数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 219-230

Dressing Method と逆散乱法，佐藤理論の考察

富大・工 川田 勉 (Tsutomu Kawata)

§1. はじめに

逆散乱法 (IST) は非線形可積分系の初期値問題を解くもの等として知られているが，その適用の範囲や計算の複雑さに欠点がある。最近は広田氏の Billinear method やその数学的基礎を解明した佐藤理論等が精力的に研究されている。もちろん，それぞれの手法には特徴があり，従って互いの関係を明かにする事は有益である。Zakharov-Shabat は早い時期に dressing method と称される方法を開発した。[1] 我々は dressing method を媒介にして，IST と佐藤理論を関係付ける事を考えたい。その理由は，まず IST と dressing method は共に解を求めるために Gelfand-Levitan 型方程式 (GLE) を使い，一方 dressing method と佐藤理論では擬微分作用素が重要な役割を演ずるからである。

§2. dressing methodの大要.

最も重要な事は，Fredholm型(積分)演算子$(=\mathbb{1}+\mathbb{F})$は，2種のVolterra型演算子$(=\mathbb{1}+\mathbb{V}^{\pm})$で因子化される

$$\mathbb{1}+\mathbb{F}=(\mathbb{1}+\mathbb{V}^{+})^{-1}(\mathbb{1}+\mathbb{V}^{-}) \tag{2.1}$$

ことである。但し，$\mathbb{F}$，$\mathbb{V}^{\pm}$は試行函数φ_0に以下の様に作用する，

$$[\mathbb{F}\varphi_0](x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x,y)\varphi_0(y)\,dy,$$

$$[\mathbb{V}^{\pm}\varphi_0](x)=\mp\int_{\pm\infty}^{x}V^{\pm}(x,y)\varphi_0(y)\,dy.$$

$F(x,y)$，$V^{\pm}(x,y)$は，それぞれの核であり，(2.1)は核で書き直すと以下の様なGLEに相当する，

$$V(x,y)+F(x,y)+\int_{-\infty}^{x}V(x,z)F(z,y)\,dz=0 \quad \text{for } x>y. \tag{2.2}$$

ここにVはV^{-}，$F(x,y)$は spectral函数と呼ぶ。trivialな微分演算子$\mathcal{L}_0^{(m)}$（mは$\partial\equiv\partial/\partial x$の leading次数）を想定して$\mathbb{F}$に対し

$$[\ \mathbb{F}\ ,\ \mathcal{L}_0^{(m)}\ ]=0 \tag{2.3}$$

なる交換条件を課し，(2.1)を連立すれば，同じ次数の微分演算子$\mathcal{L}^{(m)}$が$(\mathbb{W}=\mathbb{1}+\mathbb{V}=\overline{\mathbb{W}}^{-1}$で$)$

$$\mathcal{L}^{(m)}=\mathbb{W}\mathcal{L}_0^{(m)}\overline{\mathbb{W}} \tag{2.4}$$

生成される。これを微分演算子の dressingと称する。次節に

述べるが $\mathcal{L}^{(m)}$ は逐次決定でき，しかも Kernel で定まる係数よりなる。この時，$\mathcal{L}_0^{(m)}$ と異る $\mathcal{L}_0^{(n)}$ があって，

$$[\ \mathcal{L}_0^{(m)},\ \mathcal{L}_0^{(n)}\ ] = 0 \qquad (2.5)$$

が課されると，(2.4) に従って nontrivial な可積分条件

$$[\ \mathcal{L}^{(m)},\ \mathcal{L}^{(n)}\ ] = 0 \qquad (2.6)$$

が得られる。これは広いクラスの非線形可積分系を包含しており，その解法も GLE (2.2) の解法に帰着される。

§3. dressing method と Cauchy 問題

dressing の方法を示す前に (2.4) を書き直しておく，

$$\mathcal{L}^{(m)} - \mathcal{L}_0^{(m)} = [\ \mathbb{V},\ \mathcal{L}_0^{(m)}]\ \overline{\mathbb{W}}\ . \qquad (3.1)$$

ここに $\mathcal{L}^{(m)}, \mathcal{L}_0^{(m)}$ は，

$$\mathcal{L}_0^{(m)} = -\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial t_j} + \mathcal{M}_0^{(m)}, \quad \mathcal{L}^{(m)} = -\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial t_j} + \mathcal{M}^{(m)} \qquad (3.2)$$

とし，独立変数 t_j $(j=1,2,\cdots)$ の微分演算子も含む。従って問題は t_j 依存を持つ事になる。以下では簡単のため，$\mathcal{M}_0^{(m)} = \partial^m$，故に $\mathcal{M}^{(m)} = \partial^m + u_1\partial^{m-1} + \cdots + u_m$ となる。

