

Blow-up of solutions of quasilinear degenerate  
parabolic equations with convection

都立大 望月 清 (kiyoshi Mochizuki)  
航空高専 鈴木 龍一 (Ryuichi Suzuki)

次のような熱源と convection term を持つ一次元空間  
の porous media 型方程式の Cauchy 問題を考える。

$$(1) \quad \partial_t \beta(u) - u_{xx} + g(u)_x = f(u) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

ただし、 $\beta(v)$ ,  $f(v)$ ,  $g(v)$ ,  $\varphi(x)$  は非負で次の条件を満  
たすとする。

$$(A1) \quad \beta(v), f(v), g(v) \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}),$$
$$\beta(v), \beta'(v) > 0, \beta'(v) \leq 0, f(v), g(v), g'(v) > 0, \text{ for } v > 0,$$
$$f \circ \beta^{-1}, g \circ \beta^{-1} \text{ は } [\beta(0), \infty) \text{ で局所リプシッツ連続.}$$

$$(A2) \quad \{g \circ \beta^{-1}\}'(v) \leq C \sqrt{\{\beta^{-1}(v)\}'}} \quad \text{near } v = 0.$$

(1)は物理、化学、生物などにあらわれる様々な現象のモデルで、例えば「プラズマのモデルにおいては、 $\beta(u(x,t))$ は温度、 $g(u)_x$ は対流項、 $f(w)$ は熱源を表す。

方程式の例としては

$$(3) \quad (u^{\frac{1}{m}})_t - u_{xx} + (u^{\frac{q}{m}})_x = u^{\frac{p}{m}} \quad (m, p, q \geq 1)$$

で  $2q \geq m+1$  の場合である。

もし (A1) と (A2) を仮定すれば (1)(2) の連続で  $x$  について有界な弱解が一意的に存在する。([5], [7])

まず、方程式(1)で特徴的なことは Interface の有限伝播性である。それを言うために次の条件を仮定する。

$$(A3) \quad \exists a_1 > 0, \quad g(x) > 0, x \in (-a_1, a_1), = 0 \quad x \in (-a_1, a_1).$$

$$(A4) \quad \frac{g'(v)}{\beta'(v)} \text{ は } v \text{ について単調増加, } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{g'(v)}{\beta'(v)} = 0$$

$$(A5) \quad \beta(0) = f(0) = 0, \quad \int_0^1 \frac{1}{\beta(v)} dv < \infty.$$

(A4)(A5) の条件は(3)では、 $m > 1, q > 1$  の場合である。

この時、Cauchy 問題(1)(2)の弱解  $u(x,t)$  の Interface  $\xi(t)$

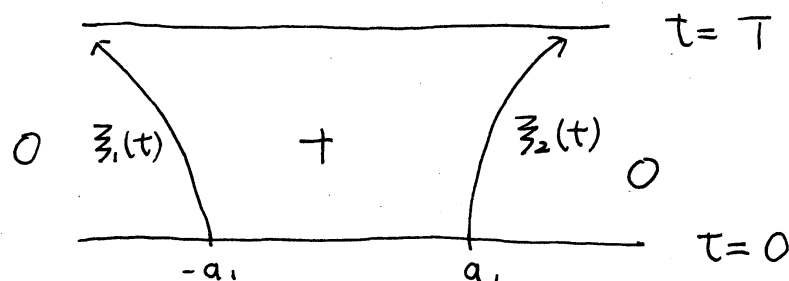
の有限伝播性を得る。

定理 I [8]

ある連続関数  $\xi_i(t) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して, 各  $t \in (0, T)$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R} \mid u(x, t) > 0\} = (\xi_1(t), \xi_2(t)).$$

