ∂^{-1} である。

次に KdV 多項式を定義する。定数項の無い可積分な $u(x)$ の微分多項式全体のつくる \mathbb{C} 加群を $\widehat{\mathcal{A}}_0$ で表す。明らかに $K(u)1 = \frac{1}{2}u'(x) \in \widehat{\mathcal{A}}_0$ である。さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $K(u) \cdot \Lambda(u)^{n-1} 1 \in \widehat{\mathcal{A}}_0$ が知られている (cf. [T-D; p.3])。即ち、微分多項式の無限系列 $Z_n(u) = \Lambda(u)^n 1, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ が定義できる。それらを KdV 多項式と呼ぶ。

ここで、表題のA-アルゴリズムについて、その概略を説明しておく。さて、作用素 $\Lambda(u)$ はどのような空間で考えるべきであろうか。 x が実変数の場合、従来からの関数解析的アプローチならば、 $H(u)$ とともに、 $\Lambda(u)$ も L^2 空間で考えるのが自然の様だが、その場合でも ∂^{-1} はやはり余り気持ちの良いものではない。実際、動径 Schrödinger 作用素の逆散乱理論に Λ 作用素を応用した Mishev 氏 [Mi] によると、固有関数系の完全性が成り立たない等、解析的に扱うにはかなり厄介なもの様だ。それに対してここでは、

(A) $V(u)$ を KdV 多項式の無限系列 $Z_n(u), n \in \mathbf{Z}_+$ で生成された \mathcal{C} 上のベクトル空間として、

$$\Lambda(u) \in \text{End}V(u)$$

と考える。

これが Λ -アルゴリズムの第一の柱である。 $\Lambda(u)$ は KdV 多項式系列の生成作用素だから全く自然な考え方である。次に、下記の事実に注意しよう。

(B) $f_j(x), j = 1, 2$ がともに微分方程式

$$H(u)f_j(x) = -f_j''(x) + u(x)f_j(x) = 0$$

の解ならば、積 $g(x) = f_1(x)f_2(x)$ は微分方程式

$$K(u)g(x) = \frac{1}{2}u'(x)g(x) + u(x)g'(x) - \frac{1}{4}g'''(x) = 0$$

を満たす (cf. [P-T; p.23, Theorem 7])。

これは極めて計算的な初等的事実である。そしてこれが Λ -アルゴリズムの第二の柱である。そしてこの事実こそが 3 階常微分作用素 $K(u)$ さらには $\Lambda(u)$ を考える理由である。だがしかし、何故解の積が満たす微分方程式を考えるか、と言う理由は分からない。ただ随分昔からこのトリックは随所に用いられていたようだ。実際、この事実が認識されたのは非常に古く、実に百五十年以上前に知られていた超幾何関数に関する Clausen の等式

$${}_2F_1(a, b; c; x)^2 = {}_3F_2(2a, 2b, a+b; a+b+\frac{1}{2}; 2a+2b; x)$$

をもってその嚆矢とする。ところで、この等式はその初等性にも拘らず非常に重要な応用がある。例えば、de Branges による Bieberbach 予想の解決 [B] や、また Gosper による円周率 π の千七百五十二万桁までの近似計算に使われた Ramanujan の美しい等式

$$\frac{9801}{2\pi\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1103 + 26390n) \frac{(1/4)_n (1/2)_n (3/4)_n}{(1)_n (1)_n n!} \cdot \frac{1}{(99)^{4n}}$$

の証明に使われる。そして最後の第三の柱は次の事実である。

(C) KdV 多項式に対して 2 項定理

$$(1) \quad Z_n(u(x) + \lambda) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(n)} Z_j(u(x)) \lambda^{n-j}$$

が成立する。ここに、係数 $\alpha_j^{(n)}$ は次の漸化式で与えられる。即ち

定理 1. $\alpha_0^{(0)} = 1$ と置き

$$\alpha_j^{(n)} = \begin{cases} 1, & j = n \\ \alpha_{j-1}^{(n-1)} + \alpha_j^{(n-1)}, & j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, & j = 0 \end{cases}$$

とすると、任意の $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して展開式 (1) が成り立つ。また関係式

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \alpha_0^{(j-1)} \alpha_j^{(n)} = 1$$

及び

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_0^{(j)} \alpha_j^{(n)} = 0$$

