

Bergman 空間上の乗法作用素

大野 修一 (Shûichi Ohno)

1. 序論

D を単位開円板とし、 $dA(z)$ を D 上の正規化された Lebesgue 測度とする。 $0 < p < \infty$ に対して、 $L^p = L^p(D, dA)$ を Lebesgue 可測な関数 f で

$$\int_D |f(z)|^p dA(z)$$

が有限なもの集合とする。 $L^\infty = L^\infty(D)$ を D 上有界な関数全体とする。

$f \in L^p$ に対して、

$$\|f\|_p = \begin{cases} \int |f|^p dA & , 0 < p < 1 \\ \left(\int |f|^p dA \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \sup_{z \in D} |f(z)| & , p = \infty \end{cases}$$

とおくと、 L^p は $d(f, g) = \|f - g\|_p$ ($f, g \in L^p$) によって定義された距離により完備な距離空間となる。

$0 < p < \infty$ に対して、 L^p_a を L^p の関数で D 上解析的なものの

集合とする。 L_a^p は一般に Bergman 空間と言われる。 H^∞ を D 上の有界な解析関数の空間とする。

Bergman 空間上の Toeplitz, Hankel 作用素といった作用素の研究が最近活発に行なわれている。それらの特徴付けが Bloch 空間等の Besov 空間に関係しているという興味深い面を持っている。ここでは、乗法作用素についての有界性や compactness の特徴付けをまとめてみる。そのためには、次のような Bergman 位相の概念を道具として必要とする。

単位開円板 D の任意の入りに対して、 φ_λ を D 上の Möbius 変換 $\varphi_\lambda(z) = (\lambda - z)/(1 - \bar{\lambda}z)$ ($z \in D$) とする。 D 上の pseudo-hyperbolic distance ρ はこの変換を使って $\rho(z, w) = |\varphi_z(w)|$ ($z, w \in D$) と定義される。 D 上の関数空間の性質を考えると、一般にこの距離が使われている ([3:1章]) が、ここでは、次の Bergman 位相 $\beta(\cdot, \cdot)$ を使う：

$$\beta(z, w) = \frac{1}{2} \log(1 + \rho(z, w)) / (1 - \rho(z, w)) \quad , \quad z, w \in D .$$

このとき、Möbius 変換 φ に対して $\beta(\varphi(z), \varphi(w)) = \beta(z, w)$ である。

任意の $z \in D$ と $r > 0$ に対して

$$D(z, r) = \{w \in D : \beta(z, w) < r\}$$

を Bergman metric disk とする。 $D(z, r)$ は次の中心 C と半径 R を持つユークリッドの意味での円とみなせる：

$$C = (1-s)z / (1-|z|^2 s^2), \quad R = (1-|z|^2)S / (1-|z|^2 s^2)$$

ただし、 $s = (e^r - e^{-r}) / (e^r + e^{-r}) \in (0, 1)$ 。

集合 E に対して、 $|E|$ を $(E \text{ の面積}) / \pi$ とする

2. 補題

この節では、後で使われる補題をまとめておく ([2] 参照)。

[補題 2.1] (1) 任意の $z \in D$, $r > 0$ に対して、

$$|D(z, r)| = (1-|z|^2)^2 S^2 / (1-|z|^2 s^2)^2$$

(2) 任意の $R > 0$ に対して、次の条件を満たす定数 $C > 0$ が存在する: $\beta(z, w) \leq R$, $r \leq R$ に対して、

$$C^{-1} \leq |D(z, r)| / |D(w, r)| \leq C.$$

[補題 2.2] 次の条件を満たす自然数 N が存在する: 任意の $r \leq 1$ に対して、次のような点列 $\{\lambda_n\} \subset D$ が存在する。

$$(1) D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\lambda_n, r)$$

$$(2) D(\lambda_n, r/4) \cap D(\lambda_m, r/4) = \emptyset \quad (n \neq m)$$

(3) D の任意の点は高々 N 個の $D(\lambda_n, 2r)$ に含まれる。

$z, w \in D$ に対して Bergman 核 $k_z(w) = K(w, z) = (1 - \bar{z}w)^{-2}$ は、 $f \in L^1_a$ に関して再生核の性質

$$f(z) = \int_D f(w) \overline{K_z(w)} dA(w)$$

を持つ。 $k_z(w) = (1-|z|^2)K_z(w)$ とおくと $\|k_z\|_2 = 1$ となる
 より、 k_z は正規化された Bergman 核といわれる。この
 k_z と Bergman disk について、次の関係式が有効な働きをする。