ただし  $T$  は解の存在時間である。



本論で興味あるのは, Cauchy問題 (1)(2) の爆発解である。  
そこで blow-up するための必要条件

$$(A6) \quad \int_1^{\infty} \frac{\beta'(v)}{f(v)} dv < \infty$$

を仮定する。この時, 特別な方程式 (3) の場合,  $\beta > m, \varphi$  で初期値  $\varphi(x)$  が十分大きければ, 解が有限時間で爆発することがわかっている。(Imai-Mochizuki [6] を参照) すなわち, ある時刻  $T \in (0, \infty)$  が存在して

$$\lim_{t \uparrow T} \sup_x u(x, t) = \infty$$

が成り立つ。この時刻  $T$  を爆発時間と言う。また、ある点列  $(x_i, t_i) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  が存在して  $x_i \rightarrow x, t_i \nearrow T, u(x_i, t_i) \rightarrow \infty$  ( $i \rightarrow \infty$ ) が成り立つ点  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  を爆発点と呼ぶ。爆発点全体の集合を爆発集合と呼び、 $S'$  で表す。

以下 (1)(2) の爆発解  $u(x, t)$  について考える。特に興味を持っているのは、爆発時間  $T$  における Interface  $\xi_i(t)$  の挙動と爆発集合  $S'$  の形を調べることである。

これについては、 $f(v) \equiv 0$  のとき次のような結果がある。

空間次元  $n=1$  のとき (R. Suzuki [9])

(i)  $f(v)$  の増大度が  $v$  に比べて極めて大きい場合、

初期値  $f(\omega)$  に技巧的条件を付え加えるなら

$$S' \text{ は有限集合, } \lim_{t \nearrow T} |\xi_i(t)| < \infty$$

(ii)  $f(v)$  の増大度が  $v$  に比べて極めて小さい場合

$$S' = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\},$$

$n > 1$  のとき (Mochizuki - Suzuki [10])

(i)  $\Rightarrow S'$  は有界集合で Interface は有限にとどまる。

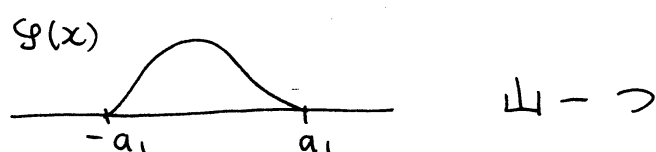
(ii)  $\Rightarrow S' = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ , Interface は無限遠へ広がる。

特に (3) に限れば Galaktionov [4] の結果もある。

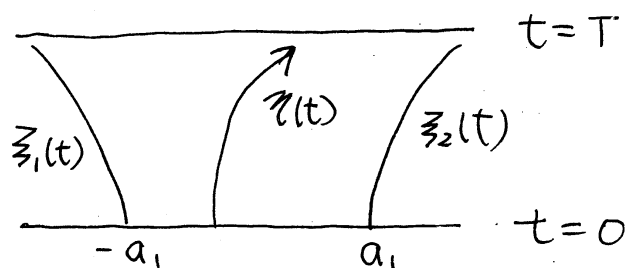
以下、一次元空間で、 $f(v) \equiv 0$  のとき上の (i) と同じことが言えないか調べる。すなわち  $f(v)$  の増大度が  $v$  や  $f(v)$

に比べて極めて大きいとき、爆発集合  $S$  が有限になるか調べたい。しかし、このままでは調べるのが難しいので初期値  $g(x)$  の形について次のような制限を与える。

(A7)  $g(x)$  の極大点はただ一つ。



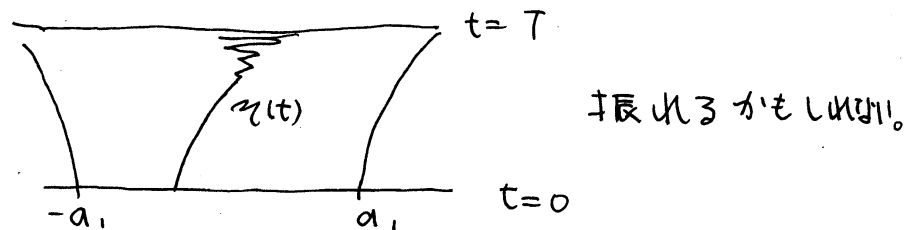
この時、放物型方程式の解の性質より  $t$  秒後の山の頂点の位置、すなわち  $u_x(x, t) = 0$  なる点  $x$ , の個数は常に1個で、その点を  $x = \tau(t)$  と表すと、 $\tau(t)$  は連続的に変化することがわかる。( [1] [2] [3] [8] を参照 )



