数理解析研究所講究録
第 826 巻 1993 年 1-17

半単純 Lie 群の指標の間の一次関係について

述: 三上 俊介 (福井大学・教育学部)
記: 寺田 順子 (京都大学・理学部)
西山 享 (京都大学・総合人間学部)

半単純 Lie 群の指標の理論は Harish-Chandra によって開拓され表現論の奥深い性質を反映するようになった。例えば表現の指標は各ユニタリ既約表現を完全に記述することが知られている。また指標を各 Cartan 部分群 (の正則元) 上に制限したものは実解析的函数であり、非常に良い性質を持っている (平井の patching condition)。しかしながら一般に指標の具体型を求めることは容易ではないし、幾つかの指標はある Cartan 部分群上では全く同じ形をさえ取ることがある。

この講演では上の事実を踏まえた上で半単純 Lie 群の不変固有超函数 (≒ 指標の一次結合) をある Cartan 部分群上に制限しその上でどのような一次関係式を満たすかを $Sp(2,\mathbb{R})$ を例にとって具体的に解説する。

各 Cartan 部分群上の一次関係 (以下簡単に「一次関係」とだけ書く) を調べることは自然に表現を幾つかの集団に分類することにつながり、その例が L-packet 、あるいはある放物型部分群からの cohomological induction で得られる表現達などになることがわかる。

1 $Sp(2,\mathbb{R})$ の Cartan 部分群

$Sp(2,\mathbb{R})$ を二通りの方法で実現しておくと以下考えやすい。そこでこの講演録では次のように書くことにする。

$$G = Sp(2,\mathbb{R}) = \{g \in GL(4,\mathbb{R}) | {}^t gHg = H, \det g = 1\},$$

$$H = \begin{bmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{bmatrix}, \qquad K = Sp(2,\mathbb{R}) \cap O(4)$$

この実現では split Cartan 部分群が対角行列として表わされるので split Cartan を考えるときには見易い実現である。

$$G_1 = \{g \in Sp(2,\mathbb{C}) | {}^t\overline{g}Jg = J\} \simeq Sp(2,\mathbb{R}),$$

$$J=\begin{bmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{bmatrix}, \qquad K_1=\left\{\begin{bmatrix} u & \\ & \overline{u} \end{bmatrix}\middle| u\in U(2)\right\}$$

この実現では compact Cartan 部分群が対角行列として表わされることになる。以下 §6 を除いて、断りなしに述べる場合には $G=Sp(2,\mathbb{R})$ について述べられたものと解釈されたい。

$Sp(2,\mathbb{R})$ の Cartan 部分群の共役類の代表元として次の 4 つのものが取れる。

$$T^{20}: \text{ compact Cartan }, \qquad T^{10}=\left\{\begin{bmatrix} \cos\varphi & & \sin\varphi & \\ & \varepsilon e^t & & \\ -\sin\varphi & & \cos\varphi & \\ & & & \varepsilon e^t \end{bmatrix}\middle| \varepsilon=\pm1, \varphi\in\mathbb{R}\right\}$$

$$T^{01}=\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^\tau & & & \\ & e^\tau & & \\ & & e^{-\tau} & \\ & & & e^{-\tau} \end{bmatrix}\middle| \tau\in\mathbb{R}, \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$T^{00}=\left\{\mathrm{diag}\,(\varepsilon_1 e^{t_1}, \varepsilon_2 e^{t_2}, \varepsilon_1 e^{-t_1}, \varepsilon_2 e^{-t_2} \middle| \varepsilon_i=\pm1, t_i\in\mathbb{R}\right\}$$

このうち T^{10} は compact Cartan 部分群から長いルートで Cayley 逆変換して得られるもの、T^{01} は短いルートで Cayley 逆変換して得られるものである。各 Cartan 部分群は $T=(T\cap K)\cdot A$ という形に直積分解できる。このとき $MA=Z_G(A)$ (A の G における中心化群) とおく。各 Cartan について M を記しておくと、

T^{20}	$M=G=Sp(2,\mathbb{R})$
T^{10}	$M=SU(1,1)\times\{\pm1\}$
T^{01}	$M\simeq SL^{\pm}(2,\mathbb{R})$
T^{20}	$M=\{\mathrm{diag}\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}$

のようになる。

2 Invariant eigendistribution

$G\supset T$ Cartan 部分群に対して $\mathfrak{t}_0$ をその Lie 環、$\mathfrak{t}=(\mathfrak{t}_0)_{\mathbb{C}}$ を Lie 環の複素化とする。さらに $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ のルート系および正ルートの全体を $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\supset\Delta^+$ と書き、(少し紛らわ