[補題 2.3] $r > 0, z \in D$ に対して $D(z, r)$ を Bergman
 metric disk とする。

$$(1) \inf \{ |k_z(w)|^2 : w \in D(z, r) \} = (1 - s|z|)^4 / (1 - |z|^2)^2$$

$$(2) \sup \{ |k_z(w)|^2 : w \in D(z, r) \} = (1 + s|z|)^4 / (1 - |z|^2)^2.$$

[補題 2.4] 次の条件を満たす $C > 0$ が存在する: D 上解
 析的な f に対して

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |f(w)|^p dA(w).$$

($z \in D, 0 < p < \infty, r \leq 1$).

[証明] $p > 0$ に対して $|f|^p$ は劣調和だから

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{|D(0, r)|} \int_{D(0, r)} |f(w)|^p dA(w).$$

f を $f \circ \varphi_z$ ($z \in D$) とし、変数変換をすると、

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{s^2} \int_{D(z, r)} |f(w)|^p \cdot |k_z(w)|^2 dA(w).$$

[補題 2.3] より、

$$\leq \frac{(1 + s|z|)^4}{(1 - |z|^2)^2 s^2} \int_{D(z, r)} |f(w)|^p dA(w).$$

ここで、[補題 2.1] より、 $s_0 = \tanh 1$ に対して、

$$|D(z,r)|^{-1} \geq \frac{(1-s_0^2)^2}{2^4} \frac{(1+s|z|)^4}{(1-|z|^2)^2 s^2}$$

よって、

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w)$$

u を D 上の実数値調和関数とすると、 u の共役な調和関数 v が存在して、 $u+iv$ は D 上解析的と出来る。Hardy空間論において、 $u \in L^1(2D)$ に関して、必ずしも $v \in L^1(2D)$ とはなっていないが、Bergman空間論においては、 L^1 から L^1_a へ有界な射影がつくれることより、 $p=1$ についても成り立つ。

$\alpha > -1$ に対して、

$$P_\alpha f(z) = (\alpha+1) \int_D f(w) \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} dA(w)$$

とおくと $1 \leq p < \infty$, $p(\alpha+1) > 1$ において、 P_α は L^p から L^p_a への有界な射影となる。

[補題2.5] $1 \leq p < \infty$ のとき、 u を D 上の実数値調和関数、 v をその共役な調和関数とすると、次の不等式を満たす定数 C が存在する：

$$\|v\|_p \leq C \|u\|_p.$$

証明は上の P_α の有界性より示されるが、上の定理はさらに $0 < p < 1$ に対しても成り立つことが知られている。

3. L^p 上の乗法作用素

D 上の関数 f を一つ固定して、乗法作用素 M_f を次のように定義する: $M_f g = fg$, $g \in L^p$ $0 < p < \infty$.

この節では、任意の p, q ($0 < p, q \leq \infty$) に対して、作用素 $M_f: L^p \rightarrow L^q$ の特徴付けを考える。

[定理 3.1] ([2]) $0 < p < q \leq \infty$ とする。このとき、 $M_f: L^p \rightarrow L^q$ が有界であるための必要十分条件は $f = 0$ である。

[証明] $f \neq 0$ と仮定すると、ある正定数 t に対して、

$$E_t = \{z \in D : |f(z)| > t\}$$

とおくと、 $|E_t| > 0$ 。このとき、任意の $g \in L^p$ に対して、

ある定数 C があって $\|M_f g\|_q \leq C \|g\|_p$ とすると、

$$\begin{aligned} C \|g\|_p^q &\geq \int |fg|^q dA \\ &\geq \int_{E_t} |fg|^q dA \\ &\geq t^q \int_{E_t} |g|^q dA. \end{aligned}$$

よって、 $L^p(E_t, dA) \subset L^q(E_t, dA)$ 。これは $p < q$ に矛盾。

この定理は、もっと一般的な状況についても成り立つ ([2])。

[定理 3.2] $0 < p = q \leq \infty$ とする。このとき、 $M_f: L^p \rightarrow L^q$ が有界であることと $f \in L^\infty$ は同値である。

[証明] M_f が有界ならば、任意の $g \in L^p$ に対して

$$\|fg\|_p \leq C \|g\|_p$$

なる定数 C がとれる。今 $g = 1$ とおくと $f \in L^p$, $\|f\|_p \leq C$.