が成り立つ (cf. [O1; Theorem 1])。

即ち、上記の (A),(B) 及び (C) を基礎に、純計算的な論法で作用素 $H(u)$ を解析する手法を Λ -アルゴリズムと称する。本稿では、 Λ -アルゴリズムの応用として、次の四つを考える。

- (a) 固有関数の具体的構成。
- (b) Ince 型の定理。
- (c) McKean-Trubowitz 型の跡公式。
- (d) Darboux 変換理論への応用。

本稿全般と関連の深い文献は、古くは [A-M-M]、[A]、[D-M-N]、[M-M] 等がある。講義録 [Mo] は深い洞察に満ちた魅力的な文献である。また近刊の [Di] は読み易い優れた教科書で、本稿とも深い関連がある。また頁数の関係から証明は殆ど省略してあるので、詳しくは [O1]、[M-O] を参照して下さい。

2. Λ -階数.

一般にベクトル空間 $V(u)$ は無限次元であるが、有限次元となるとき

$$\text{rank}_\Lambda u(x) = \dim V(u) - 1$$

とおく。KdV 多項式に対する二項定理である定理 1 により

$$(2) \quad \text{rank}_\Lambda u(x) = \text{rank}_\Lambda (u(x) - \lambda)$$

が成立する。さらに次を得る ([O1; Lemma 5])。

定理 2. $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ ならばベクトル空間 $V(u)$ は $Z_0(u), Z_1(u), \dots, Z_n(u)$ で張られる: $V(u) = \bigoplus_{j=0}^n \mathbf{C} Z_j(u)$.

従って、 $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ ならば、(2) より $n = \text{rank}_\Lambda (u(x) - \lambda)$ であるから、 $a_0(\lambda; u), a_1(\lambda; u), \dots, a_n(\lambda; u)$ が存在して

$$Z_{n+1}(u(x) - \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(\lambda; u) Z_j(u(x) - \lambda)$$

が成立する。定理 1 より

$$(3) \quad a_j(\lambda; u) = -\alpha_j^{(n+1)} \lambda^{n-j+1} + \sum_{k=j}^n \alpha_j^{(k)} a_k(0; u) \lambda^{k-j}$$

が容易に分かる。 $a_j(\lambda; u), j = 0, 1, \dots, n$ を Λ -特性係数と呼ぶ。また $n+1$ 次のモニック多項式

$$\Omega(\lambda; u) = \lambda^{n+1} - \sum_{j=0}^n a_j(0; u) \lambda^j$$

を Λ -特性多項式と呼ぶ。

3. 固有関数の構成.

この節では、 Λ -アルゴリズムを応用して、固有値問題

$$(4) \quad (H(u) - \lambda)f(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

の解を具体的に構成する。

$n = \text{rank}_{\Lambda} u(x) < \infty$ として

$$(5) \quad F(x; \lambda) = Z_n(u(x) - \lambda) - \sum_{j=1}^n a_j(\lambda; u) Z_j(u(x) - \lambda)$$

と置くと、仮定より $F(x; \lambda)$ は恒等的には零では無い。容易に分かるように

$$(\Lambda(u) - \lambda)F(x; \lambda) = \Lambda(u - \lambda)F(x; \lambda) = a_0(\lambda; u)$$

が成立する。従って、定義より

$$K(u - \lambda)F(x; \lambda) = 0$$

が直ちに分かる。そこで、 $u(x)$ は $x = a$ で正則として、 $f_j(x; \lambda), j = 1, 2$ を (4) の解で初期条件 $f_1(a; \lambda) = f_2'(a; \lambda) = 1$ 及び $f_1'(a; \lambda) = f_2(a; \lambda) = 0$ を満たすものとする。すると (B) の事実より、 $\alpha_j(\lambda), j = 1, 2, 3$ が存在して

$$F(x; \lambda) = \alpha_1(\lambda) f_1(x; \lambda)^2 + \alpha_2(\lambda) f_1(x; \lambda) f_2(x; \lambda) + \alpha_3(\lambda) f_2(x; \lambda)^2$$

が成立する、即ち $F(x; \lambda)$ は $f_j(x; \lambda), j = 1, 2$ の二次形式として表される。その判別式を

$$\Delta(\lambda; u) = \alpha_2(\lambda)^2 - 4\alpha_1(\lambda)\alpha_3(\lambda)$$

