

# Distance Formulas of Asymptotic Toeplitz and Hankel Operators

北大 理 山田 雅博 (Masahiro Yamada)

§1. 序論  $\mathbb{T}$  を単位円周,  $1 \leq p \leq \infty$  に対して  $L^p = L^p(\mathbb{T})$  を  $\mathbb{T}$  上の Lebesgue 空間とする。さらに,  $H^p = H^p(\mathbb{T})$  を通常の Hardy 空間 (すなわち,  $L^p$ -関数の中で負のフーリエ係数が 0 となっている関数からなる  $L^p$  の閉部分空間。) とする。

$\varphi \in L^\infty$  に対して,  $M_\varphi f := \varphi f$  ( $f \in L^2$ ) とし,  $P$  を  $L^2$  から  $H^2$  への直交射影, さらに  $V$  を  $(Vf)(z) := f(\bar{z})$  ( $f \in L^2$ ) で定義する。特に  $\pi$  と  $V$  は  $L^2$  上のユニタリ作用素であり,  $V: H^2 \leftrightarrow \overline{H^2}$  である。二つらを準備して, 以下で扱う 2 つの重要な作用素, Toeplitz 作用素と Hankel 作用素を定義する。上と同様に  $\varphi \in L^\infty$  とする。

$$T_\varphi f := P M_\varphi f \quad (f \in H^2)$$

$$H_\varphi f := P V M_\varphi f \quad (f \in H^2)$$

とし, 各々  $T_\varphi$  を Toeplitz 作用素,  $H_\varphi$  を Hankel 作用素と

呼ぶ。さらに、この  $\phi$  を二つの作用素のシンボルという。  
 また、 $H^2$  の正規直交基底  $\{z^i\}_{i \geq 0}$  に関する行列は各々、

$$T_\phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \cdots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \cdots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$H_\phi = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \cdots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \cdots \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる。ここで  $\hat{\phi}(i)$  は  $\{z^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  に関するフーリエ係数を表すものとする。また、二つの作用素を特徴付ける性質を挙げておく。 $S$  を  $S := T_{\mathbb{Z}}$ 、すなわち  $H^2$  上のシフト作用素とすると、 $T$  が Toeplitz 作用素であるための必要十分条件は、 $S^* T S = T$  となることであり、また  $H$  が Hankel 作用素であるための必要十分条件は  $S^* H = H S$  となることである。さらに各々のノルムについては Toeplitz 作用素が明らかに  $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$  となっているのに対し、Hankel 作用素においては  $\|H_\phi\| = \|\phi + z\phi^{\circ}\|$  となることが知られている[5]。

$T^+$  を Toeplitz 作用素全体から生成される Banach 環とし、

これを Toeplitz 環と呼ぶ。さらに  $[T_\phi, T_\psi] = T_\phi T_\psi - T_\psi T_\phi$  を  $T_\phi$  と  $T_\psi$  の交換子といい、これらの全体で生成される  $T^+$  の閉イデアルを  $T^+$  の交換子イデアルと呼ぶ。Douglas は商空間  $T^+/\mathcal{Q}$  と  $L^\infty$  との間に積、および adjoint を保存する等長な同型対応が存在することを示し (c.f. [3; p179]), さらに Böttcher と Halmos は  $T^+$  よりも広い Banach 環において上のような同型対応が存在するかどうかについて考察するため、asymptotic Toeplitz 作用素を定義した [1]。

§2. では Böttcher と Halmos の定義した概念を  $L^2$  上の作用素に拡張し、そこから得られる作用素の距離公式を提示する。

§3., §4. においては上の公式を用いて Douglas の示したような同型対応が、実際は Böttcher と Halmos の考察した Banach 環よりもさらに広いクラスで成立することを示す。また、この結果を Böttcher - Halmos の示した結果と比較させ、その違いについても述べる。さらに、Douglas の結果との関連についても考察し、前述の結果が Douglas の結果を含んでいることについて触れる。

§5. では §2. で提示した距離公式のもう一つの発展として、一般化した Toeplitz, および Hankel 作用素のノルムを与える公式を導く。これらの作用素は通常、 $\phi \in L^\infty$  というシンボルによって決定されるが、この  $\phi$  を  $L^2$  上の作用素  $M_\phi$