しい記号ではあるが)$\mathfrak{t}$ に対する差積を

$$\Delta^{\mathfrak{t}}(t)=\xi_\rho(t)\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\xi_\alpha^{-1}(t)),\qquad \rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$$

と書くことにする。ここに $\xi_\alpha=e^\alpha$ は $\mathrm{Ad}(t)X_\alpha=\xi_\alpha(t)X_\alpha$ (X_α はルート α に対する零でないルートベクトル) で決まる T の指標である。更に

$$\Delta_{\mathbb{R}}=(\text{real roots}),\qquad \varepsilon_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{t}}(t)=\mathrm{sgn}\prod_{\alpha\in\Delta_{\mathbb{R}}\cap\Delta^+}(1-\xi_\alpha^{-1}(t))$$

などとおく。記号の詳細については [2, 5] を参照されたい。

G_{reg} を G の正則元全体とすると $T'=T\cap G_{\mathrm{reg}}$ は差積が零でない Cartan 部分群の元全体と一致する。さらに

$$T'(\mathbb{R})=\{t\in T|\xi_\alpha(t)\neq 1\ (\forall\alpha\in\Delta_{\mathbb{R}})\}$$

と書こう。Θ を G 上の不変固有超函数 (IED) としよう[1]。さて Θ は G_{reg} 上の解析的な関数とみなしてよいので、次の関数が各 Cartan 部分群 (の正則元) 上で意味を持つ。

$$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}}=\Delta^{\mathfrak{t}}\cdot\Theta,\qquad \kappa^{\mathfrak{t}}=\varepsilon_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{t}}\cdot\Delta^{\mathfrak{t}}\cdot\Theta$$

各 Cartan 上で与えられた実解析的関数の集合 $\{\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}}|\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\}$ がこのようにして定まるが、このような実解析的関数が IED を定めるための必要十分条件が平井武氏によって与えられている (平井の patching condition [2]) 。それは次の三条件にまとめられる。

1. Weyl 群の作用に対する symmetry (不変性) 。
2. Weyl 群不変な定係数微分作用素に関して固有関数になっていること、つまり $I=S(\mathfrak{t})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{t})}\ni D$ に対して $\partial D\cdot\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}}=\mu_{\mathfrak{t}}(D)\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}}$ $(\exists\mu_{\mathfrak{t}}\in\mathfrak{t}^*)$ が成り立つこと。
3. 境界条件。$\mathfrak{t}_1\xrightarrow{\nu_\alpha}\mathfrak{t}_2$ を $\mathfrak{t}_1$ の実ルート α に関する Cayley 変換とし、$\beta=\nu_\alpha(\alpha)$ を $\mathfrak{t}_2$ の特異虚ルートとしよう。このとき $T_1\cap T_2$ の半正則元上で

$$\partial H_\alpha\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}_1}(x)=\partial H_\beta\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}_2}(x)\qquad(\forall x\in T_1\cap T_2:\text{semi-regular})$$

[1] IED の一般的性質については手短な要約と文献が本講究録の落合啓之氏の講演録「指標の幾何的計算方法」(示野信一氏記) の最初にまとめられているのでそちらを参照されたい。

が成り立つ。ここに H_α は Weyl 群不変な内積を通じて α に対応する $\mathfrak{t}$ の元である。この際 $\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}}(x)$ には意味がない (x が正則元ではないので) が上の等式の意味は、まず正則元上で微分を計算しておいて、その実解析的関数の半正則元上での極限の値が (存在して) 双方で等しいと解釈する。

さて以下 $Sp(2,\mathbb{R})$ 上の IED Θ を考えよう。

Proposition 2.1 $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$ のとき $\Theta|_{T^{01}} \equiv 0$ が成り立つ。

(注) これは一般論ではなく $Sp(2,\mathbb{R})$ の特殊事情である。

Sketch of **Proof.** $T^{00} \overset{\nu_{e_1-e_2}}{\longrightarrow} T^{01}$ を Cayley 変換としよう。ここに

$$e_i(\mathrm{diag}\,(x_1, x_2, -x_1, -x_2)) = x_i \qquad (i = 1, 2)$$

は $\mathfrak{t}^{00}$ 上の線型形式である。このとき

$$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{01}}(\exp X) = \sum_{\sigma \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^{01})} p_\sigma e^{\langle \sigma\mu, X \rangle} \qquad (X \in \mathfrak{t}^{01})$$

と書けているが (μ は無限小指標)、境界条件より $p_\sigma = p_{s_\beta \sigma}$ ($\beta = \nu_\alpha(\alpha)$) がわかる。一方 T^{01} に対応する M は $M \simeq SL^{\pm}(2,\mathbb{R})$ であったから $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^{01})$ の Weyl 群の元は全て群の元による内部自己同型で実現されている。したがって Weyl 群 symmetry より

$$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{01}}(\exp s_\beta X) = -\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{01}}(\exp X), \qquad \therefore p_{s_\beta \sigma} = -p_\sigma$$

