数理解析研究所講究録
第824巻 1993年 198-211

Trudinger's inequality and related elliptic equations

Takashi SUZUKI (鈴木 貴, 愛媛大・理)

1. [7] において我々は固有値問題

$$-\Delta u = \lambda f(u) e^{u^{\alpha}} \ \text{ in } B \equiv \{|x|<1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad u=0 \ \text{ on } \partial B \tag{1}$$

の古典解 $u(x)$ の $\lambda \downarrow 0$ での挙動を考察した。即ち非線形項が

$$0 \leqq f(u) \leqq C(1+u^m) \quad (u \geqq 0) \tag{2}$$

である場合.

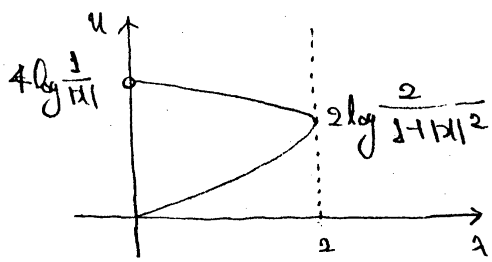
$$\lambda \downarrow 0, \quad \|u\|_{L^\infty} \longrightarrow +\infty \tag{3}$$

であるような解 $\{(\lambda, u)\}$ は macroscopic には次のような挙動をする:

定理1. $0<\alpha<1 \Rightarrow u(x) \longrightarrow +\infty \quad (\forall x \in B)$

$\alpha>1 \Rightarrow u(x) \longrightarrow 0 \quad (\forall x \neq 0)$

borderline case $\alpha=1, m=0$ は, [6] によって $u(x)$ は特異極限 $4\log\frac{1}{|x|}$ に収束する。$f \equiv 1$, $\alpha=1$ に対する解の大域的分岐図は下図のようなものである:



我々は更に次のような microscopic な漸近挙動を得た：

定理2 $\alpha>1$ の場合，適当な列 $\tau\to+\infty$ が存在して，部分列に対し

$$u^\alpha(e^{-\tau/2}x)=u^\alpha(e^{-\tau/2})+2\log\frac{2}{1+|x|^2}+o(1)\quad(\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\text{ で広義一様})\tag{4}$$

となる。但し，

$$f(u)\geqq 0,\ \lim_{u\to+\infty}(\log f)'(u)=0,\ f(u)\approx u^{-m}\ (u>>1)\tag{5}$$

(4)の右辺第2項は $\lambda=2$，$f(u)\equiv 1$，$\alpha=1$ に対する(1)の一意古典解であることに注意する。即ち，(1)の解の挙動は microscopic には全て

$$-\Delta u=\lambda e^u\quad\text{in } B,\qquad u=0\quad\text{on } \partial B\tag{1'}$$

の解が制御しているように思われる。このような考えがどこまで正しく，どこから誤りであるかを本稿では吟味してみたい。実際［7］において我々は次の事を示している：

定理3 $\alpha<2$ で $f(u)\equiv 1$ である場合には，定理2の収束は $|x|\leqq e^{\tau/2}$ において一様とはならない。

2．前項において問題(1)において2つの borderline：$\alpha=1$，$\alpha=2$ が存在することが明らかになった。ここで考えるのは $\alpha=2$ の場合である。この場合は Trudinger-Moser の不等式

$$\sup\left\{\int_B e^{v^2}dx \;\middle|\; \|\nabla v\|_2^2\leqq 4\pi\right\}<+\infty\tag{6}$$

と密接な関係がある。特に(2)の下で

$$\underline{\lim}\int_B |\nabla u|^2 dx \geqq 4\pi \tag{7}$$

となることがわかる。

(6)に現われる数4πはMoserによって最良であることがわかっている。実は次のような形で精密化することができる：

<u>命題4</u> $\lim_{u\to+\infty} k(u) = +\infty$ なら

$\exists\{w\}\subset H_0^1(B)$ s.t. $\int_B |\nabla w|^2 dx < 4\pi$, $\int_B k(w)e^{w^2}dx \to +\infty$, $w \geqq 0$ (8)

一方(6)に基づいて、Shawは次の存在定理をLagrange乗数法によって示した：

<u>命題5</u> $\exists v \in H_0^1(B)$ s.t. $\int_B G(v_+)dx = \mu$, $\int_B |\nabla v|^2 dx = \delta < 4\pi$ 時

$\exists(\lambda, u)$：(1)の古典解 s.t. $\int_B G(u)dx = \mu$, $\int_B |\nabla u|^2 dx \leqq \delta$.