とすると、簡単な計算で

$$\Delta(\lambda; u) = F_x(a; \lambda)^2 - 2F(a; \lambda)F_{xx}(a; \lambda) + 4(u(a) - \lambda)F(a; \lambda)^2$$

を得る。この表示によると $\Delta(u)$ は正則な点 $x = a$ の選び方に依存している様に見えるが、実際は右辺を微分することにより、そうではないことがすぐに分かる。さらに定理 1 より、 $F(x; \lambda)$ は λ のモニック多項式である事が従うから

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda^{2n+1} + \text{lower terms}$$

も分かる。そこで

$$\Gamma(u) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \Delta(\lambda; u) = 0\}$$

とおくと、 $\#\Gamma(u) \leq 2n+1$ が成り立つ。重複も含めて、 $\lambda_j \in \Gamma(u), j = 0, 1, 2, \dots, 2n$ とすると、 $F(x; \lambda_j)$ は完全平方式であるから、 $\beta_{ij}, i = 1, 2$ が存在して

$$F(x; \lambda_j) = (\beta_{1j}f_1(x; \lambda_j) + \beta_{2j}f_2(x; \lambda_j))^2$$

である。従って次を得る。

定理 3. $n = \text{rank}_A u(x) < \infty$ とする。 $\lambda_j \in \Gamma(u)$ に対して、 $F(x; \lambda_j)$ を (5) で定義すると

$$g_j(x) = \sqrt{F(x; \lambda_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2n$$

は $\lambda = \lambda_j$ に対する固有値問題 (4) の固有関数である。

4. Ince 型の定理.

$\rho(x)$ を実基本周期 π 、虚基本周期 ω を持つ Weierstrass の楕円関数とする。 $p(x) = \rho(x + \frac{1}{2}\omega), x \in \mathbf{R}$ は周期 π の C^∞ 級実数値関数である。 Ince[I] によると、 n が非負整数ならば Hill 作用素 $H(n(n+1)p(x))$ を周期 2π の周期関数のクラスで考えたものは、 $2n+1$ 個の単純固有値 $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{2n}$ を持つ。この事に関しては [A-M-M] も見よ。従って、ソリトン理論の基本的事実 (cf. [D-M-N]) より、 $n(n+1)p(x)$ は $n+1$ 次定常 KdV 方程式を満たす。このことより $\text{rank}_A n(n+1)\rho(x) = n$ が容易に従う。この節では、この事実を A -アルゴリズムの観点から見直してみよう。

$\text{rank}_A u(x) = 1$ である関数 $u(x)$ 及び $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して $u_k = ku(x)$ と置く。

$$(6) \quad \frac{1}{8}(-u'' + 3u^2) = \frac{1}{2}a_0(0; u)u - a_0(0; u)$$

であるから

$$u_k'' = \frac{3}{k}u_k^2 - 4a_1(0; u)u_k - 8ka_0(0; u)$$

が成立する。さらに、これは一回積分すると

$$(u_k')^2 = \frac{2}{k}u_k^3 - 4a_1(0; u)u_k^2 - 8ka_0(0; u)u_k + \text{const.}$$

となる。微分多項式 $Z_m(u_k)$ から、上の二つの関係式を用いて $u_k^{(s)}, s \geq 2$ 及び $(u_k'(x))^{2l}, l \geq 1$ を消去すると、 u_k の多項式 $P_m(u_k), Q_m(u_k)$ が存在して

$$Z_m(u_k) = P_m(u_k) + Q_m(u_k)u_k'$$

と表せる。すると Λ アルゴリズムの範疇で

$$P_m(u_k) = \sum_{j=0}^m p_{mj}(k) u_k^j; \quad Q_m(u_k) = 0$$

が示される。ここに $P_m(u_k)$ の最高次の係数は漸化式

$$p_{m+1m+1}(k) = \frac{(2m+1)(2k-m(m+1))}{4k(m+1)} p_{mm}(k)$$

を満たす。このことより、 $m = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して $p_{mm}(\frac{n(n+1)}{2}) \neq 0$ 、また $m > n$ ならば $p_{mm}(\frac{n(n+1)}{2}) = 0$ が従うので次が示される。