と同一視すると  $T\phi, H\phi$  は  $M\phi$  によって決定されると換言することができる。この考え方をさらに一般的にとらえ、 $L^2$  上の作用素  $A$  により決定される Toeplitz, Hankel 作用素,  $T_A, H_A$  を定義し、それらのノルムがどのように与えられるかを考察する。

§2.  $L^2$  上の作用素に対する distance formula  $\mathcal{U} = M_{\mathbb{Z}}$ ,  $P_m$  を  $L^2$  から  $\{z^i; |i| \leq m\}$  ( $m \geq 0$ ) への直交射影とする。また、以下  $B(L^2), B(H^2)$  を各々  $L^2, H^2$  上の有界線型作用素の全体,  $\|\cdot\|$  を  $L^2$  ノルムを表わすとする。さらに、

$$G_m(A) := P_m \mathcal{U}^m A \mathcal{U}^m \quad (A \in B(L^2), m \geq 0),$$

と定義し、 $G_m(A)$  が弱収束するときその極限を  $\sigma(A)$  と書くこととする。また、 $\{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$  を  $A$  の  $L^2$  上の正規直交基底  $\{z^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  に関する行列成分を表わすものとする。§1. において  $H\phi$  を Hankel 作用素と呼んだのに対して、 $\forall M\phi$  を特に " $L^2$  上の Hankel 作用素" と呼ぶことにする。

命題 2.1.  $A \in B(L^2)$  とする。 $\{G_m(A)\}$  が弱収束すること、 $\forall k \in \mathbb{Z}$  について  $\{a_{-l} l+k\}_{l=0}^{\infty}$  が収束することは同値であり、このとき  $\sigma(A)$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素となる。

(証明)  $\sigma(A)$  が存在すると仮定する。任意の  $j \in \mathbb{Z}$  を固定し、 $m_0$  を  $m_0 = |j|$  とすると、 $m \geq m_0$  なるすべての  $m$  に対

して,  $l = m - i$  とおくと  $l \geq 0$  であり,  $\{(\sigma_m(A)z^i, z^j) = a_{-l} a_{l+i+j}\}$  は  $(\sigma_m(A)z^i, z^j)$  に収束する。よって  $\sigma(A)$  の行列成分は  $i+j$  のみに依存するから,  $\sigma(A)$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素となることがわかる。

逆に, もし  $\{a_{-l} a_{l+i+j}\}_{l=0}^{\infty}$  が,  $\forall \epsilon > 0$  の  $k \in \mathbb{Z}$  について収束すると仮定すると, 上の計算から  $(\sigma(A)z^i, z^j) = \lim_l a_{-l} a_{l+i+j}$  と定義することにより,  $\sigma_m(A)$  は  $\sigma(A)$  に弱収束することがわかる。さらにこのとき,  $\|\sigma_m(A)\| \leq \|A\|$  ( $m \geq 0$ ) だから, 一様有界性の原理より  $\sigma(A)$  が有界な作用素となることも示される。

上の命題 2.1. の証明において主要な部分は Feintuch [4] にあるものである。また, 命題 2.1. で考えた  $\sigma(A)$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素となつたが,  $A$  自身が  $L^2$  上の Hankel 作用素のとき  $\sigma(A) = A$  であることがわかる。実際,  $A$  が  $L^2$  上の Hankel 作用素であれば  $AD = D^*A$  が成立し, このことから  $\sigma_m(A) = P_m D^m A D^m = P_m D^m D^{*m} A = P_m A$  となり,  $\sigma_m(A)$  は  $A$  に強収束することが示される。

$AH$  を  $AH = \{A \in B(L^2); \{\sigma_m(A)\} \text{ が強収束}\}$  とする。命題 2.1. は  $A \in AH$  が  $L^2$  上の Hankel 作用素でないときにも,  $\sigma_m(A)$  を考えることにより,  $L^2$  上の Hankel 作用素が定義できることを示している。また, 先のことから  $A$  が  $L^2$  上の Hankel 作用素で