ここで、$G(u) = \int_0^u f(u)e^{u^2}dx$ である。$G(u) = k(u)e^{u^2}$と書くと、

$\lim_{u\to+\infty} f(u)/u = +\infty \Rightarrow \lim_{u\to+\infty} k(u) = +\infty$ となる。従がって、命題4のwを、命題5のvとして採用することにすれば、

$\exists(\lambda, u)$：(1)の古典解 s.t. $\int_B G(u)dx \longrightarrow +\infty$, $\overline{\lim}\int_B |\nabla u|^2 dx \leqq 4\pi$

となることがわかる。

第一式により、$\|u\|_{L^\infty} \longrightarrow +\infty$ となる。一方 $f'(u) \geqq 0$ $(u \gg 1)$ より、

$$u f(u)e^{u^2} \gtrsim \int_0^u f(u)e^{u^2}dx = G(u) \quad となるので、$$

$$4\pi \geqq \int_B |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_B u f(u) e^{u^2} dx \gtrsim \lambda \int_B G(u)\, dx$$

となり，$\lambda \downarrow 0$ を得る。(7) と合わせると，

定理 6　$\lim_{u \to +\infty} f(u)/u = +\infty$ 時

$\exists (\lambda, u)$：(1) の古典解の族　(3) を満たし，

$$F = \int_B |\nabla u|^2 dx \longrightarrow 4\pi \tag{9}$$

3．前定理における $\{F\}$ の挙動と，(4) の収束の一様性とは，次の様な関係がある：

定理 7　定理 2 において，$\alpha = 2$ で

$$F = \int_B |\nabla u|^2 dx \longrightarrow F_0 < 6\pi \tag{10}$$

であるときは，(4) は $\mathbb{R}^2$ 上広義一様である。

証明を述べるためには，定理 2 の証明の概略と，次の Brezis-Merle の定理に言及する必要がある。

定理 8 (Brezis-Merle)

$$-\Delta v = V(x) e^v \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{11}$$

において $\|V\|_{L^p} = O(1)$，$\int_\Omega |V| e^v dx \leqq \delta < 4\pi/p'$ $\Rightarrow$ $\|v\|_{L^\infty} = O(1)$

但し，$1 < p \leqq \infty$，$1/p + 1/p' = 1$ である。

定理 2 の証明の概略：$\alpha = 2$ に対して述べる。

1° Gidas-Ni-Nirenberg の定理によって (1) の古典解は回転対称.
$u=u(|x|)$, $u_r<0$ $(0<r=|x|\leqq 1)$ である. Liouville変換 $r=e^{-t/2}$,
$U(t)=u(r)$ を導入すると, $\cdot=\frac{d}{dt}$ に対して

$$\ddot{U}+\frac{\lambda}{4}f(U)e^{U^2-t}=0,\quad U>0\ (t>0),\ U(0)=0,\ \dot{U}e^{t/2}\to 0\ (t\to+\infty) \qquad (12)$$

が得られる。

$\tau\to+\infty$ に対し $U_\tau(t)=U(t+\tau)$, $V(t)=U_\tau^2(t)-U^2(\tau)$ とおく。

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{V}+\frac{\lambda}{2}U_\tau f(U_\tau)e^{U^2(\tau)-\tau}e^{V-t}=2\dot{U}_\tau^2\quad (t>-\tau),\\ &V(0)=0,\quad \dot{V}e^{t/2}\to 0\ (t\to+\infty)\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

となる。即ち, $K(t)=2\lambda U_\tau(t)f(U_\tau(t))e^{U^2(\tau)-\tau}$ に対して

$$\int_t^\infty (s-t)\,2\dot{U}_\tau^2(s)\,ds=V(t)+\int_t^\infty (s-t)\frac{K(s)}{4}e^{V(s)-s}\,ds-V(+\infty) \qquad (14)$$

また $v(r)=V(t)$, $k(r)=K(t)$ $(r=e^{-t/2})$ と置けば

$$-\Delta v=k(|x|)e^{v}-\rho\quad (|x|<e^{\tau/2}),\qquad v\begin{cases}>0 & (|x|<1)\\ =0 & (|x|=1)\\ <0 & (1<|x|<e^{\tau/2})\end{cases} \qquad (15)$$

が, $\rho(r)=8e^{t}\dot{U}_\tau^2(t)$ に対して成立する.