$g = f^{n-1}$ とおくと $\|f^n\|_p \leq C^n$. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|_p^{1/n} \leq C$.
ゆえに $f \in L^\infty$ ■

$1 \leq p < \infty$ に対して、 $(L^p)^* = L^s$ ($p^{-1} + s^{-1} = 1$) であるから、次のことは明らか。

[補題 3.3] $1 \leq p < \infty$ のとき、次のことは同値:

- (1) $M_f: L^p \rightarrow L^q$ は有界
- (2) $f \in L^s$, $p^{-1} + s^{-1} = 1$

[定理 3.4] $1 \leq q < p < \infty$ とすると、次のことは同値:

- (1) $M_f: L^p \rightarrow L^q$ は有界.
- (2) $f \in L^r$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$

[証明] (1) \Rightarrow (2) を示せばよい。 s を $q^{-1} + s^{-1} = 1$ とすると
 $fL^pL^s \subset L^qL^s \subset L^1$.

一方、 t を $p^{-1} + s^{-1} = t^{-1}$ とおく。このとき、任意の $g \in L^t$ に

対して $g = g^{t/s} \cdot g^{t/p}$ とする $g^{t/s} \in L^s, g^{t/p} \in L^p$ より $L^t \subset L^p L^s$ 。よって、

$$f L^t \subset f L^p L^s \subset L^1$$

[補題3.3] より $f \in L^r, r^{-1} + t^{-1} = 1$ 。このとき、 $r^{-1} = 1 - t^{-1} = q^{-1} - p^{-1}$ ■

4. 一般化された Carleson 測度

μ を D 上の有限な正測度とし、 $0 < p, q \leq \infty$ とする。 μ が (p, q) Carleson 測度であるとは

$$\int |f|^q d\mu \leq C \int |f|^p dA, \quad f \in L_a^p$$

を満たす有限な定数 $C > 0$ が存在するときを言う。明らかに μ が (p, q) Carleson 測度であることと $L_a^p \subset L^q(d\mu)$ でその inclusion map が有界であることと同値である。また $1 \leq p$ のとき、 μ が (p, q) Carleson 測度で、さらに上の inclusion map が compact である場合を (p, q) compact Carleson 測度と言う。即ち、 L_a^p の有界列 $\{f_n\}$ に対して、その部分列 $\{f_{n_k}\}$ で $L^q(d\mu)$ -収束するものが取れる場合である。

乗法作用素の有界性や compactness を特徴付ける為に (p, q) Carleson 測度, (p, q) compact Carleson 測度 を特徴付ける。このとき、 $p \leq q$ の場合と $q < p$ の場合に分けて考える。

Luecking [8] は次のように、言いかえられる。

[定理 4.1] $0 < p \leq q < \infty$, μ は D 上の有限な正測度とするとき、次のことは同値である:

(1) μ は (p, q) Carleson 測度である.

(2) $\sup \left\{ \int |R_\lambda|^{2q/p} d\mu : \lambda \in D \right\} < +\infty$

(3) $\sup \left\{ |D(\lambda, t)|^{-q/p} \mu(D(\lambda, t)) : \lambda \in D \right\} < +\infty$, $0 < t$.

[証明] (1) \Rightarrow (2) 明らか.