これから $p_\sigma = 0$ でなければならない。 ∎

3 regular integral な無限小指標を持つ tempered な IED

この節では regular integral な無限小指標を持つ tempered な IED について考える。これはとりもなおさず離散系列の指標の一次結合を考えるということに等しい。

まず最初に $SL(2,\mathbb{R})$ の場合を復習しておく。$SL(2,\mathbb{R})$ の Cartan 部分群の共役類の代表元は二つあり、それは次のように書ける。

$$T^1 = \left\{ u_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T^0 = \left\{ \varepsilon a_t = \mathrm{diag}\,(\varepsilon e^t, \varepsilon e^{-t}) | \varepsilon = \pm 1, t \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき T^0 および T^1 上の関数を

$$D(\pm n)(u_\theta) = \frac{\mp e^{\mp in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$D(\pm n)(\varepsilon a_t) = \frac{(\varepsilon e^{-|t|})^n}{\varepsilon |e^t - e^{-t}|}$$

で決めるとこれが離散系列の指標を与えることは良く知られている (e.g. [9]) 。さて regular integral な無限小指標を持った tempered な IED を Θ とすると Θ はこの二つの離散系列の指標の和として書ける。

$$\Theta = c_1 D(n) + c_2 D(-n) \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

そこで上の具体的な式を見ると

$$\Theta|_{T^0} \equiv 0 \Longleftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Longleftrightarrow \Theta(u_{-\theta}) = -\Theta(u_\theta)$$

が成立することがわかる。ここで $u_{-\theta} = w_0 u_\theta$ であることに注意しよう。ただし w_0 は Weyl 群 $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^1)$ の非自明な元、つまり最長元である。

実は $Sp(2,\mathbb{R})$ でも $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$ という条件は同じように捉えることが出来る。その前に $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現の指標についてまず復習しておこう。

$\mu \in \mathfrak{t}^{20*}$ の座標表示を $\mu = (\nu_1 l_1, \nu_2 l_2)$ $(\nu_i = \pm 1, l_i \geq 0)$ と書く。すなわち

$$\mathfrak{t}^{20} \ni X = \begin{bmatrix} & & \varphi_1 & \\ & & & \varphi_2 \\ -\varphi_1 & & & \\ & -\varphi_2 & & \end{bmatrix}$$

に対して $\mu(X) = \sum_{j=1}^2 \nu_j l_j (\sqrt{-1}\varphi_j)$ と定義する。この μ を Θ の無限小指標とすると、仮定から $l_1 > l_2 > 0$ は正整数である。μ をパラメータに持つ離散系列表現の指標を $\Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2)$ と書くと T^{20} 上では

$$\Delta\Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2)(\exp X) = (-1)\nu_1\nu_2 \sum_{w \in W(G, T^{20})} \mathrm{sgn}\,(w) e^{\langle w\mu, X \rangle}$$

と与えられている。また $\lambda=(l_1,l_2)$ と書くと $\Theta(\nu_1 l_1,\nu_2 l_2)=\Theta(w\lambda;wC^+)$ $(\exists w\in W(\mathfrak{g},T^{20}))$ と表すこともできる。ただし C^+ は λ を dominant にするような $\mathfrak{t}^{20*}$ の Weyl chamber である[2]。

Theorem 3.1 Θ を $Sp(2,\mathbb{R})$ の regular integral な無限小指標を持つ tempered な IED で $\Theta|_{T^{20}}\not\equiv 0$ となるようなものとする。このとき次の 1) 2) は同値である。

1) $\Theta|_{T^{00}}\equiv 0$

2) $\Theta(\exp w_0X)=-\Theta(\exp X)$ $(X\in\mathfrak{t}^{20})$ が成立つ。ただし $w_0\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^{20})$ は最長元である。

この定理の意味するところは「 split Cartan 上の一次従属関係を見るには compact Cartan を見ればよい」ということである。またこの定理は必要な修整をすれば $Sp(n,\mathbb{R})$ でも $SU(p,q)$ でも成り立つ。詳しくは [5, 6] を参照のこと。

この定理の条件 2) は実はよい性質を持っている。以下少しの間一般の半単純群について述べる。

以下では $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ としては次の性質を満たすものを選ぶことにする。$\Delta_c(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$, $\Delta_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ で各々 compact imaginary, singular imaginary roots 全体を表わすとき、$\forall\alpha\in\Delta_c(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ に対して

$$s_\alpha(\Delta_n^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}))\subset\Delta_n^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$$

