数理解析研究所講究録
第 824 巻 1993 年 42-46

Borsuk-Sieklucki の定理について

小山 晃 (Akira Koyama)

大阪教育大学 数理科学

$\mathbf{R}^n$ の部分集合について次に事実は、例えば、Hurewicz-Wallman[2] によってよく知られている。

定理 1 部分集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ が n 次元である必要十分条件は、$IntA \neq \phi$ であることである。

よって、$\mathbf{R}^n$ の n 次元部分集合の族について次のことが直ちにわかる。

系 1 $\mathbf{R}^n$ の互いに交わらない n 次元部分集合の族は高々可算である。

この事実は可分な n 次元多様体及び可分な n 次元多面体においても成り立つことは容易にわかる。もちろん、これが任意の n 次元コンパクト距離空間については必ずしも成り立たない。例えば、n 次元コンパクト距離空間 X に対し、$X\times$ (the Cantor set) を考えればよい。そこで、定理 1 は強烈な事実だから多様体や多面体以外の類の空間以外ではとても成り立つ見込みはないが、系 1 のような事実はいったいどんな類の空間で成りつか？具体的には n 次元 ANR について成り立つか？というのは自然な問いかけになるだろう。この問題について、まず Borsuk[1] 、続いて Sieklucki[4] によって肯定的な解決が得られている。実際にはもっと強い次の形の結果が示された。

定理 2 (Borsuk-Sieklucki) *compact ANR M* の n 次元閉部分集合の非可算族 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ について、

$$dim(K_\alpha \cap K_\beta) < n \ if \ \alpha \neq \beta$$

ならば、$dimM > n$ である。

この証明はホモロジー論を用いたものでなかなか難しい。ホモロジー論のような道具を使わず分かりやすい証明を与えることもひとつの問題

になると思うが、ここでは、この類の結果を導く次元関数を拡張することを考えることにする。すなわち、ANR内の互いに交わらない閉部分集合の族をコホモロジー次元を用いてコントロールする事を試みる。

以後特に断らない ANR は ANR for the class of metric spaces, 考える空間は、コンパクト距離空間, map(s) は連続写像を意味する。一般的な問題としては次のものを考える。

問題 1 G を（適当な）可換群とする。M を $c-dim_G M = n$ であるコンパクト *ANR* とする。このとき、任意の互いに交わらない $c-dim_G = n$ である M の閉部分集合の族は高々可算か？

また、コホモロジー次元の定義は次の形で与えておく:

定義 1 空間 X の G 係数コホモロジー次元が n 以下であるとは、任意の閉部分集合 $A \subset X$ について、包含写像 $i :\hookrightarrow X$ が

$$\textit{epimorphism}\ i^* : H^n(X; G) \longrightarrow H^n(A; G)$$

を誘導することをいい、$c-dim_G X \leq n$ と表す。

いろいろ同値な表現があるがここでは上記の定義を用いる。コンパクト ANRs' については、整係数コホモロジー次元と (被覆) 次元とは一致するのでこの場合、「問題」は Borsuk-Sieklucki の定理そのものとなるので問題として成立しないことに注意しておく。そうなると ANRs' に問題として考える意味があるか心配になるかも知れないが係数に依って異なるコホモロジー次元を持つ ANRs' が存在することが知られているので大丈夫! だだ、コンパクト ANRs について、Dranishnikov の結果「$c-dim_Z X = 3$ である無限次元コンパクト距離空間 X が存在する。」と異なり、「ある係数群 G について有限次元コホモロジー次元を持つ無限次元コンパクト ANR が存在するか？」は現在のコホモロジー次元論では大きな問題の一つである。

一般的に、「問題」が解けるかどうかわからないが、肯定的な立場からは係数群 G が可算であることが必要な気がする。この仮定の元で解決する努力をしたつもりですが、力及ばずもう少し条件をつけた形の結果をこれから報告していく。

定義 2 空間 X が $q-lc_S$ *at a point* $x \in X$ であるとは、任意の x の開近傍 U に対して、x の開近傍 $V \subseteq U$ *s.t* 包含写像 $i : V \hookrightarrow U$ が自明な準同型写像:

$$0 = i_* : H_q(V; Z) \longrightarrow H_q(U; Z)$$

を誘導する。ただし、H_* は、特異ホモロジー論を表すとする。
が存在することをいう。
X が $lc^n_S at x$ であるとは、$q-lc_S$ $at\ x\ for\ all\ q=0,1,\cdots,n$ であることをいう。

X のすべての点で lc^n_S であるとき、単に、X は lc^n_S であるという。

Mardešić[3] によって次のことが示されている。これは、LC^{n-1} 空間が ANR for n-dimensional spaces であることのホモロジー版と考えて良いだろう。実際、証明も同様なテクニックである。

補題 1 空間 X が lc^n_S ならば、次の条件を満たす ($\epsilon>0$ について定義されている) 減少関数 $\delta(\epsilon)>0$ が存在する。

任意の閉部分集合 $X_0\subseteq X$ と $0<\epsilon'<\epsilon''$ に対して,

$\zeta\in Z_{n-1,\delta(\epsilon'')}(X_0,G)$, $\zeta\sim_{\delta(\epsilon')}0\ in\ X_0$