(2) \Rightarrow (3).

$$\begin{aligned} |D(\lambda, t)|^{-q/p} \mu(D(\lambda, t)) &\leq C \int_{D(\lambda, t)} |R_\lambda|^{2q/p} d\mu \\ &\leq C \int_D |R_\lambda|^{2q/p} d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (1). $f \in L^p_a$ κ に対して,

$$\begin{aligned} \int |f|^q d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(\lambda_n, t)} |f|^q d\mu \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in D(\lambda_n, t)} |f|^q \int_{D(\lambda_n, t)} d\mu \\ &\leq \sum \frac{C}{|D(\lambda_n, t)|^{q/p}} \left(\int_{D(\lambda_n, t)} |f|^p dA \right)^{q/p} \int_{D(\lambda_n, t)} d\mu \\ &\leq C \sup_{\lambda_n} \frac{\mu(D(\lambda_n, t))}{|D(\lambda_n, t)|^{q/p}} \cdot \sum \left(\int_{D(\lambda_n, t)} |f|^p dA \right)^{q/p} \\ &\stackrel{q/p \geq 1 \text{ より}}{\leq} C \left(\sum \int_{D(\lambda_n, t)} |f|^p dA \right)^{p/q} \\ &\leq C \|f\|_p^p \end{aligned}$$

よって、 μ は (p, q) Carleson 測度である。

証明中の定数 C は必ずしも同じものではない。

$0 < \varrho < p < \infty$ の場合. 完全な特徴付けは得られていない。
次に (p, ϱ) compact Carleson 測度の特徴付けを行う。

[定理 4.2] $1 < p \leq \varrho < \infty$, μ を D 上の有限な正測度とすると、次のことは同値である：

(1) μ は (p, ϱ) compact Carleson 測度である。

$$(2) \lim_{|\lambda| \rightarrow 1} \int |k_\lambda|^{2\varrho/p} d\mu = 0$$

$$(3) \lim_{|\lambda| \rightarrow 1} |D(\lambda, r)|^{-\varrho/p} \mu(D(\lambda, r)) = 0.$$

[証明] (1) \Rightarrow (2). $1 < p < \infty$ のとき, L^p_a は回帰的。

よって, (1) より $\{k_{\lambda_n}^{2\varrho/p}\}$ は $|\lambda_n| \rightarrow 1$ のとき L^p_a で弱位相で 0 へ収束するので, $\{k_{\lambda_n}^{2\varrho/p}\}$ は $L^{\varrho}(d\mu)$ で 0 へ収束する。即ち, $\lim_{|\lambda| \rightarrow 1} \int |k_{\lambda_n}|^{2\varrho/p} d\mu = 0$ 。

(2) \Rightarrow (3) [定理 4.1] (2) \Rightarrow (3) の証明中の不等式より明らか。

(3) \Rightarrow (1). (3) と [定理 4.1] より, μ は (p, ϱ) Carleson 測度である。 $\{f_n\} \subset L^p_a$ で $f_n \rightarrow 0$ (弱) と仮定すると, $\{f_n\}$ は一様有界で D の任意の compact 集合上一様に 0 へ収束する。今, $r > 0$, $\{\lambda_n\} \subset D$, $D = \cup D(\lambda_n, r)$ として固定する。(3) より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある N_0 が取れて

$$|D(\lambda_n, r)|^{-\varrho/p} \mu(D(\lambda_n, r)) < \varepsilon \quad n \geq N_0$$

とできる。

[定理 4.1] (3) \Rightarrow (1) の証明中より

$$\begin{aligned} \sum_{N_0}^{\infty} \int_{D(\lambda_n, t)} |f_m|^q d\mu &\leq C \sum_{N_0}^{\infty} \frac{\mu(D(\lambda_n, t))}{|D(\lambda_n, t)|^{q/p}} \left(\int_{D(\lambda_n, t)} |f_m|^p dA \right)^{q/p} \\ &\leq \varepsilon C \left(\int |f_m|^p dA \right)^{q/p} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int |f_m|^q d\mu &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{N_0-1} \int_{D(\lambda_n, t)} |f_m|^q d\mu + \varepsilon C \|f_m\|_p^q \right] \\ &\leq \varepsilon C \end{aligned}$$