が成り立つ。ただし、$\Delta_n^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})=\Delta_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\cap\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ である。

Definition 3.2 IED Θ が Cartan 部分群 T 上で性質 (P) を持つとは、$w_0\in W_I(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ を imaginary Weyl 群の最長元とするとき $\Theta(t^{w_0})=-\Theta(t)$ が成り立つことである。

特に split Cartan T^{00} に対しては $W_I(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^{00})=\{1\}$ なので、 $w_0=1$ 、したがって T^{00} 上で (P) が成り立てば $\Theta(\exp x)=\Theta(\exp w_0X)=-\Theta(\exp X)$, $\therefore\ \Theta\equiv 0$ がわかる。

$G=Sp(n,\mathbb{R}),SU(p,q)$ に対しては次の命題が成立する。

[2]実はこの場合 $(\nu_1 l_1,\nu_2 l_2)$ が決まれば w が、したがって wC^+ が決まってしまうが、このように Weyl chamber を一緒に記号として書いたのは次節以降で singular な無限小指標も考えるからである。

Proposition 3.3 Θ を正則な無限小指標を持つ tempered な IED とする。Θ の height より真に低い[3]Cartan 部分群 T に対してその実ルート α に関する Cayley 変換で得られる各 Cartan 部分群上で Θ が性質 (P) を持てば T 上でも Θ は性質 (P) を持つ。

この命題より定理 3.1 の 2) $\Rightarrow$ 1) は容易に導ける。また命題 3.3 は、より広い範囲の半単純群に対しても成立するのではないかと思える。

ルートの形について：

$$\mathfrak{t}_0^{20} \ni X = \begin{bmatrix} & & \varphi_1 & \\ & & & \varphi_2 \\ -\varphi_1 & & & \\ & -\varphi_2 & & \end{bmatrix} \text{ に対して } x_j = \sqrt{-1}\varphi_j$$

$$\mathfrak{t}_0^{10} \ni X = \begin{bmatrix} & & \varphi_1 & \\ & t_2 & & \\ -\varphi_1 & & & \\ & & & -t_2 \end{bmatrix} \text{ に対して } \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{-1}\varphi_1 \\ x_2 = t_2 \end{array}$$

$$\mathfrak{t}_0^{01} \ni X = \begin{bmatrix} \tau & \theta & & \\ -\theta & \tau & & \\ & & -\tau & \theta \\ & & -\theta & -\tau \end{bmatrix} \text{ に対して } \begin{array}{l} x_1 = \tau + \sqrt{-1}\theta \\ x_2 = \tau - \sqrt{-1}\theta \end{array}$$

$$\mathfrak{t}_0^{00} \ni X = \mathrm{diag}\,(t_1, t_2, -t_1, -t_2) \text{ に対して } x_j = t_j$$

とおいておけば $\mathfrak{t}^* \ni \forall\mu$ は $\mu(X) = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j$ と表される。そこでこの μ を $\mu = (c_1, c_2)$ と書くことにしよう。また $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ と表す。この記号ではルート系は Cartan 部分群によらず

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_1 \pm e_2, \pm 2e_1, \pm 2e_2\} \supset \Delta^+ = \{e_1 \pm e_2, 2e_1, 2e_2\}$$

と表せる。

[3] height 及び Cartan 部分群の間の順序の定義は 8 ページ、又は Hirai [2] を参照。

定理 3.1 の補充：

Θ を $\mu=(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2)$ $(\nu_i=\pm 1, l_1>l_2>0)$ を無限小指標に持つ tempered な IED とする。このとき

$$\Theta=\sum_{\nu_i=\pm 1} c_{\nu_1,\nu_2}\Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2) \qquad (c_{\nu_1,\nu_2}\in\mathbb{C})$$

と表されるが Θ が定理の条件を満たすことと

$$\Theta=\sum_{k=1}^{2} c_k\Theta_k \qquad \text{ただし} \quad \Theta_k=\sum_{\nu_i=\pm 1}\nu_k\Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2) \quad (k=1,2)$$

と表されることは同値である。

4 regular な無限小指標を持つ tempered IED

まず G の Cartan 部分群に次のように順序関係を入れておく。図において上方にある Cartan 部分群が "大" であって、下方にあるものが "小" である。

$$\begin{tikzcd}
 & T^{20} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T^{10} \arrow[dr] & & T^{01} \arrow[dl] \\
 & T^{00} &
\end{tikzcd}$$

Definition 4.1 IED Θ の height とは $\Theta|_{T^{ij}}\not\equiv 0$ となるような T^{ij} のうちで上の順序に関して極大なものを言う。

一般に IED の height はただ一つとは限らないが、特に Θ を無限小指標が正則で tempered なものとすると height はただ一つである[4]。§3 でやった場合が height が