2° 定理1の証明において $\alpha>1$ のときは,

$$\eta=\max_{0\leqq r\leqq 1}|r u_r|\longrightarrow 0 \qquad (16)$$

であることがわかっている. $\dot{U}_\tau(t)=-\frac{1}{2}r u_r\Big|_{r=e^{-\frac{t+\tau}{2}}}$ である

ので,

$$\|\dot{U}_\tau\|_{L^\infty(-\tau,\infty)}\longrightarrow 0 \qquad (17)$$

となる。

3° $m \equiv \max_{0\leqq r\leqq 1} 2\lambda u(r) f(u(r)) e^{u^2(r)} r^2 \longrightarrow +\infty$ の場合は、$0<\lambda\ll 1$ において $K(\tau)=2$ なる $\tau\longrightarrow+\infty$ がとれる。(17) より (15) において、

$$\rho\longrightarrow 0,\quad \beta\longrightarrow 2 \quad : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \text{ 上広義一様} \tag{18}$$

β, ρ は $r=e^{\tau/2}$ の近くでは有界なので、(15) より $\{v\}$ の爆発点は $|x|\geqq 1$ には存在しないことがわかる。一方、評価 (16) と

$$\|\rho\|_{L^1(R_1<|x|<R_2)} \leqq 2\int_{R_1 e^{-\tau/2}<|x|<R_2 e^{-\tau/2}} |\nabla u|^2 dx \tag{19}$$

より、$\varepsilon>0$ に対し $\|\rho\|_{L^1(\varepsilon<|x|<1)}=O(1)$ であることがわかる。このことから非線形 Harnack 原理 [9] を用いると、$0<|x|\leqq 1$ においても $\{v\}$ の爆発点が存在しないことがわかる。最後に、$\{v\}$ の特異極限が $v_0(|x|)=2\log\frac{2}{1+|x|^2}$ であることは、

$$-\Delta v_0 = 2e^{v_0} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2\setminus\{0\}),\qquad v_0(|x|)\geqq 0 \quad (|x|\leqq 1) \tag{20}$$

を解いて決定される。

4° $m=O(1)$ の場合は、$0<\lambda\ll 1$ において

$$U^2(+\infty)=U^2(\tau)+2\log 2 \tag{21}$$

なる $\tau\longrightarrow+\infty$ をとる。$\|K\|_{L^\infty(-\tau,\infty)}=O(1)$ であり、部分列をとって

$$K(\tau)\longrightarrow \overset{\exists}{2\mu}\geqq 0 \tag{22}$$

とすると　$K(t) \longrightarrow 2\mu$ $(-\infty, \infty)$ 上広義一様　である。

(15) において $\|v\|_{L^\infty(|x|<e^{t/2})} = 2\log 2$ であるから、$\{v\}$ は $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 上広義一様収束し、極限関数 $v_0(|x|)$ は

$$-\Delta v_0 = 2\mu e^{v_0} \ \text{in}\ \mathbb{R}^2,\ \|v_0\|_{L^\infty} = v_0(0) \leqq 2\log 2,\ v_0 = 0\ (|x|=1) \qquad (23)$$

であることがわかる。

$v_0(0) = 2\log 2$ が示されれば、$v_0(|x|) = 2\log\frac{2}{1+|x|^2}$ となることがわかる。これは、(14) において左辺 $\geqq 0$、$V(+\infty) = 2\log 2$ であるので、Lebesgue の収束定理によって極限移行することによって示される。

定理17の証明：

1°. 定理2の証明で導入した関数 $k(|x|)$ は、

$$\|k\|_{L^p(|x|<1)} = O(1) \quad (1<p<\infty) \qquad (24)$$

となる。

∵) $m = O(1)$ のときは $\|k\|_{L^\infty} = O(1)$ であるので、$m \to +\infty$ の場合について示せば良い。このときは

$$K(t) = \frac{U_\tau(t) f(U_\tau(t))}{U(\tau) f(U(\tau))} \approx \left\{\frac{U_\tau(t)}{U(\tau)}\right\}^{m+1}$$

であり、

$$\frac{U_\tau(t)}{U(\tau)} = 1 + \frac{1}{U(\tau)}\int_0^t \dot{U}_\tau(s)\,ds$$

と書けば、

$$|U_\tau(t)/U(\tau)| \leqq C(1+t) \quad (t \geqq 0)$$

である。$r=e^{-t/2}$ にとれば (24) が得られる。

2° $$\int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} |\nabla u|^2 dx \geqq 4\pi + o(1) \qquad (\forall R>0) \tag{25}$$