ε は任意より $\lim_{m \rightarrow \infty} \int |f_m|^q d\mu = 0$ ■

$1 < q < p < \infty$ の場合、 (p, q) compact Carleson 測度の完全な特徴付けも得られていない。

5 乗法作用素

D 上の関数 f を 1 つ固定する。 f が L_a^p から L^q への multiplier であるとは、 $fL_a^p \subset L^q$ のときをいう。 任意の $g \in L_a^p$ に対して、 M_f を $M_f g = fg$ と定義するとき、 M_f を L_a^p から L^q への乗法作用素という。 閉グラフ定理より、 f が multiplier であることと M_f が有界であることは同値である。 また M_f が有界であることと $M_{|f|}$ が有界であることも同値である。

前節において、 $d\mu(z) = |f(z)|^q dA(z)$ とおくことにより、

乗法作用素 M_f の有界性、compactness が特徴付けられる。

[定理 5.1] $0 < p \leq q < \infty$ とするとき、次のことは同値:

(1) $M_f: L^p_a \rightarrow L^q$ は有界である

(2) $\sup \{ \|f R_\lambda^{2/p}\|_q : \lambda \in D \} < +\infty$

(3) $\sup \{ |D(z, r)|^{-2/p} \int_{D(z, r)} |f|^q dA : \lambda \in D \} < +\infty$

[定理 5.2] $0 < p < q = \infty$ の場合、次のことは同値:

(1) $M_f: L^p_a \rightarrow L^\infty$ は有界である

(2) $\sup \{ |D(z, r)|^{-1/p} |f(z)| : z \in D \} < +\infty$

[証明] (1) \Rightarrow (2).

$$\begin{aligned} |f(z)(1-|z|^2)^{2/p}| &= |f(z)k_z(z)^{2/p}| \\ &\leq C \|R_z^{2/p}\|_p = C. \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (1). $p > 0$ に対して、任意の $g \in L^p_a$ に関して $|g|^p$ は劣調和。よって

$$|g(z)|^p \leq C_r |D(z, r)|^{-1} \int_{D(z, r)} |g(w)|^p dA(w), \quad r > 0.$$

ゆえに、

$$|f(z)g(z)| \leq C_r |f(z)| \cdot |D(z, r)|^{-1/p} \left(\int_D |g|^p dA \right)^{1/p}.$$

即ち、 $\sup_z |f(z)g(z)| \leq C \|g\|_p$ ($0 < p < 1$ のときは右辺 $= C \|g\|_p^p$)

これらの定理は、 \mathbb{C}^n の有界対称領域、及び \mathbb{C} のなめらかな

境界を持つ有界な領域についても成り立つ ([11])。

次に、 ψ の具体的な例として、負でない有調和関数を取ってみる。

[系 1] $0 < p < q \leq \infty$, $1 \leq \rho \leq \infty$, v を D 上負でない有調和関数と仮定する。このとき、次のことは同値:

(1) $M_\psi: L^p_a \rightarrow L^q$ は有界である。

(2) $v \equiv 0$ 。

[証明] (1) \Rightarrow (2) の場合を示せばよい。 $q < \infty$ のとき、

$$\begin{aligned} 0 \leq v(z) &\leq \frac{C_r}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} v dA. \quad (r > 0) \\ &\leq \frac{C_r}{|D(z, r)|^{1/q}} \left(\int_{D(z, r)} v^q dA \right)^{1/q} \\ &\leq C_r |D(z, r)|^{-1/q} \times M |D(z, r)|^{1/p} \quad ([\text{定理 5.1}]) \\ &= C_r |D(z, r)|^{1/p - 1/q} \\ &\leq C_r (1 - |z|^2)^{(q-p)/p} \end{aligned}$$

$|z| \rightarrow 1$ とすると、 $q-p > 0$ より $v(z) \rightarrow 0$ 。よって最大値原理より $v \equiv 0$ 。 $q = \infty$ の場合は明らか。

仮定において、さらに $\log v$ も有調和である場合は $0 < p < q \leq \infty$ で成り立つ。

[系2] $1 \leq p = q \leq \infty$ とする。 ψ を D 上負でない q 調和

と仮定すると、次のことは同値:

(1) $M_\psi: L^p_a \rightarrow L^p$ は有界である。

(2) $\psi \in L^\infty$

証明は [系1] と同様に出来る。

ψ が解析的な場合と調和の場合は [1][2][6] を参照。
上の2つの系は、領域が \mathbb{C}^n の単位球の場合でも成り立つ。

$0 < q < p < \infty$ の場合については、前節同様完全な特徴付けは得られていないが、一般化された Hölder の不等式をヒントにして $\psi L^p_a \subset L^q$ ならば $\psi \in L^r$ ($q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$) となるかと予想される。しかし、 ψ が一般の場合には必ずしも成立しない。例えば、 $\psi(z)$ として $z \neq 0$ 上 $|z|^{-1}$, $z=0$ で 0 とすると、明らかに $\psi \in L^1 \setminus L^2$ だが $\psi L^2_a \subset L^1$ である。よって、 ψ として具体的な関数を取って考える。

[補題5.3] $1 \leq p \leq \infty$ とし、 u を D 上(複素数値)調和関数と仮定する。このとき、次のことは同値:

(1) $M_u: L^p_a \rightarrow L^1$ は有界である。

(2) $u \in L^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$

[証明] $p = 1, \infty$ の場合は明らか。 $1 < p < \infty$ のとき、
 (1) \Rightarrow (2) を示す。任意の $f \in L^p_a$ に対して、

$$L(f) = \int f u dA$$

と定義すると、 $L \in (L^p_a)^* = L^q_a$ $p^{-1} + q^{-1} = 1$ 。よって

$$\int f u dA = \int f \bar{g} dA$$

なる $g \in L^q_a$ が存在する。

ここで、 $u \in L^1$ が調和であることと [補題 2.5] を使って、
 $u = h + \bar{k}$, $h, k \in L^1_a$ と書ける。よって、上の等式で $f(z)$
 $= (1 - \bar{\lambda}z)^{-2}$ ($\lambda \in D$) とおくと

$$\bar{h}(\lambda) + k(0) = \bar{g}(\lambda) \quad \lambda \in D$$

ゆえに $h = g - k(0) \in L^q_a$

同様に

$$L(f) = \int f \bar{u} dA \quad f \in L^p_a$$

とおけば、 $k \in L^q_a$ が示せる。よって、 $u \in L^q_a$ ■

[定理 5.4] $1 \leq p < \infty$ とし、 u を D 上 (複素数値) 調和とする。このとき、次のことは同値:

(1) $M_u: L^p_a \rightarrow L^q_a$ は有界である。

(2) $u \in L^r$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$

[証明] (1) \Rightarrow (2) を示す。 $q > 1$ とする。 S を $q^{-1} + S^{-1} = 1$ とすると

$$u L_a^p L_a^s \subset L^q L_a^s \subset L^1.$$

一方、 $p^{-1} + s^{-1} = t^{-1}$ に対して $L_a^t = L_a^p L_a^s$ となる ([5]) に
より

$$u L_a^t \subset L^1.$$

[補題 5.3] より、 $u \in L^r$, $r^{-1} + t^{-1} = 1$. このとき $r^{-1} = q^{-1} - p^{-1}$. 即ち $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$. ■

Attele [1] は、実数値調和関数について、上の結果を得て
いる。負でない滑らか関数に対して、上の定理が成り立つか
どうかは知られていない。

次に、乗法作用素の compactness についてみる。 $p \leq q$ の場
合は、次の結果を得る。

[定理 5.5] $1 \leq p \leq q < \infty$, f を D 上の関数とすると、次
のことは同値:

(1) $M_f: L_a^p \rightarrow L^q$ は compact

(2) $\lim_{|\lambda| \rightarrow 1} \|f R_{\lambda}^{2/p}\|_q = 0$.

(3) $\lim_{|\lambda| \rightarrow 1} |\mathcal{D}(\lambda, r)|^{-q/p} \int_{\mathcal{D}(\lambda, r)} |f|^p dA = 0 \quad r > 0$

[証明] (1) \Rightarrow (2). $1 \leq p < \infty$ において、仮定から $\{R_{\lambda_n}^{2/p}\} \subset L_a^p$ は有界列より部分列 $\{R_{\lambda_n}^{2/p}\}$ が取れて、 $\{f R_{\lambda_n}^{2/p}\}$ は