[4] このことは次のようにして "納得" できる。まず height が T^{20}, T^{00} の場合は明らかに height はただ一つである。height が複数あった場合、height が T^{10} を含んでいれば tempered の仮定からその無限小指標は $\mu=(\nu_1 l_1, c_2)$ $(\nu_1=\pm 1, l_1\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, c_2\in\sqrt{-1}\mathbb{R})$ の形でなくてはならない。一方 height が T^{01} を含んでいれば無限小指標は $\mu=(c_1,c_2)$ $((c_1-c_2)/2\in\mathbb{Z}, (c_1+c_2)/2\in\sqrt{-1}\mathbb{R})$ の形をしていなくてはならないが、この条件が同時に成り立つのは $\mu=(0,0)$ の場合にかぎられる。この場合は無限小指標が特異になる。

T^{20} の場合であり、height が T^{01} の場合は命題 2.1 で既に扱っている。また height が T^{00} の時は $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$ という仮定そのものが結果を意味するので自明に成り立つ (この場合 $w_0 = 1$ であることに注意せよ)。そこで結局残った場合は height が T^{10} の場合だけである。この場合 tempered IED Θ の無限小指標は $\mu = (\nu_1 l_1, c_2)$ ($\nu_1 = \pm 1, l_1 > 0, c_2 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}\backslash\{0\}$) の形をしていなくてはならないことに注意せよ。

Theorem 4.2 Θ を正則な無限小指標を持つ tempered な IED でその height が T^{10} であるようなものとする。このとき次の二つの条件は同値である。

1) $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$ 2) Θ は T^{10} 上で条件 (P) を満たす[5]。

Idea of **Proof.** 証明は実質的には $SL(2,\mathbb{R})$ に帰着する。実際 T^{10} に対する M は $M \simeq SL^{\pm}(2,\mathbb{R})$ であった[6]が、Θ は

$$\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(\Theta(\nu_1 l_1) \otimes \mu|_A \otimes 1_N)$$

の形の standard 表現の一次結合として表せる。したがって一次関係は $\Theta(\nu_1 l_1)$ の一次関係に帰着する。 ∎

Shelstad の結果 ([7, 8]) との関係:

つぎのような指標の和を考えよう。

$$\Theta_3 = \sum_{\nu_i = \pm 1} \nu_1 \nu_2 \Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2) \Longleftrightarrow \Theta_3|_{T^{10}} \equiv 0$$

$$\Theta_4 = \sum_{\nu_i = \pm 1} \Theta(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2) \Longleftarrow \Theta_4(t^w) = \Theta_4(t) \quad (\forall w \in W_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^{20}))$$

このうち Θ_4 は俗に averaged discrete series と呼ばれている指標である。Shelstad は G の endoscopic 群 H 上の stable 緩増加 IED χ から lifting により G 上の緩増加 IED Lift χ を構成した。$G = Sp(2,\mathbb{R})$ で与えられた整かつ正則な無限小指標を持つものの場合にその結果を適用すれば 8 ページ及び上で定義した $\Theta_i (= \mathrm{Lift}\ \chi_{H_i}\ (i = 1, \cdots, 4))$ の 4 つである ($H_4 = G$ 自身である)。更に L-packet Π に属する任意の Θ を Lift χ_{H_i} の一次結合の形で表せるかという命題が今の場合正しいことは Θ_i の具体形をみれば容易に検証できる。

---

[5] 定義 3.2 を参照。

[6] §1 を参照。

5 singular な無限小指標を持つ tempered IED

この節では singular な無限小指標 μ を持つ tempered IED Θ について考察する。このとき無限小指標は次の形をしている。

1) $\mu=(l_1,0)$ ($l_1>0$, 整数) 2) $\mu=(l_1,-l_1)$ ($l_1>0$, 整数)
3) $\mu=(0,c_2)$ ($c_2\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$) 4) $\mu=(c_1,-c_1)$ ($c_1\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$)

4) の場合には $\Theta\neq 0$ となりうる Cartan 部分群は T^{00} と T^{01} が考えられるが、これは命題 2.1 より解決済みといえる。3) の場合には height が T^{00} であるような IED が存在するので T^{01} 上の情報だけで T^{00} 上での Θ について結論を得るのは無理である。(結論が仮定の中に既に含まれているような形になってしまう。) そこでこの節では 1) について解説することにする。2) については 1) と同様に扱える。

Proposition 5.1 Θ は特異な無限小指標$\mu=(l_1,0)$ ($l_1>0$, 整数) を持つような tempered IED であるとする。このとき次の 1) 2) は同値である。

