数理解析研究所講究録
第825巻1993年82-88

z と f(z) によって生成される関数環

大阪府立大学工学部
阪井章
(Akira Sakai)

この話は、複素領域（または実領域）の上で関数 f が与えられているとき、連続関数を z と f(z)（または x と f(x)）の多項式によって近似する問題を通じて、近似問題における直交測度の方法を述べることが目的である。

この方法は関数解析的方法であるが、環の性質を使うわけではないので、この意味では、この話も関数環の話とはいいがたい。近似問題における関数環論固有の方法としては、例えば表現測度や Bishop の分解定理などがあるが、ここでは述べない。また、以下において直交測度の一般的なことと具体的な1つの問題の解について述べるが、この問題についてはつい最近に Gauthier-Frih[2] によって同じ結果が発表されたので、これは新しい結果ではなくなった。これらのことをはじめにお断わりしておく。

近似の問題を考えるときに、その近似の度合とか速さとかを問題にする場合と、近似の可能性を問題にする場合がある。ここで問題にするのは後者の場合で、集合 Sとその上のある関数族 Fを与えて、S 上の関数 f が S上で F の関数によって一様に近似されるための S, F, f の条件を考える。ここで考えるのは S が C^nのコンパクト部分集合のときで、この場合には、近似の可能性の問題は、集合の複素的構造の問題とある種の凸性の問題に関係する。このとき、近似する関数が fを用いて具体的な式によって表されるに越したことはない。しかし、特別な場合を除くと、それは容易なことではなく、一般にはなんらかの存在証明を行うのである。その1つが直交測度の方法である。たとえば、コンパクト集合 X上の連続関数全体を C(X) とするとき、閉部分空間 $A \subset B \subset C(X)$ について、A = Bを示すには A に直交する測度がB にも直交することを示すことになる. 近似を考えるとき、集合 S をなるべく一般のものにしようという願望がある。たとえば、S がある関数のグラフになっているとすれば、その関数の滑らかさの条件を弱いものにしようとする。それに直交測度の方法が有効である。

ここで扱う問題の1つは、Kと、K上のベクトル値関数 $f:K \to C^m$ が与えられたとき, z と $f(z)$によって生成される関数環 A_f が $C(X)$ と一致するかどうかの問題である。この場合、K上の fのグラフを Xとするとき、X上の多項式の一様極限の全体からなる関数環 $P(X)$ は Aと同型である。したがってこの問題は $P(X)=C(X)$ が成り立つための X の条件を求める問題となる。もう1つの問題は R_n のコンパクト集合K とK上の関数 $g:K \to R^n$ が与えれたとき、g のグラフを $X=\{x+ig(x)\in C^n : x\in K\}$と考え、$P(X)=C(X)$ の条件を考える問題である。いずれの場合も、$P(X)=C(X)$ 示すことが問題であって、$P(X)$に直交する測度が 0に等しいことを示すことになる。

第1の場合にこの方法の概略を述べてみよう。K は C^k のコンパクト集合で、A は K上の関数環とする。Gは K を含む開集合、U は Gの近傍とし、$U\times G$ で定義された積分核 $s(z,\zeta)$ は ζ について $(n,n-1)$形式で zについて関数であるとする。さらに、$s(z,\zeta)$は次の条件を満たすものとする。

(i) $s(z,\zeta)$ は z の関数として A に属する。

(ii) G内に台をもつ任意の C 関数 ϕ に対して

$$\phi(z)=\int \bar{\partial}\phi(\zeta)\wedge s(z,\zeta)$$

いまμは A に直行する測度とする。そのとき(ii)により

$$\int \phi(z)d\mu(z) = \int \left(\int \bar{\partial}\phi(\zeta) \wedge s(z,\zeta) \right) d\mu(z)$$

$$= \int \phi(\zeta) \wedge \left(\int s(z,\zeta) d\mu(z) \right)$$

(i) によって右辺は 0 であるから $\mu = 0$ が得られる。
証明の骨子はこのようなものであるが、実際には積分可能性などについての考察が必要である。

f(z) は K で定義された関数とし、A が z と f(z)で生成される関数環 A_f であるときには s(z, ζ) は f(z)を用いてつくられる。Wermer[6]は n = 1 の場合に、Lipschitz関数 R(z)によって定義される関数 $f(z) = \bar{z} + R(z)$に対して最初にこの方法を用いた。Weinstock[4]はこれを n > 1の場合に拡張して、次のHörmander-Wermer[3] の新しい証明を与えた。