∵) 定理2によって $U(t)=u(r)$, $U_\tau(t)=U(t+\tau)$, $V(t)=U_\tau^2(t)-U^2(\tau)$ に対し,

$$V(t) \longrightarrow V_0(t) = 2\log\frac{2}{1+e^{-t}}, \quad (-\infty,\infty) \text{ 上広義一様}$$

である。(15)において楕円型評価を用いると

$$\dot V(t) = 2U(t+\tau)\dot U(t+\tau) \longrightarrow \dot V_0(t) = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-t}} \quad (\forall t)$$

$R=e^{-t/2}$ と書けば,

$$-Re^{-\tau/2}u(Re^{-\tau/2})u_r(Re^{-\tau/2}) \longrightarrow \frac{2R^2}{1+R^2} \quad (\forall R>0)$$

ここで,

$$\int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} |\nabla u|^2 dx = -2\pi Re^{-\tau/2}u(Re^{-\tau/2})u_r(Re^{-\tau/2}) + \int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} \lambda u f(u) e^{u^2} dx$$

$$\frac{4\pi R^2}{1+R^2} + o(1) = \int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} \{|\nabla u|^2 - \lambda u f(u) e^{u^2}\} dx \leqq \int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} |\nabla u|^2 dx \quad (\forall R>0)$$

$R<R_1$ に対して,

$$\frac{4\pi R_1^2}{1+R_1^2} + o(1) \leqq \int_{R_1e^{-\tau/2}<|x|<1} |\nabla u|^2 dx \leqq \int_{Re^{-\tau/2}<|x|<1} |\nabla u|^2 dx$$

$R_1 \to +\infty$ とすればよい。

3° (25)より, $F_0<6\pi$ なら

$$\int_{|x|<Re^{-\tau/2}} |\nabla u|^2 dx < 2\pi + o(1) \qquad (\forall R>0)$$

定理2の証明で導入した関数 $\rho(t)=2u_t^2\big|_{r=e^{-\frac{t+c}{2}}}$ は

$$\|\rho\|_{L^1(|x|<1)} = 2\int_{|x|<e^{-c/2}} |\nabla u|^2\,dx < 4\pi + o(1) \tag{26}$$

をみたす。

$0<R<1$ を固定。

$$-\Delta h_1=0,\ -\Delta h_2=\rho \quad \text{in } |x|<R;\quad h_1=v,\ h_2=0 \quad \text{on } |x|=R \tag{27}$$

なる h_1, h_2 をとり、$h=h_1+h_2$ とおく。

$\|v\|_{L^\infty(|x|=R)}=O(1)$ より、$\|h_1\|_{L^\infty(|x|<R)}=O(1)$

(26) と Brezis-Merle 補題1 より、$\|e^{h_2}\|_{L^q(|x|<1)}=O(1)$ $(1<{}^\exists q<\infty)$

$$\|e^h\|_{L^q(|x|<R)}=O(1) \qquad (1<{}^\exists q<\infty) \tag{27}$$

$w=v-h$ は

$$-\Delta w = k e^h e^w \quad \text{in } |x|<R, \qquad w=0 \quad \text{on } |x|=R \tag{28}$$

を満たす。(24), (27) より

$$\|ke^h\|_{L^p(|x|<R)}=O(1) \qquad (1<{}^\forall p<\infty) \tag{29}$$

一方

$$\|ke^h e^w\|_{L^1(|x|<R)} = \|ke^v\|_{L^1(|x|<R)} = \|\rho\|_{L^1(|x|<R)} + \int_{|x|<R}(-\Delta v)\,dx$$

$$= \|\rho\|_{L^1(|x|<R)} + 2\pi(-v_r(R)) \le \|\rho\|_{L^1(|x|<1)} + 2\pi(-v_{0r}(R))+o(1)$$

$$= \|\rho\|_{L^1(|x|<1)} + \int_{|x|<R}(-\Delta v_0)\,dx + o(1) \tag{30}$$

(26) より、$0<R<<1$ とすれば (右辺) $< 4\pi + o(1)$ となる。

よって Brezis–Merle の Cor.3.（本稿 定理8）によって $\|v\|_{L^\infty(|x|<R)} = O(1)$ となる。

4° $v \to v_0$: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上広義一様であるから

$$V_0(+\infty) = 2\log 2 \leqq \underline{\lim}\, V(+\infty).$$

一方、$V(t) \longrightarrow V_0(t)$, $K(t) \longrightarrow 2$ は $(-\infty, \infty)$ 上広義一様で成立。