あるときには,  $A$  から定義された  $\sigma(A)$  が  $A$  自身と一致し, 従って  $AH$  という作用素のクラスは  $L^2$  上の Hankel 作用素という概念をさらに拡張した作用素の集合であると捉えることができる。このような見方により,  $AH$  に属する作用素を  $L^2$  上の asymptotic Hankel 作用素と呼ぶことにする。また,  $AH$  に対し, その極限が零作用素となるクラスを  $\mathcal{A}$ , すなわち,  $\mathcal{A} = \{L \in AH : \sigma(L) = 0\}$  と書くことにする。

命題 2.2.  $AH$  と  $\mathcal{A}$  はともに  $B(L^2)$  の閉部分空間である。

(証明) 証明は Feintch [4] と同様であり,  $AH$  について示す。  $\mathcal{A}$  についても  $AH$  の場合と同様なので省略する。

$\{A_k\} \subset AH$ ,  $\|A_k - A\| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) とする。このとき, 任意の  $f \in L^2$  に対し,  $\{\sigma_m(A)f\}$  が収束することを示せばよいが, このためには  $\{\sigma_m(A)f\}$  が Cauchy 列となることをいえば十分である。なぜなら, 二項が示すように  $\sigma(A)f = \lim_m \sigma_m(A)f$  と  $\sigma(A)$  を定義したとき,  $\|\sigma_m(A)\| \leq \|A\|$  の関係より  $\sigma(A)$  が有界となるからである。  $f \in L^2$  を固定する。任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある  $k \geq 1$  が存在して  $\|A - A_k\| < \varepsilon/4 \cdot \|f\|$  である。このとき三角不等式より,

$$\|\sigma_m(A)f - \sigma_m(A)f\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \| \sigma_m(A - A_k) f \| + \| \{ \sigma_m(A_k) - \sigma_m(A_k) \} f \| \\
&\quad + \| \sigma_m(A_k - A) f \| \\
&\leq 2 \| A - A_k \| \cdot \| f \| + \| \{ \sigma_m(A_k) - \sigma_m(A_k) \} f \| \\
&< \varepsilon/2 + \| \{ \sigma_m(A_k) - \sigma_m(A_k) \} f \|
\end{aligned}$$

が成立する。さらに、 $A_k \in AH$  であることから、ある  $N \in \mathbb{N}$  があって、 $m, m' \geq N$  ならば

$$\| \sigma_m(A_k) f - \sigma_{m'}(A_k) f \| < \varepsilon/2$$

とできるから、 $\{ \sigma_m(A) f \}$  が Cauchy 列となることがわかる。

次に、 $AH$  と  $\mathcal{L}$  の構造と距離公式について述べる。

定理 2.3. 任意の  $A \in AH$  に対し、一意に  $L \in \mathcal{L}$  が存在して、 $A = \sigma(A) + L$  とかける。すなわち、 $AH$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素と  $\mathcal{L}$  との部分直和分解できる。さらに、このとき  $\| \sigma(A) \| = \| A + \mathcal{L} \|$  である。

(証明)  $A \in AH$  とする。このとき明らかに  $A - \sigma(A) \in \mathcal{L}$  である。よって、ある  $L \in \mathcal{L}$  が存在して  $A = \sigma(A) + L$  とかける。次に一意性について示す。もし、 $A = H + B$  とかけたとする。ここで  $H$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素、 $B$  は  $\mathcal{L}$  の元とする。このとき、 $\sigma(A) - H = B - L$  であり、 $\sigma$  による Hankel 作用素が不変なことから、

$$\sigma(A) - H = \sigma[\sigma(A) - H]$$

$$= \sigma(B-L)$$

$$= 0$$

である。よって  $\sigma(A)=H$ ,  $B=L$  がいえた。

最後に  $\|\sigma(A)\| = \|A+\mathcal{L}\|$  を示す。任意の  $L \in \mathcal{L}$  に対し、 $\sigma(L) = 0$  であることから、 $\|A+L\| \geq \|\sigma(A+L)\| = \|\sigma(A)\|$  が成立する。逆に上の議論から、 $\sigma(A) = A-L$  となる  $L \in \mathcal{L}$  が存在するから  $\|A+\mathcal{L}\| \leq \|A+L\| = \|\sigma(A)\|$  も得らる。