1) $\Theta|_{T^{00}}\equiv 0$ 2) Θ は T^{20},T^{10} 上で性質 (P) を持つ。

Sketch of **Proof**. まず 1) $\Rightarrow$ 2) を示す。

$\lambda=(l_1,l_2)$ ($l_1>l_2>0$) に対して

$$\Theta_-^\lambda=\Theta(l_1,l_2)-\Theta(-l_1,-l_2)=\Theta(\lambda,C^+)-\Theta(w_0\lambda,w_0C^+)$$

とおく。このとき $w_0=s_{2e_1}s_{2e_2}$ である。この Θ_-^λ を translation しよう。すなわち F を C^+ に関して最低ウェイト $(0,-l_2)$ を持つような G の有限次元表現 (の指標) とすると

$$\mathrm{Proj}_\mu\left(\Theta_-^\lambda\otimes F\right)=\Theta(\mu,C^+)-\Theta(w_0\mu,w_0C^+)=\Theta_-$$

は無限小指標が μ の IED である。ここに Proj_μ は無限小指標が μ の成分への射影を表す。さて

$$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{20}}(t)=\Delta^{20}\Theta=A(e^{il_1\varphi_1}-e^{il_1\varphi_2})+B(e^{-il_1\varphi_1}-e^{-il_1\varphi_2})$$

と表しておく。$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{01}}\equiv 0$、したがって T^{20} と T^{01} の間の境界条件は $\partial H_\beta\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{20}}=0$ ($\beta=e_1+e_2$) となる。故に $A+B=0$ となり、$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{20}}=C\tilde{\kappa}_-^{\mathfrak{t}^{20}}$ と表せる。

これより Θ は T^{20} 上性質 (P) を持つ。

次に $\hat{\Theta}=\Theta-C\Theta_-$ とおく。すると $\hat{\Theta}$ は μ を無限小指標に持つ tempered IED で $\hat{\Theta}$ の height は T^{10} である。そこでこの $\hat{\Theta}$ には $SL(2,\mathbb{R})$ の議論が適用できて結局

$$\hat{\Theta}|_{T^{00}}\equiv 0 \Longrightarrow \hat{\Theta} \text{ は } T^{10} \text{ において (P) を満たす}$$

ということがわかる。

一方 translation する前の Θ_-^λ は命題 3.3 により T^{10} 上で (P) を満たす。また F は有限次元表現の指標なので $W(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^{10})$ 不変である。そこでその tensor 積 $\Theta_-^\lambda\otimes F$ は T^{10} 上で (P) を満たすことがわかる。したがってその μ 成分である Θ_- も T^{10} 上で性質 (P) を持つ。

以上のことから $\Theta=C\Theta_-+\hat{\Theta}$ も T^{10} 上で (P) を満たす。

2) $\Rightarrow$ 1) について

$\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{20}}$ は (P) を満たすから T^{20} 上では適当な定数 C を選ぶと $\tilde{\kappa}^{\mathfrak{t}^{20}}=C\tilde{\kappa}_-^{\mathfrak{t}^{20}}$ となる。$\hat{\Theta}=\Theta-C\Theta_-$ とおくと、$\hat{\Theta}$ は同じ無限小指標 μ を持つ緩増加 IED で height は T^{10} になる。Θ_-^λ は命題 3.3 より T^{10} 上 (P) を満たす。上述したように Θ_- も T^{10} 上 (P) を満たし、故に $\hat{\Theta}$ も T^{10} 上 (P) を満たす。また T^{10} 上 $\varepsilon_{\mathbb{R}}\Delta\hat{\Theta}$ は実解析的、緩増加 (有界) だから

$$\varepsilon_{\mathbb{R}}\Delta^{\mathfrak{t}^{10}}\hat{\Theta}(\exp X)=\text{const.}(e^{il_1\varphi_1}+e^{-il_2\varphi_2}) \qquad (X\in\mathfrak{t}_0^{10})$$

となることがわかり、$SL(2,\mathbb{R})$ の場合の結果を適用すれば、$\hat{\Theta}|_{T^{00}}\equiv 0$ となる。$\Theta_-|_{T^{00}}\equiv 0$ だから、$\Theta|_{T^{00}}\equiv 0$ が導ける。 ∎

6 non-tempered な場合の一つの試み

tempered な L-packet Π_φ に対して

$$\sum_{\pi\in\Pi_\varphi}\Theta_\pi$$

が stable な tempered IED になっており、これが前節までは本質的な役割を果たしていた。そこで non-tempered な場合にも同じように L-packet を考えその平均で stable

な IED が作り出せればそれが重要な役割をすると考えられる。しかし non-tempered な場合にはどうも L-packet だけを考えていてはうまくいかないようである。この節では cohomological parabolic induction により tempered な場合の L-packet に当たる表現の family $\{A(w\mu, \pi_w) | w \in W\}$ を作りその間の一次関係を調べることを試みる。