3° より、$\|V\|_{L^\infty_{loc}(-\infty,+\infty)} = O(1)$, 1° より $|K(t)| \lesssim 1+|t|^{m+1}$

従がって (14) において Lebesgue の収束定理によって極限移行すると、

$$0 \leqq \underline{\lim} \int_t^\infty (s-t)\, 2\dot{U}_\tau^2(s)\,ds \leqq V_0(t) + \int_t^\infty (s-t)\frac{1}{2} e^{V_0(s)-s}\,ds - \overline{\lim}\, V(+\infty)$$

$$= V_0(+\infty) - \overline{\lim}\, V(+\infty) \leqq 0$$

$$V(+\infty) \longrightarrow V_0(+\infty), \quad \int_t^\infty (s-t)\,\dot{U}_\tau^2(s)\,ds \longrightarrow 0 \quad (\forall t) \qquad (31)$$

再び (14) にもどって

$$|V(t) - V_0(t)| \leqq \int_t^\infty (s-t)\, 2\dot{U}_\tau^2(s)\,ds + |V(+\infty) - V_0(+\infty)|$$

$$+ \int_t^\infty (s-t) \left| \frac{K(s)}{4} e^{V(s)} - \frac{1}{2} e^{V_0(s)} \right| e^{-s}\,ds$$

$$\sup_{t \geqq t_1} |V(t) - V_0(t)| \leqq \int_{t_1}^\infty (s-t_1)\, 2\dot{U}_\tau^2(s)\,ds + |V(+\infty) - V_0(+\infty)|$$

$$+ \int_{t_1}^\infty (s-t_1) \left| \frac{K(s)}{4} e^{V(s)} - \frac{1}{2} e^{V_0(s)} \right| e^{-s}\,ds \longrightarrow 0 \quad (\forall t_1) \qquad (32)$$

これは $v \to v_0$, $\mathbb{R}^2$ 上広義一様 を意味する。//

注 (1)において (2)や(5)のような適当な仮定をおけば, (3)なる解の族 $\{(\lambda, u)\}$ は全て定理6の結論, 即ち

$$E=\int_B |\nabla u|^2 dx \longrightarrow 4\pi$$

を満たすのではないかと思われる。ここでは McLeod-Peletier [4] の Ode approach に基づく評価を用いて $f(u)=u$ に対してはこのことが正しいことを示す。

定理9 固有値問題

$$-\Delta u=\lambda u e^{u^2} \quad \text{in } B=\{|x|<1\}\subset\mathbb{R}^2, \qquad u=0 \quad \text{on } \partial B \tag{33}$$

において (2)が成立つとすれば, (7)が成立する。

(33)において(2)なる解の族が存在することも [4] によりわかる。実際, $r=e^{-t/2}$, $U(t)=u(r)$ とおくと

$$\ddot U+\frac{\lambda}{4}Ue^{U^2-t}=0,\quad \dot U>0\ (t>0),\quad U(0)=0,\quad U(+\infty)=\gamma$$

であり, $y(\tau)=U(t)$, $t=\tau+\log\frac{\lambda}{4}$ と変換すれば, $\tau_0=-\log\frac{\lambda}{4}$ に対し

$$\left.\begin{aligned}&\ddot y+ye^{y^2-\tau}=0,\quad \dot y>0 \quad \text{in } (\tau_0,+\infty)\\ &y(\tau_0)=0,\quad y(+\infty)=\gamma<+\infty\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

となる。(34)の解の定量的性質は [4] で詳しく解析されている。以下 $\gamma\to+\infty$ での挙動を記す:

1° $\tau_0 = 2\log\gamma + 1 + o(1)$ (ℒa4), $\int_0^\infty e^{U^2-t}\,dt = 1+e+o(1)$ ((3.4)) (a)

2° $H(\tau) \overset{\text{def}}{=} y^2(\tau) + 2\log y(\tau) - \tau$, τ^* : the first zero of H' as $\tau \searrow$
とする.

$$y(\tau^*) = \gamma + O(\gamma^{-1}) \ \ (\text{p.273}\downarrow 2), \quad e^{H(\tau^*)} = \frac{1}{4} + o(1) \ \ (\text{p.273}, \downarrow 15) \qquad \text{(b)}$$

∴ $$y'(\tau^*) = \frac{1}{2}\,\frac{y(\tau^*)}{y^2(\tau^*)+1} = \frac{1}{2}\gamma^{-1}\{1+o(1)\} \ \ (= \dot U(t^*))$$