定理 4. $\text{rank}_\Lambda u(x) = 1$ ならば

$$\text{rank}_\Lambda \frac{n(n+1)}{2} u(x) = n$$

が成立する。

(6) を $u(x)$ に対する微分方程式と見なせば、 $u(x)$ は退化している場合も含めて楕円関数であることが分かる。即ち次の三種類である：有理関数 $2\lambda^2(\lambda x + a)^{-2} + b$ 、三角関数 $2\lambda^2 \sin^{-2}(\lambda x + a) + b$ 、及び楕円関数 $2\lambda^2 \wp(\lambda x + a) + b$ 。従って次を得る。

系 5.

$$\begin{aligned} \text{rank}_\Lambda \left(\frac{n(n+1)\lambda^2}{(\lambda x + a)^2} + b \right) &= n, \\ \text{rank}_\Lambda \left(\frac{n(n+1)\lambda^2}{\sin^2(\lambda x + a)} + b \right) &= n, \\ \text{rank}_\Lambda (n(n+1)\lambda^2 \wp(\lambda x + a) + b) &= n. \end{aligned}$$

5. McKean-Trubowitz 型跡公式.

$q(x)$, $-\infty < x < \infty$ を周期 1 の滑らかな実数値関数とすると周期 2 の周期関数のクラスで考えた Hill 作用素 $H(q)$ のスペクトルは離散系列

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2i-1} \leq \lambda_{2i} < \dots$$

からなる。そこで $f_j(x)$ を λ_j に対応する正規化された固有関数とすると定数列 $\varepsilon_j, j \in \mathbf{Z}_+$ が存在して

$$(7) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j f_{2j}(x)^2 = 1$$

が成立する。これは McKean-Trubowitz[M-T] によって示された等式で Hill 作用素のスペクトルと Neumann 系の関連を示す重要な等式である。初等的証明に関しては [D-T] を参照のこと。なお係数 ε_j は $\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j}$ と退化していると $\varepsilon_j = 0$ となる。即ち有限個の λ_j を除いて退化している有限帯ポテンシャルならば、上の (7) は有限和になる。ここでは Λ 階数有限な関数について Λ -アルゴリズムの観点から等式 (7) を見直してみる。

$n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ として、 $a_j(\lambda; u)$ を $u(x) - \lambda$ の Λ -特性係数とする。そこで

$$\Gamma_0(u) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid a_0(\lambda; u) = 0\}$$

とおく。 $a_0(\lambda; u)$ は λ の $n+1$ 次多項式であるから、 $\#\Gamma_0 \leq n+1$ である。もし $\mu_j \in \Gamma_0(u)$, $j = 0, 1, \dots, n$ ならば

$$\Lambda(u)F(x; \mu_j) = \mu_j F(x; \mu_j)$$

である。即ち $\Gamma_0(u)$ は $\Lambda(u) \in \text{End}(V(u))$ のスペクトルに含まれることが分かる。さらに $\Lambda(u - \lambda) \in \text{End}(V(u - \lambda))$ を基底 $Z_0(u - \lambda), \dots, Z_n(u - \lambda)$ に関して行列表示すると

$$\Lambda(u - \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0(\lambda; u) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1(\lambda; u) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2(\lambda; u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n(\lambda; u) \end{pmatrix}$$

が従うので $\Lambda(u - \lambda) = \Lambda(u) - \lambda$ より

$$\det(\Lambda(u) - \lambda) = (-1)^n a_0(\lambda; u)$$

である。即ち $\Gamma_0(u)$ は $\Lambda(u) \in \text{End}(V(u))$ のスペクトルと一致する。 $\#\Gamma_0(u) = n+1$ ならば、 $F(x; \lambda)$ は各 x に対して λ の n 次の多項式であるから Lagrange の補間公式より

$$F(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{\lambda - \mu_i}{\mu_j - \mu_i} F(x; \mu_j)$$

であるから、この両辺に $\Lambda(u)$ を作用させることにより

$$a_0(\lambda; u) + \lambda F(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \mu_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{\lambda - \mu_i}{\mu_j - \mu_i} F(x; \mu_j)$$

を得る。

$$a_0(\lambda; u) = -\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \prod_{j=0}^n (\lambda - \mu_j)$$

であるから次を得る。

命題 6. $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ かつ $\#\Gamma_0(u) = n+1$ ならば等式

$$(8) \quad \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{(n)} F(x; \mu_j) = 1$$

が成立する。ここに

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{(n)} &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{\mu_j - \mu_i} \\ &= \frac{(n+1)! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{\mu_j - \mu_i}\end{aligned}$$