§1 の記号で $Sp(2, \mathbb{R})$ に同型な群 G_1 をこの節では用いることにする。

$$G_1 \supset K_1 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} u & \\ & \overline{u} \end{array} \right] \middle| u \in U(2) \right\}$$

がその極大 compact な部分群である。このとき compact Cartan 部分群は対角行列として表される。

$$T^{20} = \{\text{diag}\,(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{-i\varphi_1}, e^{-i\varphi_2})\}$$

以下しばらくの間 $T, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}$ はこの compact Cartan 部分群、そのリー環、複素化を表わしているものとする。また θ を K_1 に付随した Cartan 対合としよう。さらに G_1, K_1 のかわりに G, K などと書く。

6.1 θ 不変な放物型部分群

$\lambda_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^* \subset \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ に対して

$$L = \{g \in G |\, \text{Ad}(g)^* \lambda_0 = \lambda_0\}, \qquad \mathfrak{l}_0 = \text{Lie}(L)$$

とおく。そうすると $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{t}$ を含む部分環であって次のルート分解を持つ。

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \sum_{\langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

そこで巾零リー環 $\mathfrak{u}$ を

$$\mathfrak{u} = \sum_{\langle \alpha, \lambda_0 \rangle > 0} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

で定めると $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ 不変な放物型部分群になる。また $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役を $^{-}$ で表すと

$$\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} + \overline{\mathfrak{u}}, \qquad \overline{\mathfrak{u}} = \sum_{\langle \alpha, \lambda_0 \rangle > 0} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

となっている。

Example 6.1 $\lambda_0 = e_1 - e_2$ のとき

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}^{e_1+e_2} + \mathfrak{g}^{-e_1-e_2}, \qquad \Delta(\mathfrak{u}) = \{2e_1, e_1 - e_2, -2e_2\}$$

である。さらに

$$L = \left\{ x = \begin{bmatrix} a & & b \\ & \boxed{g'} & \\ c & & d \end{bmatrix} \middle| e^{i\theta} g' = e^{-i\theta} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(1,1) \right\}$$

であって同型 $\Phi : L \xrightarrow{\sim} U(1,1)$ が

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

によって与えられる。

6.2 $A(\mu, \pi)$ の構成

$T \subset L$ を上の通りとする。さらに π を L の一次元表現で $\pi|_T = \mu \in \hat{T} \subset \mathfrak{t}^*$ となるものとする。

Example 6.2 前の例 6.1 での L に対しては $\pi(x) = (\det \Phi(x))^m$, $\mu = m(e_1 - e_2)$ となる。

D.Vogan [10] にしたがい、$(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群[7]の圏から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏への関手 $\mathcal{R}$ を次のように構成する。

1. まず $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群 π に対してこれを $\mathfrak{u}$ の作用を自明なものとして $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ 加群に拡張しておく。このとき

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), \pi \otimes \wedge^{\mathrm{top}} \mathfrak{u})$$

に次のように $(\mathfrak{g}, L \cap K)$ 加群の構造を入れる。まず $\mathfrak{g}$ 加群としては

$$(Yf)(X) = f(XY) \qquad (f \in \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), \pi \otimes \wedge^{\mathrm{top}} \mathfrak{u}), X \in U(\mathfrak{g}), Y \in \mathfrak{g})$$

[7] $L \cap K = T$ であることに注意せよ。

次に同じ f に対して $L\cap K$ の作用を

$$kf(X)=k(f(\mathrm{Ad}\,k^{-1}X))\qquad (k\in L\cap K)$$

で定義する。この構造で $L\cap K$ 有限な元の全体を

$$\mathrm{pro}_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},L\cap K}(\pi\otimes\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u})=\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}),\pi\otimes\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u})_{L\cap K}$$

と書こう。これを π の produced module と呼ぶ。これで $(\mathfrak{l},L\cap K)$ 加群から $(\mathfrak{g},L\cap K)$ 加群が構成できたことになる。また $\mathrm{pro}_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},L\cap K}$ は完全な関手になることも分かる。

2. 次に V を $(\mathfrak{g},L\cap K)$ 加群としてこれから $(\mathfrak{g},K)$ 加群を次のように構成しよう。まず $\tilde{K}$ を K の普遍被覆群とし、その中心拡大を

$$1\longrightarrow Z\longrightarrow\tilde{K}\longrightarrow K\longrightarrow 1$$

と書いておこう。そこで我々は V_0,V_1 を次のように定義する。

$$V_0=\{v\in V|\dim U(\mathfrak{k})v<\infty\},\qquad V_1=\{v\in V_0|zv=v\ (\forall z\in Z)\}$$