ならば

$$\delta\sim_{\epsilon'}0\ in\ the\ generaized\ ball\ Q_0=x\in X|\rho(x,X_0)<\epsilon''$$

ここでは次のような記法を用いた: 空間 X と正数 $\epsilon>0$ について、X の係数を可換群 G に持つ n 次元 ϵ-チェインから成る群を、$C_{n,\epsilon}(X,G)$ と、n 次元 ϵ-サイクルから成るその部分群を、$Z_{n\epsilon}(X,G)$ と表す。さらに、$\zeta\in Z_{n,\epsilon}(A,G)$ が $B\supseteq A$ で η-ナルホモローガスであるとは、$\partial\xi=\zeta$ となる $\xi\in C_{n+1,\eta}(B,G)$ が存在することをいい、$\zeta\sim_\eta 0$ in B と表す。

コサイクルを手作業で動かすことはなかなか難しいので見やすいサイクルを動かすことにしたい。係数群が可算である場合は、n 次元コンパクト多面体は高々可算個しか存在しない事実と係数群の可算性をフルに利用すると次の補題を示すことができる。

補題 2 空間 X は lc^n_S、可換群 G は可算とする。このとき、次の条件を満たす X の閉部分集合の族 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$:

(1) A は非可算集合、

(2) $\alpha\neq\alpha'$ ならば　$K_\alpha\cap K_{\alpha'}=\phi$

(3) 任意の $\epsilon>0$ に対して、閉部分集合 $B_\alpha\subseteq L_\alpha\subseteq K_\alpha$ $s.t.$

$diam[L_\alpha]<\epsilon$、 かつ

包含写像 $B_\alpha\hookrightarrow L_\alpha$ が誘導する準同型写像 $\check{H}_n(B_\alpha;G)\longrightarrow\check{H}_n(L_\alpha;G)$ が単射ではない

が存在するならば, X の閉部分集合 M $s.t.$

包含写像 $M \hookrightarrow X$ が誘導する準同型写像

$$\check{H}_n(M;G) \longrightarrow \check{H}_n(X;G)$$

が単射ではない

が存在する。

コホモロジー次元と双対的にホモロジー次元を、例えば空間 X と係数群 G について、次のように定義してみよう: すべての $m \geq n$ と任意の閉部分集合 $A \subseteq X$ に対して、包含写像 $A \hookrightarrow X$ が誘導する準同型写像$\check{H}_m(A;G) \longrightarrow \check{H}_m(X;G)$ が単写となる最小の n を G を係数群とする X の**ホモロジー次元**といい、$h-dim_G X = n$ と表す。この定義はなかなかいいのだが、Čech ホモロジー論は必ずしも計算し易いものではなく、コホモロジー次元ほどうまくは行かない。しかし、補題2のように、ホモロジー次元の考え方も捨てたものではない。そこで少しずるいことをしてみよう。

定義 3 *(可算)* 可換群 G が *property(D_n)* を満たすとは、*(可算)* 可換群 G^* *s. t.*

任意の空間 X とその閉部分集合 $A \subseteq X$ について、包含写像 $A \hookrightarrow X$ の誘導する準同型写像:

$$\check{H}^n(X;G) \longrightarrow \check{H}^n(A;G), \check{H}_n(A;G^*) \longrightarrow \check{H}_n(X;G^*)$$

がそれぞれ全射であることと単射であることが同値である

が存在することである。

普遍係数定理を見ると、例えば、G が標数0の体、$G = Q, R, C$, ならば、すべての n について G は property(D_n) を満たすことがわかる。また、任意の可換群が property(D_1) を満たすことにも注意しておく。

このとき、上の二つの補題から次のことが成り立つ。これは、「問題1」の弱い部分解になる。

定理 3 G を *property(D_n)* を満たす可算可換群とする。$lc^n_{\mathbb{Z}}$ な空間 X について、$c-dim_G X = n$ ならば、X の互いに交わらない $c-dim_G = n$ である閉部分集合の族は高々可算である。

系 2 $ANRM$ について、$c-dim_Q M = n$ ならば、M の互いに交わらない $c-dim_Q = n$ である閉部分集合の族は高々可算である。

古典的な Hopf の拡張定理によってコンパクト空間 X の次元は、例えば Hurewicz-Wallman[2] によって、係数群 Q/Z のホモロジー次元と一致することが知られている。よって、「Borsuk-Sieklucki の定理」も定理 3 の系として得られる。

最後に「問題 1」の特別の場合として次の問題をあげておく。

問題 2 lc^{∞}_{S} 空間 X について: 可算可換群 G に対して、$c-dim_G X = n$ ならば、互いに交わらない $c-dim_G = n$ である閉部分集合の族は高々可算か？

特に、G が *pricipal ideal domain* の場合はどうか？

参考文献

[1] K. Borsuk, Concerning the dimension of ANR-sets, *Bull. Pol. Acad. Sci.* 9 (1961), 685-687.

[2] W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, *Princeton University Press,* Princeton, 1948.

[3] S. Mardešić, Comparison of singular and Čech homology in locally connected spaces, *Michigan Math. J.* 6 (1959), 151-166.

[4] K. Sieklucki, A generalization of a theorem of K. Borsuk concerning the dimension of ANR-sets, *Bull. Pol. Acad. Sci.* 10 (1962), 433-436. Correction, 12 (1964), 695