さて，$[\mathbb{V}\varphi_0](x)$ は

$$[\mathbb{V}\varphi_0](x) = \int_{-\infty}^{x} V(x,y)\,\partial_y\{\partial_y^{-1}\varphi_0(y)\}\,dy$$

$$= V(x,y)\,\partial_y^{-1}\varphi_0(y)\Big|_{y=-\infty}^{y=x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\{\partial_y^{-1}\varphi_0(y)\}\,dy$$

と部分積分できる。これを繰返せば，下限 $(y=-\infty)$ を落して

$$\mathbb{V} \cong \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial^k V(x,y)}{\partial y^k}\bigg|_{y=x} \partial^{-1-k} \tag{3.3}$$

となる。これからVolterra型演算子は $O(\partial^{-1})$ で，一般に微分演算子とならない。この事から，(3.1)右辺は微分多項式 $\mathcal{D}^{(m)}$ とVolterra演算子 $\mathbb{K}^{(m)}$ に分解できる。

$$\mathcal{L}^{(m)} - \mathcal{L}_0^{(m)} = \mathbb{K}^{(m)} + \mathcal{D}^{(m)} \quad . \tag{3.4}$$

ここに

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(m)}(x) = &\sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \partial^{m-k-1} X_k - (-1)^k Z_k \partial^{m-k-1} \right\} \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-k-2} \Big\{ \partial^l \left[\partial^{m-k-l-2} X_k \overline{V}(x,z) \right]_{z=x} \\ &- (-1)^k Z_k \partial^l \left[\partial^{m-k-l-2} \overline{V}(x,y) \right]_{y=x} \Big\} ,\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$X_k = \frac{\partial^k V(x,y)}{\partial x^k}\bigg|_{y=x} , \qquad Z_k = \frac{\partial^k V(x,y)}{\partial y^k}\bigg|_{y=x} . \tag{3.7}$$

又，$\mathbb{K}^{(m)}$ の kernel $K^{(m)}(x,y)$ は，

$$K^{(m)}(x,y) = R^{(m)}(x,y) + \int_y^x R^{(m)}(x,z) \overline{V}(z,y)\, dz \, , \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} R^{(m)}(x,y) = \; &\sum \alpha_j \frac{\partial V}{\partial t_j} + \frac{\partial^m V}{\partial x^m} - (-1)^m \frac{\partial^m V}{\partial y^m} \\ &- \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \partial^{m-k-1} X_k - (-1)^k Z_k \partial^{m-k-1} \right\} V(x,y) . \end{aligned} \tag{3.8}$$

この導出には，$\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}} \{ = (\mathbb{1}+\mathbb{V})(\mathbb{1}+\overline{\mathbb{V}}) \} = \mathbb{1}$ ，すなわち，

$$V(x,y)+\overline{V}(x,y)+\int_y^x V(x,z)\overline{V}(z,y)\,dz=0$$

を使った。さて，(3.4)の$\mathcal{L}^{(m)}$は微分多項式だから$K^{(m)}(x,y)$が消失せねばならない。その時(3.8)は$R^{(m)}$に関するVolterra方程式だから，$R^{(m)}=0$，すなわち

$$\sum_j \alpha_j \frac{\partial V}{\partial t_j}+\frac{\partial^m V}{\partial x^m}-(-1)^m\frac{\partial^m V}{\partial y^m}=\mathcal{D}^{(m)}(x)V \quad , \qquad (3.10)$$

が成立する。但し$\mathcal{D}^{(m)}(x)$は，(3.9)の右辺第2項の微分演算子である。詳細は省くが，$\mathcal{D}^{(m)}(x)$は$\mathcal{M}^{(m)}$の係数u_jからなり，条件$\lim_{y\to-\infty}V(x,y)=0$で(3.10)はCauchy問題となる。この事柄を考慮すれば，(2.6)の初期値問題が解ける。

§4. 佐藤理論との関係[2,3]

dressing methodの様に，微分演算子との条件が課されない$\mathbb{W}\partial\overline{\mathbb{W}}$は擬微分作用素となるので，それを$\mathbb{L}=\mathbb{W}\partial\overline{\mathbb{W}}$と書いて，次式を考える。

$$\mathbb{L}^m=\partial^m+[\mathbb{W},\partial^m]\overline{\mathbb{W}} \ . \qquad (4.1)$$