特に、 $g(v) \equiv 0$  のとき方程式が Reflection について不変であることを用いて

(\*)  $\exists \lim_{t \uparrow T} \tau(t) = \tau_0$  (とおく) が存在することを示し、これを使って  $S = \{\tau_0\}$  を示した。ところが  $g(v) \neq 0$  のときは方程式が Reflection について不変であ

ることが言えない, すなわち  $v_a(x,t) = u(2a-x,t)$ ,  $a \in \mathbb{R}$   
 ( $a$ についての  $u$  の折り返し) は方程式(1)をみたさない。故に  
 $\lim_{t \rightarrow T} \eta(t)$  の存在が言えるかどうかわからない。もし  $\eta(t)$   
 が振れた場合,  $S = \{\eta_0\}$  が言えない。



ここが方程式に  $f(u)_x$  が付いたときの難しいところである。  
 本論では, (\*) を示し  $S = \{\eta_0\}$  を言いたいのので, (\*\*) を示す  
 ための別の条件を捜す必要がある。これについては, 方程式  
 が semilinear のとき Friedman-Lacey [3] が次のよう  
 な結果を得た。

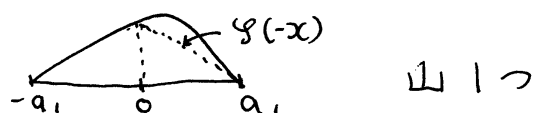
### Friedman-Lacey

$$u_t - u_{xxx} + (u^2)_x = u^p \quad (p > 3)$$

に対し  $(-a_1, a_1)$  上の Dirichlet 問題を考える。

初期値  $\varphi(x)$  に対して次のような仮定をする。

$$\varphi(x) \text{ の極大点はただ一つ, } \varphi(-x) \leq \varphi(x) \quad x \in [0, a_1]$$



さらに

$$(**) \quad \varphi_{xxx} - (\varphi^2)_x + \varphi^p \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{Q}'$$

と仮定すれば、山の頂点の軌跡  $\gamma(t) \geq 0$  で、 $\lim_{t \rightarrow T} \gamma(t) = \gamma_0$  が存在して、 $S' = \{\gamma_0\}$  となる。

Friedman-Lacey の結果より (\*\*\*) すなわち  $u_t \geq 0$  in  $\mathcal{D}'$  (これは最大値の原理より言える) が (\*\*) を言うための条件であることが予測される。

従って、退化放物型方程の Cauchy 問題の場合も同様の仮定をする。すなわち

$$(A8) \quad g_{xx} - g(y)_x + f(y) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'$$

さらに  $f(w)$  の増大度が  $v$  や  $g(w)$  に比べて極めて大きいと仮定する:

(A9) ある  $C^2$ -関数が存在して

$$(i) \quad F(w), F'(w), F''(w) > 0 \quad \text{for } v > 0$$

$$(ii) \quad \int_1^\infty \frac{dz}{F(z)} < \infty$$

(iii) ある定数  $c > 0$  と  $v_0 > 0$  が存在して

$$f'F - F'f - \frac{1}{2}(g')^2 F \geq c(F^2 g'' + F'F) \quad v \geq v_0,$$

注意 (A9) の条件は (3) で  $P+m > 2g$ ,  $P > m, g > 1$

の場合にあたる。

この時、Friedman-Laceyの結果を退化放物型方程式の Cauchy 問題に拡張できる。

### 定理 2 (L8)

(A8) を仮定すれば、 $\lim_{t \uparrow T} \eta(t) = \eta_0$  が存在し  $\eta_0 \in (-a_1, \infty]$  さらには (A9) を仮定すれば、 $S' = \{\eta_0\}$ 。  $\eta_0 > -\infty$  である事実を用いて、 $t \uparrow T$  のとき左側の Interface が有限にとどまる。すなわち  $\lim_{t \uparrow T} \xi_1(t) > -\infty$ 。