§3. distance formula の応用について  $\mathbb{R}_+$  を  $L^2$  から  $\Sigma H^2 \wedge$  の直交射影とする。  $AH_{\mathbb{R}} = \{A \in B(H); \forall AP \in AH\}$ ,  $\Sigma_{\mathbb{R}} = \{L \in B(H); \forall LP \in \Sigma\}$  とする。さらに、 $L^\infty$  から  $L^2$  上の Hankel 作用素全体への等長かつ同型な写像  $\Gamma$  を  $\Gamma(\phi) = \forall H\phi$  ( $\phi \in L^\infty$ ) によって定義する。このとき次が成立する。

定理 3.1. 商空間  $AH_{\mathbb{R}}/\Sigma_{\mathbb{R}}$  と  $L^\infty$  は次の等長な写像

$$A + \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow \sigma(\forall AP) \xrightarrow{\Gamma^{-1}} \phi$$

により同型である。

(証明)  $\pi$  を  $\pi(A + \Sigma_{\mathbb{R}}) := \sigma(\forall AP)$  ( $A \in AH_{\mathbb{R}}$ ) としたとき、 $\pi$  が  $AH_{\mathbb{R}}/\Sigma_{\mathbb{R}}$  から  $L^2$  上の Hankel 作用素全体への同型写像となっていることをいえば十分である。 $\Sigma_{\mathbb{R}}$  の性質から  $\pi$  の定義が整合的であり、線型となっていることは明らかである。まず、 $\pi$  が全射であることを示す。任意の  $L^2$  上の Hankel 作用素  $H$  に対し、 $\phi \in L^\infty$  が存在して  $H = \forall H\phi$  とかける。このとき、

$\phi$  により定義される Toeplitz 作用素  $T_\phi$  は  $T_\phi \in AH_r$  であり,  
 $\overline{\text{ran}}(T_\phi + \mathcal{L}_r) = \mathcal{V}H_\phi$  である。なぜなら, 任意に  $z \in \mathbb{C}$  を固  
 定したとき,  $M$  を  $n \geq 1$  なる  $n$  十分大とすると,  $\mathcal{V}U = U^*\mathcal{V}$   
 と  $\mathcal{V}P = (I - P_{+,0})\mathcal{V}$  から

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mathcal{V}T_\phi P)z^i &= P_m U^m \mathcal{V}P H_\phi U^m z^i \\ &= P_m U^m (I - P_{+,0}) U^{*m} (\mathcal{V}H_\phi z^i) \\ &= P_m (\mathcal{V}H_\phi z^i) \\ &\quad - P_m U^m P_{+,0} U^{*m} (\mathcal{V}H_\phi z^i) \\ &= P_m (\mathcal{V}H_\phi z^i) \end{aligned}$$

となる。よって  $\sigma_m(\mathcal{V}T_\phi P)z^i$  は  $\mathcal{V}H_\phi z^i$  に収束する。さら  
 に,  $\{\sigma_m(\mathcal{V}T_\phi P)\}$  は一様有界だから, ゆえに  $\mathcal{V}H_\phi$  に強収束し  
 $\sigma(\mathcal{V}T_\phi P) = \mathcal{V}H_\phi$ , またある  $\overline{\text{ran}}(T_\phi + \mathcal{L}_r) = \mathcal{V}H_\phi = H$  となる  
 ことがわかる。

最後に  $\sigma$  が等長であることを示す。  $A \in AH_r$  とすると, 定  
 理 2.3. から

$$\|\sigma(\mathcal{V}AP)\| = \|\mathcal{V}AP + \mathcal{L}\|$$

が成立する。さらに,  $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U} = \text{タリ}$  - であり,  $\mathcal{V}\mathcal{L}_r P \subset \mathcal{L}$  であることから,

$$\begin{aligned} \|\sigma(\mathcal{V}AP)\| &\leq \|\mathcal{V}AP + \mathcal{V}\mathcal{L}_r P\| \\ &\leq \|A + \mathcal{L}_r\| \end{aligned}$$