定理HW　$R = (R_1, \ldots, R_n)$ は K の近傍からの C_1写像で

$$|R(z) - R(z')| \leq k|z - z'| \quad (k < 1)$$

を満たしているとき $f = \bar{z} + R(z)$ に対して $A_f = C(K)$

この場合に積分核はつぎように構成される。

$$H_j(z,w) = \bar{z}_j + R_j(z) - \bar{w}_j - R_j(w)$$

$$G(z,w) = \sum_j (z_j - w_j) H_j(z,w)$$

$$s_j(z,w) = G(z,w)^{-n} H_j(z,w)$$

$$\eta_j = \bigwedge_{j \neq k} \bar{\partial}_z H_k(z,w), \quad dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

$$s(z,w) = (n-1)!(2\pi i)^{-n} \bigwedge_j (-i)^{j-1} s_j(z,w)\eta_j \wedge dz$$

ここでは $f(z)$ の滑らかさを必要としている。f が滑らかでない場合には、f を滑らかな関数 f_n によって近似する。f, f_nによって構成される積分核をそれぞれ s, s_n として

$$0 = \int s_n(z,w)\,d\mu(z) \rightarrow \int s(z,w)\,d\mu(z)$$

が示される。これによって、定理HWは R の滑らかさの条件を除いても成り立つことがわかる。

今度は $R(x)$ が R^n 領域で定義されたLipschitz関数であるば

場合について考えよう。このときは、積分核は

$$H_j(z, w) = \bar{z}_j + 2R_j(x) - \bar{w}_j - 2R_j(u)$$

$$(z = x + iy,\ w = u + iv)$$

とおくことによって構成される。このばあいグラフ X 上では $y = x + iR(x)$ であるが、この関係は

$$z = \bar{z} + 2iR(x)$$

とかける。このことから構成された核関数 $s(z, w)$ が z について X 上で正則になる。この ideaは Berndtson[1]によるもので、これによって Hörmander-Wermerによる totally real submanifold 上の近似定理の別証明がなされた。

最近、この idea を用いて、Frih - Gauthier[2]は次の定理を証明した.

定理FG　$R(x)$ は R^n のコンパクト集合 K の関数で

$$|R(x) - R(x')| < k|x - x'| \qquad (0 < k < 1)$$

を満たしているとする。このとき、R のグラフ X に対して $P(X) = C(X)$ が成り立つ。

この方法はさらに C^k級の totally real set 上の近似定理の証明に応用可能である。とくに、この方法によって $k = 0$ の場合の近似定理に適用できる可能性がある。

また、この方法はCR関数の近似定理にも適用される。例えばWeinstock[5]によって定理HWの拡張がなされている。

文献

[1] B.Berndtson: Integral kernels and approximation on totally real submanifolds of C^n, Math.Ann.243(1979) 125-129

[2] E.M.Frih and E.M.Gauthier:Polynomial approximation on certain Lipschitz grapfs inC^n, Complex Variables 18(1992)55-61

[3] L.Hörmander and J.Wermer:Uniform approximation on compact sets in C^n, Math.Scand.23 (1968) 5-21

[4] B.M.Weinstock:A new proof of a theoremof Hörmander and Wermer, Math.Ann. 220 (1976)59-63

[5] B.M.Weinstock: On a theorem of A.Sakai, OsakaJ.Math 17(1980)763-767

[6] J.Wermer: Approximation on a disk, Math.Ann.155 (1954) 331-333