である。

さらに (8) 式の両辺に $\Lambda(u)$ を m 回作用させると

$$\sum_{j=0}^n \mu_j^m \varepsilon_j^{(n)} F(x; \mu_j) = Z_m(u(x)), \quad m \in \mathbf{Z}_+$$

が従う。この等式は $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ かつ $\#\Gamma_0(u) = n+1$ ならば $F(x; \mu_j), j = 0, 1, \dots, n$ がベクトル空間 $V(u)$ の基底になる、即ち

$$V(u) = \bigoplus_{j=0}^n \mathbf{C} F(x; \mu_j)$$

を意味するから、言い換えると $V(u)$ の基底の変換公式に他ならない。

$$Z_{n+1}(u) - \sum_{j=0}^n a_j(0; u) Z_j(u) = \sum_{j=0}^n \Omega(\mu_j; u) \varepsilon_j^{(n)} F(x; \mu_j) = 0$$

である。従って各 j に対して $\Omega(\mu_j; u) = 0$ であるから

$$\Omega(\lambda; u) = \prod_{j=0}^n (\lambda - \mu_j)$$

が成立する。さらに定理 3 を考慮すると次を得る。

定理 7. $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ かつ $\#\Gamma_0(u) = n+1$ とする。さらに

$$9) \quad \Gamma_0(u) \subset \Gamma(u)$$

ならば

$$\phi_j(x) = \sqrt{\varepsilon_j^{(n)} F(x; \mu_j)}$$

と置くと、これは固有値問題 (4) の固有値 μ_j に対する固有関数であるが $m \in \mathbf{Z}_+$ に対して等式

$$(10) \quad \sum_{j=0}^n \mu_j^m \phi_j(x)^2 = Z_m(u(x))$$

及び

$$(11) \quad \sum_{j=0}^n \mu_j^m \phi_j'(x)^2 = \frac{1}{2}(\partial^2 - [u\partial, \partial^{-1}])Z_m(u(x))$$

が成立する。特に (11) において $m=0$ とすると

$$\sum_{j=0}^n \phi_j'(x)^2 = -\frac{1}{2}u(x)$$

が成立する。

等式 (10) は有限帯ポテンシャルに関する McKean-Trubowitz の跡公式に他ならない。なお条件 (9) は各 $F(x; \mu_j), j=0, 1, \dots, n$ が 2 位の零点を持てば十分であるが、これはかなり一般に成立するものの様である。また等式 (11) は (10) 式を 2 回微分するだけで得られる。

6. Darboux 変換への応用.

$\phi(x) \in \ker H(u) \setminus \{0\}$ に対して $q(x) = \partial \log \phi(x)$ 、 $A_{\pm} = \pm \partial + q(x)$ と置くと

$$H(u) = A_- \cdot A_+$$

と因数分解される。この分解において因子 A_{\pm} の順序をいれかえた作用素

$$\begin{aligned} \widehat{H}(u) &= A_+ \cdot A_- \\ &= -\partial^2 + u(x) - 2\partial q(x) \end{aligned}$$

を Darboux 変換と言う。あるいは係数 $\hat{u}(x) = u(x) - 2q'(x)$ を Darboux 変換と言うこともある。この変換は 1882 年に Darboux[Da] によって発見された次の事実に始まる： $f_{\lambda} = f(x; \lambda)$ を固有値問題 (3) の非自明解とする。 $\mu \neq \lambda$ ならば

$$g(x) = \frac{W(f_{\mu}, f_{\lambda})}{f(x; \mu)}$$

と置くと $g(x)$ は恒等的には零ではなく

$$(H(u_{\mu}) - \lambda)g(x) = 0$$

が成立する。ここに $W(y, z) = yz' - y'z$ は Wronski 行列式であり、また

$$\hat{u}_{\mu} = \hat{u}_{\mu}(x) = u(x) - 2\partial^2 \log f(x; \mu)$$

である。他方 $\mu = \lambda$ ならば $g(x) = 1/f(x; \mu)$ として上のことが成立する (cf. [P-T; p.88])。

この事実は Crum[C] により、Sturm-Liouville 作用素の固有値を一つ減らしたり増やしたりするアルゴリズムに利用された。ここでは上の節と同様に、この古典的結果を A-アルゴリズムの観点から見直す。なお Darboux 変換のソリトン理論への応用については [M-S] を参照されたい。小冊子ながら実に多くの視点が手際良く紹介されている。