である。また,  $\sigma(\mathcal{V}AP)$  が  $L^2$  上の Hankel 作用素であるから,

ある  $\varphi \in L^\infty$  が存在して  $\sigma(\nabla A P) = \nabla H_\varphi$  となり, 上記の上のことから  $\sigma(\nabla T_\varphi P) = \nabla H_\varphi$  が成立している。よって,  $A + Z_r = T_\varphi + Z_r$  が得られ,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\infty &= \|\nabla H_\varphi\| = \|\sigma(\nabla A P)\| \\ &\leq \|A + Z_r\| \\ &= \|T_\varphi + Z_r\| \\ &\leq \|T_\varphi\| \\ &= \|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

となることがわかる。こゝに再び等号が成立していることから, 示す可い。

§1. において Douglas の結果を述べたが, こゝは  $T^+/\mathcal{Q}$  と  $L^\infty$  との間で積おみか adjoint を保存する等長な同型対応が存在するということがあった。Bartia と Halmos は Toeplitz 環  $T^+$  よりも広い Hankel 環  $H^+$  を定義した。こゝは  $H^2$  上の Toeplitz おみか Hankel 作用素の全体により生成される Banach 環であり, この  $H^+$  に対して Douglas の示したような対応が存在するかどうかについて考察した。その結果として, 積おみか adjoint を保存する  $H^+$  から  $L^\infty$  の上への縮小写像が存在することを Bartia と Halmos は得ている。しかし, Douglas の結果のような対応までは示すことができない。こゝらの考察をするため,

Barría と Halmos は  $H^2$  上の asymptotic Toeplitz 作用素を定義した。定理 3.1. では、この概念を  $L^2$  上の作用素に對して拡張し、そこから得られる事実を再び  $H^2$  上の作用素へ適用したとき  $AH_r/\mathcal{I}_r \cong L^\infty$  となることを示している。また、このときの  $AH_r$  は  $H^+$  を含むであり、 $H^+$  よりも更に広いクラスで Douglas の示したような事実が成立していることがわかる。しかし、Douglas および Barría-Halmos が扱っているのは Banach 環であるのに対して、ここで扱っている  $AH_r$  は Banach 空間でしかない。そのため、積が保存されるという条件が失われているのである。

Douglas の結果と関連した次の系が得られる。二つらの関連については次のセクションで述べる。

系 3.2. 任意の  $\varphi \in L^\infty$  について

$$\|T_\varphi\| = \|T_\varphi + \mathcal{I}_r\|$$

が成立する。

(証明) 定理 3.1. の証明の前半のことから、 $T_\varphi \in AH_r$  であり、 $P^{-1} \circ \pi(T_\varphi + \mathcal{I}_r) = \varphi$  である。さらに、 $P^{-1} \circ \pi$  は等長であるから  $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi + \mathcal{I}_r\|$  が得られる。

§4. Douglas の結果との関連について  $L^\infty$  から  $T/\mathcal{Q}$  への写像  $\xi_c$  を

$$\xi_c(\varphi) := T_\varphi + \mathcal{Q} \quad (\varphi \in L^\infty)$$

で定義する。Douglas はこの写像  $\xi_c$  が積および adjoint を保存する等長な同型写像であることを示したが、その本質的な部分は  $\|T_\varphi\| = \|T_\varphi + Q\|$  となること、すなわち  $\xi_c$  が等長となることである。定理 3.1. にあいて定義した写像  $T^{-1} \circ \xi$  には積と adjoint を保存するという性質はないが、その系として  $\|T_\varphi\| = \|T_\varphi + \mathcal{A}\|$  なる事実が得られた。ここでは、 $\mathcal{A}$  の空間としての広土を考察し、Douglas の示した本質的な結果が §3. の系から得られることを述べる。

補題 4.1.  $\alpha, \beta \in L^\infty$  とする。次の (1), (2) が成立する。

$$(1) \quad T_\alpha T_\beta = T_{\alpha\beta} - H_{\nabla\alpha} H_\beta$$

$$(2) \quad H_\alpha T_\beta = H_{\alpha\beta} - T_{\nabla\alpha} H_\beta$$

(証明) よく知られた事実である。

補題 4.2.  $H_r$  を  $H^2$  上の Hankel 作用素の全体からなる集合とすると、 $B(H^2) \times H_r \subset \mathcal{A}_r$  である。