これは(3.1)と同様に処理でき，

$$\mathbb{L}^m=\mathcal{B}_m+\tilde{K}^{(m)}, \qquad (4.2)$$

と微分演算子$\mathcal{B}_m$とVolterra成分$\tilde{K}^{(m)}$に分離する。微分演算子に関する部分には(3.1)と何等の相違もない，

$$\mathcal{B}_m=\partial^m+\mathcal{Q}^{(m)} \qquad (4.3)$$

$\mathbb{L}^m$ を t_k 微分すると

$$\frac{\partial \mathbb{L}^m}{\partial t_k} = \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial t_k} \partial^m \overline{\mathbb{W}} - \mathbb{W} \partial^m \overline{\mathbb{W}} \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial t_k} \overline{\mathbb{W}}.$$

これに佐藤方程式

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial t_k} = \tilde{\mathcal{B}}_k \mathbb{W} - \mathbb{W} \partial^k$$

を使えば，Lax型の可積分条件を得る，

$$\frac{\partial \mathbb{L}^m}{\partial t_k} = [\tilde{\mathcal{B}}_k , \mathbb{L}^m] . \qquad (4.4)$$

但し，$\tilde{\mathcal{B}}_k = [\mathbb{W} \partial^k \overline{\mathbb{W}}]_+$．(4.2)から $\mathcal{B}_k = \tilde{\mathcal{B}}_k$ である。

又，(4.4)から次の可積分条件を得る，

$$\frac{\partial \mathcal{B}_m}{\partial t_n} - \frac{\partial \mathcal{B}_n}{\partial t_m} + [\mathcal{B}_m , \mathcal{B}_n] = 0 . \qquad (4.5)$$

一方 dressing method では (3.2)から $\alpha_m, \alpha_n = 1$ として，

$$\mathcal{L}^{(m)} = -\frac{\partial}{\partial t_m} + \mathcal{B}_m , \quad \mathcal{L}^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial t_n} + \mathcal{B}_n$$

とできる事から (2.6)も(4.5)に帰着される。これは，$\mathcal{B}_k$ が依然として GLEから求める事ができることを意味する。すなわち，GLEは佐藤理論においても有効なのである。

§5. GLEのSpectral函数

逆散乱法では散乱行列が重要な役を演ずる。一方，dressing method では Fredholm型演算子の kernel がそれに対応する様に表示されたが，ここでは具体的に調べる。良く知られた nonlinear Schrödinger 方程式（NLS eq.）に

使える 2x2行列の固有値問題を取り上げる。

$$\Phi^{\pm}_x = \{-i\lambda\sigma_3 + Q(x)\}\Phi^{\pm}, \qquad (5.1a)$$

$$\Phi^{\pm}(\lambda, x) \to J(\lambda x) \equiv \exp(-i\lambda\sigma_3 x) \text{ as } x \to \pm\infty. \qquad (5.1b)$$

$Q(x)$は off-diagonal potential, $\lambda(=\xi+i\eta)$は複素パラメータである。散乱行列は次式で定める。

$$\Phi^{-}(\lambda, x) = \Phi^{+}(\lambda, x)S(\lambda). \qquad (5.2)$$

dressing method においては $\mathcal{L}_0^{(1)}\{=\mathcal{L}_0\}$を $i\sigma_3\partial$, それに交換条件 $[\mathcal{L}_0, \mathbb{F}]=0$ を課せば $\mathcal{L}=i\sigma_3\partial+Q(x)$が得られる。但し, 試行函数は $\varphi_0 \simeq J(\lambda x)$として,

$$\Phi^{\pm}(\lambda, x) = \{\mathbb{1} + \mathbb{V}^{\pm}(x:y)\}J(\lambda y) \qquad (5.3)$$

と書く。この時随伴する Cauchy 問題は以下の通りである。

$$\frac{\partial V^{\pm}}{\partial x} - \sigma_3\frac{\partial V^{\pm}}{\partial y} = Q(x)V^{\pm}, \qquad (5.4a)$$

$$V^{\pm}(x,x) - \sigma_3 V^{\pm}(x,x)\sigma_3 = \pm Q(x), \qquad (5.4b)$$

$$V^{\pm}(x,y) \to 0 \quad \text{as } y \to \pm\infty. \qquad (5.4c)$$

可積分条件(2.6)が NLS eq. に相当するには,

$$\mathcal{L}^{(2)} = \partial_t + \mathcal{M}^{(2)}, \quad \mathcal{M}^{(2)} = -2i\sigma_3\mathcal{L}^2 + 2Q\mathcal{L} - i\sigma_3(Q^2 - Q_x), \qquad (5.5)$$