さて、我々のアプローチの基本になるのは $\Lambda(u)$ 及び $\Lambda(\hat{u}_\lambda)$ の Kupershmidt-Wilson(KW) 分解 [K-W]

$$\Lambda(u) - \lambda = \frac{1}{4} \partial^{-1} \cdot B_+(\lambda) \cdot \partial \cdot B_-(\lambda)$$

$$\Lambda(\hat{u}_\lambda) - \lambda = \frac{1}{4} \partial^{-1} \cdot B_-(\lambda) \cdot \partial \cdot B_+(\lambda)$$

である。ここに $B_\pm(\lambda)$ は $q(x; \lambda) = \partial \log f(x; \lambda)$ に対して $B_\pm(\lambda) = \pm \partial + 2q(x; \lambda)$ で定められる 1 階微分作用素である。この 1 階の作用素は形式的には Miura 変換

$$q(x; \lambda)^2 + q'(x; \lambda) = u(x) - \lambda; \quad q(x; \lambda)^2 - q'(x; \lambda) = \hat{u}_\lambda(x) - \lambda$$

の Fréchet 微分である。この KW 分解の第一の応用は次の等式である。

$$\text{定理 8. } B_-(\lambda) Z_n(u - \lambda) = B_+(\lambda) Z_n(\hat{u}_\lambda - \lambda), \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

この等式は筆者の [O2] において得られたものだが、ここでは Mishev 氏 [M-O] によって得られた Λ -アルゴリズムによる簡明な証明を与えておこう。

定理 8 の証明: 定理 8 の等式は $n = 0$ で明らかに成立することに注意しよう。さらに

$$B_-(\lambda) \cdot \partial^{-1} \cdot B_+(\lambda) = B_+(\lambda) \cdot \partial^{-1} \cdot B_-(\lambda)$$

もすぐ分かる。従って

$$\begin{aligned} B_-(\lambda) Z_n(u - \lambda) &= B_-(\lambda) \cdot \Lambda(u - \lambda)^n Z_0(u - \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n B_-(\lambda) \cdot (\partial^{-1} \cdot B_+(\lambda) \cdot \partial \cdot B_-(\lambda))^n Z_0(u - \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n (B_-(\lambda) \cdot \partial^{-1} \cdot B_-(\lambda) \cdot \partial)^n \cdot B_-(\lambda) Z_0(u - \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n (B_+(\lambda) \cdot \partial^{-1} \cdot B_-(\lambda) \cdot \partial)^n \cdot B_+(\lambda) Z_0(\hat{u}_\lambda - \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n B_+(\lambda) \cdot (\partial^{-1} \cdot B_-(\lambda) \cdot \partial \cdot B_+(\lambda))^n Z_0(\hat{u}_\lambda - \lambda) \\ &= B_+(\lambda) \cdot \Lambda(\hat{u}_\lambda - \lambda)^n Z_0(\hat{u}_\lambda) = B_+(\lambda) Z_n(\hat{u}_\lambda - \lambda) \end{aligned}$$

である。

定理 8 の等式は Darboux 変換理論において最も基本的なものと思う。例えば次の事実もこの等式から直ちに従う。

定理 9. $n = \text{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ ならば

$$n - 1 \leq \text{rank}_\Lambda \hat{u}_\lambda(x) \leq n + 1$$

が成立する。

この定理が Crum のアルゴリズムが成り立つ根拠である。ここではさらに詳しく調べる為に $\#\Gamma_0(u) = n+1$ を仮定する。もし $\mu_0 \in \Gamma_0(u) \cap \Gamma(u)$ ならば定理 2 より $\sqrt{F(x; \mu_0)} \in \ker(H(u) - \mu_0)$ である。但し $F(x; \lambda)$ は (5) 式で定義する。従って

$$\hat{u}_{\mu_0}(x) = u(x) - 2\partial^2 \log \sqrt{F(x; \mu_0)}$$

は $u(x)$ の Darboux 変換である。すると次を得る。

定理 10. $\text{rank}_A \hat{u}_{\mu_0}(x) = n - 1$ で

$$\Gamma_0(\hat{u}_{\mu_0}) = \Gamma_0(u) \setminus \{\mu_0\}$$

が成り立つ。

この事実は Crum のアルゴリズムそのものである。しかし残念ながら現時点では $\Gamma(\hat{u}_{\mu_0})$ についてはよく分かっていない。定理の前半の主張より、 $\Gamma(u)$ からは重複も込めて 2 個の元が消去されているはずだが、 μ_0 以外の元については考察が不十分の為分かっていない。ただし次の事実の証明はできている (cf. [M-O])。

定理 11. $\lambda_0 \in \Gamma(u) \setminus \Gamma_0(u)$ ならば $\text{rank}_A \hat{u}_{\lambda_0} \geq n$ である。

7. 将来の展望.