3° $$\tau^* = \gamma^2 + 2\log\gamma + O(1) \ \ (\text{(6.2) より正確に計算}) \qquad \text{(c)}$$

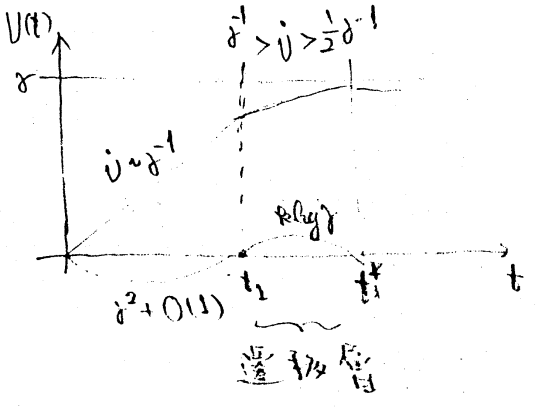
∴ $t^* = \tau^* - \tau_0 = \gamma^2 + O(1)$

4° $\tau_1 = \tau^* - k\log\gamma$ $(k>2)$, $t_1 \equiv \tau_1 - \tau_0 = \gamma^2\{1+o(1)\}$ ((6.2), (6.4), (a))

⇒ $$\dot U(t) = \gamma^{-1}\{1+o(1)\} \ \text{ on } [0, t_1] \ \ (\text{p.278}\downarrow 2 \oplus (6.13)) \qquad \text{(d)}$$

5° $$H'+1 = 2U^{-1}\dot U(U^2+1) \approx e^H = U^2 e^{U^2-\tau} \ \ (t \geq t^*) \ \ (\text{p.273}\downarrow 5) \qquad \text{(e)}$$

$$\dot U \approx U e^{U^2-\tau} = e^{-\tau_0} U e^{U^2-t} \approx \gamma^{-2} U e^{U^2-t} \ \ (t \geq t_*)$$



$U>0,\ \dot U>0,\ \ddot U<0$

以上より．

$$\int_0^{t_1} \dot{v}^2(t)\,dt = \gamma^2 \{1+o(1)\} \cdot \gamma^{-2} \{1+o(1)\} = 1+o(1)$$

$$\int_{t_1}^{t^*} \dot{v}^2(t)\,dt \underset{(\ddot{v}<0)}{\leq} (t^*-t_1)\frac{1}{4}\gamma^{-2}\{1+o(1)\} = \frac{k}{4}\gamma^{-2}\log\gamma\,\{1+o(1)\} = o(1)$$

$$\int_{t^*}^{\infty} \dot{v}^2(t)\,dt \approx \gamma^{-4}\int_{\gamma^2+k\log\gamma+O(1)}^{\infty} v^2 e^{2(v^2-t)}\,dt \leq \underbrace{\gamma^{-4}\gamma^2 \cdot e^{2\gamma^2}\int_{\gamma^2+O(1)}^{\infty} e^{-2t}\,dt}_{=o(1)}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \dot{v}^2(t)\,dt \longrightarrow 1, \quad \int_B |\nabla u|^2\,dx \longrightarrow 4\pi$$ となる。//

[1] Atkinson, F.V., Peletier, L.A., Ground states of $-\Delta u = f(u)$ and the Emden–Fowler equation, ARMA 93 (1986) 103–127

[2] Brezis, H., Merle, F., Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions, Comm. PDE 16 (1991) 1223–1253

[3] Gidas, B., Ni, W.M., Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximum principle, CMP 68 (1979) 209–243

[4] McLeod, J.B., Peletier, L.A., Observation on Moser's inequality, ARMA (1989) 261–285

[5] Moser, J., A sharp form of an inequality by N. Trudinger, Indiana 20 (1971) 1077–1092

[6] Nagasaki, K., Suzuki, T., Asymptotic analysis for two dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities,

Asymptotic Analysis 3 (1990) 173-180
[7] Ogawa, T., Suzuki, T., Nonlinear elliptic equations with critical growth related to the Trudinger inequality, preprint 1992
[8] Shaw, H. C., Eigenfunctions of the nonlinear equation $\Delta u + \nu f(x,u) = 0$ in $\mathbb{R}^2$, Pacific J. Math. 127 (1987) 349-356
[9] Suzuki, T., Harnack principle for spherically subharmonic functions, preprint 1991
[10] Trudinger, N., On imbedding into Orlicz space and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-484