とすれば良い。この $[\mathcal{L}, \mathcal{L}^{(2)}]=0$ によれば $\mathcal{L}^{(2)}\Phi^{\pm}$は $\mathcal{L}$ の固有解で(5.1b)から

$$\mathbb{W}^{\pm}_t = \mathcal{M}^{(2)}\mathbb{W}^{\pm} - \mathbb{W}^{\pm}\mathcal{M}^{(2)}_0 \qquad (5.6)$$

を得る(但し $\mathcal{M}^{(2)}_0 = -2i\sigma_3\mathcal{L}_0^2$)。これを(2.1)のt微分に代入

すれば S 行列が従うのと良く似た関係、

$$\mathbb{F}_t + 2i[\,\mathbb{F}, \sigma_3\partial\,] = 0 \tag{5.7}$$

に到る。これと $[\,\mathcal{L}_0, \mathbb{F}\,] = 0$ を $J(xx)$ に作用させると

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \sigma_3 \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\sigma_3 = 0,$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial t} = 2i\left\{\sigma_3\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\sigma_3\right\},$$

をえるが $F = F_{dia} + F_{off}$ とすると，$F_{dia}(x-y)$，$F_{off}(x+y)$ で

$$\frac{\partial F_{dia}}{\partial t} = \frac{\partial F_{off}}{\partial t} + 4i\frac{\partial^2 F_{off}}{\partial x\,\partial y}\sigma_3 = 0 \tag{5.8}$$

を得る。明かに F_{dia} は t 不変，一方 F_{off} は t 依存も含めて，

$$F_{off}(z:t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}_{off}(\xi:0)e^{i\xi(z+4\xi\sigma_3 t)}d\xi \tag{5.9}$$

となる。これは IST の結果，

$$V(x,y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} V(x,z)F(y+z)\,dz = 0 \quad (x>y), \tag{5.10a}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi:z,z)\,d\xi\,\sigma_3, \tag{5.10b}$$

と違っている。つまり函数行列 W は

$$W(\xi:x,y) = \begin{bmatrix} 0, & \rho_+^P(\xi)e^{-i\xi(x+y)} \\ \rho_-^N(\xi)e^{i\xi(x+y)}, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

の様に off-diagonal であって，ρ_+^P，ρ_-^N は S 行列の要素から成る反射係数なのである。Spectral 函数 F が off-diagonal の時

とそうでない時は，GLE の解法に相違が現れるのみならず，散乱行列との対応が（特に dressing method では）はっきりしない。これを調べるために次節で IST の Review と Spectral 函数の check を行う。

§6．逆散乱法の Review とその修正[4)]

逆散乱法では，Jost 行列の解析性と S 行列の三角分解が重要で，そのために $\Phi^{\pm}$ を

$$\Phi^{\pm}(\lambda,x)J^{-1}(\lambda x)=\Psi^{\pm}(\lambda,x)=[\psi_1^{\pm},\psi_2^{\pm}](\lambda,x) \quad (6.1)$$

と変形する。$\Psi\to\Psi JCJ^{-1}$ なる変換も許される事から，

$$\Psi^{+}=[\Psi_{+}^{N}|1\rangle,\Psi_{+}^{P}|2\rangle],\quad \Psi^{-}=[\Psi_{-}^{P}|1\rangle,\Psi_{-}^{N}|2\rangle] \quad (6.2)$$

と書ける。ここで肩字 "P, N" は解析域がそれぞれ，Im.λ が "positive，negative" を意味し，更に

$$\begin{aligned}\Psi_{+}^{P}&=[\psi_1^{-}/s_{11},\psi_2^{+}], & \Psi_{+}^{N}&=[\psi_1^{+},\psi_2^{-}/s_{22}],\\ \Psi_{-}^{P}&=[\psi_1^{-},\psi_2^{+}/s_{11}], & \Psi_{-}^{N}&=[\psi_1^{+}/s_{22},\psi_2^{-}],\end{aligned} \quad (6.3)$$

である。s_{11}，s_{22} は S 行列の対角成分である。Riemann-Hilbert の問題（RHP）から，

$$E+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}\Psi^{\pm}(\xi,x)W^{\pm}(\xi:x,x)=\begin{cases}\Psi_{\pm}^{P}(\lambda,x) & (\mathrm{Im}.\lambda>0)\\ \Psi_{\pm}^{N}(\lambda,x) & (\mathrm{Im}.\lambda<0)\end{cases} \quad (6.4)$$

が得られる。$W^{\pm}$ は (5.11) の如き行列で，特に $W^{+}=W$ とした。例えば (6.4) から，以下の如き ξ-独立な行列を定義できる。

$$V_{\pm}^{P}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\Phi_{\pm}^{P}(\xi+i0,x)-E\right\}J[\xi(x-y)]d\xi. \quad (6.5)$$