L^q である関数 g へ収束していることが出来る。よって $\{f_{\lambda_n}^{2/p}\}$ の部分列 (再び同じ記号で書く) で、 $f_{\lambda_n}^{2/p} \rightarrow g$ a.e. となるものがある。一方 $\lim_{|\lambda_n| \rightarrow 1} \int_{\lambda_n} f_{\lambda_n}^{2/p}(z) dz = 0$ であるから、 $g = 0$ a.e. 即ち、 $\lim_{|\lambda_n| \rightarrow 1} \|f_{\lambda_n}^{2/p}\|_q = 0$

(2) \Rightarrow (3) 明らか。

(3) \Rightarrow (1). $\mu = |f|^\beta dA$ として [定理 4.2] の証明 (3) \Rightarrow (1) と同様に示せる。

[系] $1 \leq p = q < \infty$, ν を D 上負でない測度とする。このとき、 $M_\nu: L^p_a \rightarrow L^p$ が compact であるための必要十分条件は $\nu = 0$ である。

$q < p$ の場合は、Hölder の不等式を使って、次の十分条件が得られる。

[定理 5.6] $0 < q < p \leq \infty$, $0 < t < \infty$, $p^{-1} + t^{-1} = q^{-1}$ とする。このとき $f \in L^q$, $f L^p_a \subset L^q$ で次の条件を満たすと仮定する: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_{D \setminus K} |f|^t dA < \varepsilon$$

を満たす compact 集合 $K \subset D$ がとれる。

このとき、 $M_f: L^p_a \rightarrow L^q$ は compact。

この定理によると、 $fL_a^p \subset L^q$ のとき、 $f \in L^t$, $p^{-1} + t^{-1} = q^{-1}$ ならば、 M_f は compact になる。

6. 例

前節により、 $M_f: L_a^p \rightarrow L^q$ の有界性と compactness の評価は各 p, q に依存していた。 $f \in L^\infty$ のとき、これらの評価は同値となるが、最後に $p = q$ の場合で各 p 間の差異を示す例を挙げておく。

[例 6.1] D 内の集合 S を

$$S = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq r < 1, |\theta| < (1-r)^2\}$$

とおく。

$$f(z) = \begin{cases} (1-|z|)^{-1} & z \in S \\ 0 & z \notin S \end{cases}$$

とすると、 $f \in L^2$ 。この f について、 $M_f: L_a^1 \rightarrow L^1$ は有界となるが、 $M_f: L_a^2 \rightarrow L^2$ は有界とはならない。

[例 6.2] D 内の集合 S を上のようにとる。

$$f(z) = \begin{cases} (1-|z|)^{-1/2}, & z \in S \\ 0, & z \notin S \end{cases}$$

とする。 $f \in L^2$.

明らか $M_f: L^1_a \rightarrow L^1$, $M_f: L^2_a \rightarrow L^2$ は有界であるが、
 $M_f: L^1_a \rightarrow L^1$ は compact であるが、 $M_f: L^2_a \rightarrow L^2$ は compact
 にはならない。

参 考 文 献

1. K.R.M. Attele, Analytic multipliers of Bergman spaces, Michigan Math. J. 31(1984), 307-319.
2. S. Axler, Zero multipliers of Bergman spaces, Can. Math. Bull. 28(1985), 237-242.
3. J.B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.
4. W.W. Hastings, A Carlrson measure theorem for Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 237-241.
5. C. Horowitz, Factirization theorems in the Bergman spaces, Duke Math. J. 44(1977), 201-213.
6. K. Izuchi, A function theoretic proof of Axler's zero multiplier theorem, Canad. Math. Bull. 31(1988), 111-114.
7. D.C. Luecking, A technique for characterizing Carleson

measures on Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 87(1983), 656-660.

8. D.H. Luecking, Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives, Amer. J. Math. 107(1985), 85-111.

9. S. Ohno, Multiplication operators on the Bergman spaces $L_a^p(\Omega)$, Proceedings of the International Symposium on Functional Analysis and Related Topics, World, 1991, 234-237.

10. V.L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math. 9(1978), 228-243.

11. V.L. Oleinik and B.S. Pavlov, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math. 2(1974), 135-142.

12. K.H. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Pure and applied Math. vol.139, Marcel Dekker, New York, 1990.