(証明)  $H$  を Hankel 作用素とすると、 $HS = S^*H$  なる関係から  $\{HS^m\}$  は 0 に強収束する。  $\varepsilon < 0$  を任意に固定し、 $m \geq 1$  なる  $m$  を十分大とすると

$$HPD^m z_i = HPD^{m+i} \cdot 1 = HS^{m+i} \cdot 1$$

とかけるから、 $\{HPD^m z_i\}$  は 0 に収束する。よって  $\{HPD^m\}$

は  $L^2$  上の作用素であって、 $0$  に強収束することがわかる。ゆえに任意の  $C \in B(H^2)$  に対し  $\sigma_m$  の定義から  $\{\sigma_m[V(C)P]\}$  は  $0$  に強収束する。

これらの2つの補題を用いて次を示す。

命題 4.3.  $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{Q}$  を含む。

(証明) 最初に  $\mathcal{A}$  が  $B(H^2)$  の閉部分空間であることをいう。  $\{L_k\} \subset \mathcal{A}$  が  $L \in B(H^2)$  に一様収束していると仮定する。このとき、

$$\|VLP - VL_k P\| \leq \|V\| \cdot \|L - L_k\| \cdot \|P\|$$

よって  $\{VL_k P\}$  は  $VLP$  に収束する。 $\mathcal{A}$  の定義より  $VLP$  は  $\mathcal{A}$  の元だから命題 2.2 より  $VLP \in \mathcal{A}$  である。よって、 $L$  が  $\mathcal{A}$  の元であることがいえた。

$\alpha, \beta \in L^\infty$ ,  $D \in T^+$ , さらに  $T_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) を Toeplitz 作用素とする。 $L$  を

$$L := D(T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha)(\prod T_k)$$

とおく。 $\mathcal{A}$  が閉であることから、このような  $L$  が  $\mathcal{A}$  に属することを示せば証明は完了する。補題 4.1.(i) から、 $L$  の交換子の部分は

$$T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha = H_{\nabla\beta} H_\alpha - H_{\nabla\alpha} H_\beta$$

とかける。さらに、Bartia-Halmos [1] の手法を用いて、

$$L = D(B_1 H_1 + B_2 H_2 + \dots + B_n H_n)$$

とできる。ここで  $B_k$  は Toeplitz 作用素と Hankel 作用素との有限個の積,  $H_k$  は Hankel 作用素を表わす。簡単のため, Hankel 作用素を  $H$ , Toeplitz 作用素を  $T$  のようにそのニニホルを省略して書くことにすれば,  $L$  は

$$\begin{aligned} L &= D(HH - HH)(\prod T_k) \\ &= D(HHT_1 - HHT_1) \left( \prod_2 T_k \right) \end{aligned}$$

となっている。ここで補題 4.1. (2) を用いて  $L$  の  $HHT_1$  の部分を

$$HHT_1 = H(HT_1) = H(H - TH)$$

のように変換し, Hankel 作用素が一番右に来るように操作しよやる。これを他の項も含めて帰納的に繰り返せば,  $L$  は上のような形になることがわかる。よって  $L$  は  $B(H^2) \times H_n$  の有限個の 1 次結合でよらゆえよるから, 補題 4.2. より  $L \in \mathfrak{M}$  となることがわかる。

上の命題 4.3. と系 3.2. から Douglas の結果,  $\|T_\phi\| = \|T_\phi + Q\|$  が得らよることよわかる。また,  $\mathfrak{M}$  が  $H_n$  を含んよいるのよ対して,  $Q$  に含まよない Hankel 作用素が存在よることよ知らよてあり [1], 従って命題 4.3. の包含関係は真に成立してよいることがよわかる。

§ 5. 一般化された Toeplitz および Hankel 作用素      二

ここでは, Toeplitz および Hankel 作用素をより拡張した形でとらえ, そのらのノルムを与える公式を述べる.