この行列の第1,第2ベクトル成分は$x>y$, $x<y$でのみ値を持ち、同様に$V_{\pm}^{N}(x,y)$も構成して、両行列の成分を取り合せて

$$V^{+}=[V_{+}^{N}|1\rangle, V_{+}^{P}|2\rangle], \quad V^{-}=[V_{-}^{P}|1\rangle, V_{-}^{N}|2\rangle] \quad (6.6)$$

を作れば、これらは行列として、それぞれ$y>x$, $y<x$なる台を持つのである。V^{-}の成分に注意して(6.4),(6.5)を使えば、(5.10)を得る事ができる。

所で$y<x$を台に持つ行列はV^{-}以外にも取る事ができる。すなわち、以下に示す行列

$$V_{0}^{-}=[V_{+}^{P}|1\rangle, V_{+}^{N}|2\rangle] \quad (6.7)$$

がそうである。V_0^-の導入は、(6.5)の様に書くと

$$V_{0}^{-}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\Phi_{0}^{-}(\xi,x)-E\right\}J[\xi(x-y)]d\xi, \quad (6.8a)$$

但し、

$$\Phi_{0}^{-}=[\Phi_{+}^{P}|1\rangle, \Phi_{+}^{N}|2\rangle]. \quad (6.8b)$$

かく導入定義されたΦ_0^-の成分ベクトルを(6.4)に従って$\lambda\to\xi\pm i0$と極限移行して主値積分で表示する。同様にΦ^{+}も主値積分で書いて、両者を比較すると次式が得られる。

$$\Phi_{0}^{-}(\xi,x)=\Phi^{+}(\xi,x)\left\{1+W(\xi:x,x)\sigma_{3}\right\}. \quad (6.9)$$

このVoterra表示は(5.3),(6.1)から次の様に書く、

$$\Phi_{0}^{-}(\xi,x)=\left\{\mathbb{1}+\mathbb{V}_{0}^{-}(x:z)\right\}J[\xi(z-x)]. \quad (6.10)$$

そこで(6.9)のVolterra演算子表示は，次の様になる。

$$\{1+\mathbb{V}_0^-(x;z)\}J(\xi z)=\{1+\mathbb{V}^+(x;z)\}J(\xi z)$$
$$\times\{1+W(\xi;0,0)\sigma_3\}\ . \qquad (6.10)$$

我々は，(2.1)の代りに

$$(1+\mathbb{F})=(1+\mathbb{V}^+)^{-1}(1+\mathbb{V}_0^-) \qquad (6.11)$$

を用いる。すると，(6.10)は演算子$\mathbb{F}$に次の条件を課す。

$$\mathbb{F}(x;z)J(\xi z)=J(\xi x)W(\xi;0,0)\sigma_3\ . \qquad (6.12)$$

これは，フーリエ変換に相当し，故に反転できて，既に与えた(5.10b)のspectral函数に一致する。

§2. おわりに

より直接的にdressing methodを示したが，trivialな微分演算子を微分演算子に写すために常にある種のCauchy問題が随伴する。これは特性初期値問題であり，これを利用して非線形偏微分系の初期値問題が解ける。

何等の制限無しでtrivialな微分演算子をdressingすれば擬微分作用素が生成されるが，その時でも微分演算子の部分は不変である。この事から佐藤方程式で導かれる非線形可積分系もdressing methodと同様にGLEで解けるようになる。又，双方のケースは同じクラスの非線形問題を扱うと云って良い。唯，τ函数等から由来する代数的性

質に関する問題は，今後の課題である。

1+1次元，2×2行列の問題を例に取って，ISTとdressing method の関係が調べられた。GLEの入力データとなるべきspectral函数は，dressing methodの時には，ISTのケースと違って対角成分が一定だけど残る。これはGLEの実際の解法に対しては問題を残す。この基本的な原因は，dressing methodで定義されたFredholm型演算子のVolterra型演算子による因子化形式と，採用されたVolterra型演算子を定義するJost函数の選択にある。調べてみると許容されるJost函数の組合せは唯一ではない。これを修正する事によって，ISTとdressing methodで得られるGLEのspectral函数は，完全に一致させる事ができる事を示した。

文献

1) V. E. Zahharov and A. B. Shabat : Func. Anal. Appl. 8 (1974) 43

2) M. Sato : RIMS 講究録 439 (1981) 30

3) Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro : Suppl. Prog. Theor. Phys., No. 94 (1988) 210

4) T. Kawata : J. Phys. Soc. Japan, 61 (1992) 3479