最後に残った問題は、 $\eta_0 < \infty$  か  $\eta_0 = \infty$  どちらが成り立つかという問題である。この問題に対してはさらに方程式と初期値  $\varphi(\infty)$  に対して次の仮定をする。

(A10) ある  $C^2$ -関数  $\Phi(v)$  が存在して

(i)  $\Phi(v), \Phi'(v), \Phi''(v) > 0$  for  $v > 0$ ,  $\Phi(0) = 0$ .

(ii) 
$$\int_1^\infty \frac{dz}{\Phi(z)} < \infty$$

(iii) ある正の定数  $c > 0$  と  $v_1 > 0$  が存在して

$$4\Phi''(f'\Phi - \Phi'f) \geq (\Phi'')^2\Phi \quad \text{for } v \geq v_1$$

であり



$$\frac{(g'')^2 \Phi}{\Phi'' \beta'} + \frac{f \Phi'}{\Phi \beta'} < C \quad \text{for } 0 \leq v \leq v_1$$

$$(iv) \quad \int_0^1 \sup_{0 \leq v \leq H^{-1}(t)+1} \frac{g'(v)}{\beta'(v)} dt < \infty$$

$$\text{ただし } H(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\eta}{\Phi(\eta)}$$

$$(v) \quad g'' - g(\varphi)' + f(\varphi) \geq \Phi(\varphi) \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

注意 (A10) の仮定は、 $f(v)$  の増大度が  $v$  や  $g(v)$  に比べて極めて大きいという仮定で、(3) の方程式に対して言えば  $P+m > 2q$  ( $2m-1 \leq q$ ),  $P+1 > q+m$  ( $\frac{m}{2} + \frac{1}{2} \leq q \leq 2m-1$ ) の場合にあたる。方程式(3)に限れば (A10) の条件は (A9) の条件より強い条件になる。

### 定理3 ([8])

定理2においてさらに (A10) を仮定すれば、 $\gamma_0 < \infty$ , この事実を用いて右側の Interface も有限にとどまる。すなわち  $\lim_{t \uparrow T} \xi_2(t) < \infty$ .

参考文献

- [1] S. Angenent, The zeroset of a solution of a parabolic equation, *J. Reine Angew. Math.*, 390(1988) 79-96.
- [2] Chen X.-Y. and H. Matano, Convergence, asymptotic periodicity and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations, *J. Differential Equations*, 78 (1989) 160-190.
- [3] A. Friedman and A.A. Lacey, Blow-up of solutions of semilinear parabolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* 132 (1988), 171-186.
- [4] V.A. Galaktinov, Proof of the localization of unbounded solutions of the non-linear partial differential equation  $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$ , *Differentsial'nye Uravneniya*, 21 (1985) 15-23; *Differential Equations*, 21 (1985), 11-18.
- [5] B.H. Gilding, A nonlinear degenerate parabolic equation, *Ann Scuola Norm. Sup. Pisa*, 4(1977), 393-432.
- [6] T. Imai and K. Mochizuki, preprint.
- [7] O.A. Oleinik, A.S. Kalashnikov and Chzou Yui-Lin, The Cauchy problem and boundary problems for

equations the type of nonlinear filtration,  
Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math., 22 (1958),  
667-704 (Russian)

[8] R. Suzuki, Blow-up solutions of quasilinear degenerate parabolic equations with convection, preprint

[9] R. Suzuki, On-blow-up sets and asymptotic behavior of one dimensional quasilinear degenerate parabolic equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991), 375-398.

[10] K. Mochizuki and R. Suzuki, Blow-up sets and asymptotic behavior of interfaces for quasilinear degenerate parabolic equations in  $\mathbb{R}^n$ , J. Math. Soc. Japan. 44 (1992) 485-504