$A \in AH$  に対し

$$T_A := P \nabla \sigma(A) | H^2$$

$$H_A := P \sigma(A) | H^2$$

と書くこととする。また,  $\mathcal{F} := \{F \in AH; P \sigma(F) | H^2 = 0\}$  とする。明らかに上で定義した  $T_A, H_A$  は各々  $H^2$  上の Toeplitz および Hankel 作用素となっている。なぜなら,  $A$  により定まる  $\sigma(A)$  は  $L^2$  上の Hankel 作用素だから, ある  $\phi \in L^\infty$  が存在して  $\sigma(A) = \nabla \perp \phi$  となっている。よって,  $T_A, H_A$  のシンボルはともに  $\phi$  であり, 二つらは  $A$  によって定義される  $H^2$  上の作用素であると考えることが出来る。通常の Toeplitz および Hankel 作用素は  $L^\infty$ -関数によって定義されるが  $L^\infty$  と  $L^2$  上の Hankel 作用素全体とを写像  $\Gamma$  によって同一視すれば, 二つらは  $L^2$  上の Hankel 作用素によって定義されると見る事が出来る。ここでは, その定義を拡張し,  $L^\infty$  よりもさらに広いクラス, すなわち  $AH$  により定まる Toeplitz および Hankel 作用素のノルムを考察する。

定理 5.1. 任意の  $A \in AH$  に対して次が成立する。

$$(1) \|T_A\| = \|A + \mathcal{A}\|$$

$$(2) \quad \|H_A\| = \|A + \mathcal{F}\|$$

さらに,  $\mathcal{F}$  は  $\mathcal{F} = \mathcal{V}(ZH^\infty) + \mathcal{L}$  である。

(証明) まず,  $\mathcal{F} = \mathcal{V}(ZH^\infty) + \mathcal{L}$  であることを示す。任意の  $F \in \mathcal{F}$  に対し,  $\mathcal{F}$  の定義と定理 2.3. から, ある  $\phi \in L^\infty$  と  $L \in \mathcal{L}$  が存在して,  $F = \mathcal{V}H_\phi + L$  とかける。さらに  $\mathcal{F}$  の定義より,

$$0 = \mathcal{P} \sigma(F) | H^2 = \mathcal{P} \mathcal{V}H_\phi | H^2 = H_\phi$$

だから,  $\phi \in ZH^\infty$  なることがわかる。よって,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}(ZH^\infty) + \mathcal{L}$  であることを示した。逆の包含関係については明らかである。また, (1) については定理 2.3. からただちに得られる。

(2) について示す。 $\mathcal{F}$  の定義より, 任意の  $F \in \mathcal{F}$  に対し,  $H_A = \mathcal{P} \sigma(A - F) | H^2$  であるから,  $\|H_A\| \leq \|A - F\|$  なる不等式は常に成立している。一方,  $H_A$  は Hankel 作用素だから, Nehari の定理により [5],  $\mathcal{P} \sigma(A - \mathcal{V}H_\phi) | H^2 = 0$  かつ  $\|H_A\| = \|\phi\|_\infty$  なる  $\phi \in L^\infty$  が存在する。従って,  $A - \mathcal{V}H_\phi \in \mathcal{F}$  より,

$$\begin{aligned} \|A - (A - \mathcal{V}H_\phi)\| &= \|\mathcal{V}H_\phi\| \\ &= \|\phi\|_\infty \\ &= \|H_A\| \end{aligned}$$

だから確かに  $\|H_A\| = \|A + \mathcal{F}\|$  が成立していることがわかる。

$T \in \mathcal{B}(H^2)$  とする。Feintuch [4] は  $T$  により作られる  $H^2$  上

の Hankel 作用素  $H_T$  のノルムが  $T$  と、ある  $B(H^2)$  の部分空間  $\mathcal{E}$  との距離と等しいことを示した。定理 5.1. (2) は  $H^2$  上の Hankel 作用素  $H_A$  のノルムが  $L^2$  上の作用素の差により表わさることを示しており、これは Feintuch の結果と比べて、本来の Nehari の定理により近い形の距離公式を与えている。

### 参 考 文 献

1. J. Barría and P. R. Halmos, Asymptotic Toeplitz Operators, Trans. Math. Soc. 273 (1982), 621-630.
2. A. Brown and P. R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math. 213 (1964), 89-102.
3. R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.
4. A. Feintuch, On Hankel operators associated with a class of non-Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 94 (1990), 1-13.
5. Z. Nehari, On bounded bilinear forms, Ann. Math. 65 (1957), 153-162.
6. J. R. Partington, An Introduction to Hankel Operators, Cambridge Univ. Press, 1988.