以下に思い付くままに列挙してみる。

(a) A -アルゴリズムは初等的だが、結構強力でもある。しかし $\dim V(u) = \infty$ の場合には全く無力といってもよい。しかし最小限の「何か」を付け加えることによって、少なくとも本稿で述べた事くらいは導けないであろうか。

(b) 上に導いた結果はある意味で全て既知の事実ばかりである。 A -アルゴリズムの初等性を活かして新しい事実の発見はできないであろうか。

(c) A 特性係数を $u(x)$ 自身を特徴付けるなんらかの量で陽に書き表せないだろうか。 $H(u)$ のスペクトルの基本対称式で書けることは周知の事実だが、スペクトルは $u(x)$ 自身から直接分かる情報とは別物である。例えば $u(x) = 2\wp(x)$ ならば $a_j(0; u)$, $j = 0, 1$ は基本周期の Eisenstein 級数で表されることは周知であろう。この事実の一般化である。

(d) A 作用素は KdV 方程式系の漸化作用素である。方程式系の対称性の一般論としての漸化作用素の理論、例えば [01] との関連はどうであろうか。本稿で論じた内容は大きな理論の氷山の一角であろう。これも一般化が望まれる。

1992年11月

参考文献

- [A-M-M] H. Airault, H. P. McKean and J. Moser: Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and related many body problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, **30**, 95-148 (1977).
- [A] S. I. Al'ber: On stationary problems for equations of Korteweg-de Vries type. *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**, 259-272 (1981).
- [B] L. de Branges: Underlying concepts in the proof of the Bieberbach conjecture. *Proceeding of ICM 86*, 25-42 (1987).
- [C] M. M. Crum: Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math.*, **6** 121-127 (1955).
- [Da] G. Darboux: Sur une proposition relative aux équations lineares. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **94** 1456-1459 (1882).
- [D-T] P. Deift and E. Trubowitz: An identity among squares of eigenfunctions. *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**, 713-717 (1981).
- [Di] L. A. Dickey: *Soliton equations and Hamiltonian systems*. World Scientific, Singapore (1991).
- [D-M-N] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov: Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties. *Russian Math. Surveys*, **31**, 59-145 (1976).
- [I] E. L. Ince: Further investigations into the periodic Lamé functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60**, 83-99 (1940).
- [K-W] B. A. Kuperschmidt and G. Wilson: Modifying Lax equations and second Hamilton structure. *Invent. Math.*, **62**, 403-436 (1981).
- [M-S] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Darboux transformations and solitons*. Springer, Berlin (1991).
- [M-M] H. P. McKean and P. van Moerbeke: The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Math.*, **30**, 217-274 (1975).
- [M-T] H. P. McKean and E. Trubowitz: Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**, 143-226 (1976).
- [Mi] Y. P. Mishev: Crum-Krein transforms and Λ -operators for radial Schrödinger equations. *Inverse problem* **7**, 379-398 (1991).
- [M-O] Y. P. Mishev and M. Ohmiya: Rational Darboux transformation and Λ -operator. (in preparation.)
- [Mo] J. Moser: *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*. Lezioni Fermiane, Pisa (1981).
- [O1] M. Ohmiya: KdV polynomials and Λ -operator, to appear.
- [O2] M. Ohmiya: On the Darboux transformation of the second order differential operator of Fuchsian type on the Riemann sphere. *Osaka J. Math.*, **25** 607-632 (1988).

- [Ol] P. J. Olver: Applications of Lie groups to differential equations. Springer, New York (1986).
- [P-T] J. Pöschel and E. Trubowitz: Inverse spectral theory. Academic, Orland (1987).
- [T-D] S. 田中 俊一、伊達 悦朗: KdV 方程式. 紀伊国屋, 東京 (1979).