このとき $\Gamma(V)=\Gamma_{\mathfrak{g},L\cap K}^{\mathfrak{g},K}(V)=V_1$ は $(\mathfrak{g},K)$ 加群の構造を自然に持つ。Γ は左完全な関手である。

3. $\mathcal{R}=\Gamma_{\mathfrak{g},L\cap K}^{\mathfrak{g},K}\circ\mathrm{pro}_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},L\cap K}$ とおく。これにより左完全な関手が出来るがその導来関手を $\mathcal{R}^i$ と書く。いま $\mathrm{pro}_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},L\cap K}$ は完全な関手なので

$$\mathcal{R}^i(\pi)=\left(\Gamma_{\mathfrak{g},L\cap K}^{\mathfrak{g},K}\right)^i\left(\mathrm{pro}_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},L\cap K}(\pi)\right)$$

である。さらに $s=\dim\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}$ とおき、$A(\mu,\pi)=\mathcal{R}^s(\pi)$ と定義する。

6.3　$A(w\mu,\pi_{w\mu})$ の構成

$\lambda_0\in\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ と $w\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ に対して放物型部分環を次のように定義する。

$$L_w=\{g\in G|\,\mathrm{Ad}(g)^*w\lambda_0=w\lambda_0\},$$
$$\mathfrak{l}_w=\mathfrak{t}+\sum_{\langle\alpha,\lambda_0\rangle=0}\mathfrak{g}^{w\alpha},\qquad \mathfrak{u}_w=\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})}\mathfrak{g}^{w\alpha},$$
$$\mathfrak{q}_w=\mathfrak{l}_w+\mathfrak{u}_w$$

更に L_w の一次元表現 $\pi_{w\mu}$ で $\pi_{w\mu}|_T=w\mu$ となるものが存在することが知られている (Adams-Johnson [1])。我々の場合 $\pi_{w\mu}$ の具体形は次のとおりである。

Example 6.3 $\lambda_0 = e_1 - e_2, \mu = m(e_1 - e_2), w = s_{2e_2}, w\lambda_0 = e_1 + e_2$ のとき

$$L_w = K = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & \overline{u} \end{bmatrix} \middle| u \in U(2) \right\}, \qquad \pi_{w\mu} = (\det u)^m$$

L-packet Π_φ の替わりとして $w \in \{1\} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2 \subset \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$ に対して表現の族 $\{A(w\mu, \pi_{w\mu})\}$ を考え、その指標達の間に成立する一次関係を以下調べよう。

6.4 $A(\mu, \pi_\mu)$ の resolution

$\pi = \pi_\mu$ と書き直す。$A(\pi_\mu, \mu)$ の resolution を考えたい。

Example 6.4

$$\begin{array}{ccccc} L & \simeq & U(1,1) & \supset & SU(1,1) \\ \cup & & \cup & & \\ T^{01} & \simeq & H & & : \text{極大 split Cartan} \\ & & \| & & \\ & & T_L \cdot A & \supset & T'_L \cdot A \end{array}$$

ここに T_L は H の compact center であり、$T'_L = \{\pm 1\}$ である。さて $SU(1,1)$ の表現として $\rho_A(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)|_{\mathfrak{n}}$ をとろう。すると次の完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{T'_L AN}^{SU(1,1)} (1 \otimes (-\rho_A) \otimes 1) \longrightarrow \Theta(\alpha/2) \oplus \Theta(-\alpha/2) \longrightarrow 0$$

ただし $\alpha = e_1 + e_2$ である。$\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm\alpha\}$ であることに注意せよ。この完全系列に compact center の表現を付け加えておくと L の表現の完全系列ができる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \pi_\mu \longrightarrow \mathrm{Ind}_{T_L AN}^{SU(1,1)} (\pi_\mu|_{T_L} \otimes (-\rho_A) \otimes 1) \\ \longrightarrow \Theta^L(\alpha/2 + \mu, C_+^L) \oplus \Theta^L(-\alpha/2 + \mu, s_\alpha C_+^L) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ を作用させて長完全列を作ると $\mathcal{R}^i = 0$ $(i \geq 2)$ だから

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{R}^1(\pi_\mu) \longrightarrow \mathcal{R}^1 \left(\mathrm{Ind}_{T_L AN}^{SU(1,1)} (\pi_\mu|_{T_L} \otimes (-\rho_A) \otimes 1) \right) \\ \longrightarrow \mathcal{R}^1 \left(\Theta^L(\alpha/2 + \mu, C_+^L) \oplus \Theta^L(-\alpha/2 + \mu, s_\alpha C_+^L) \right) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

であることがわかる。一方つぎのことが既によく知られている。

1. $\rho(\mathfrak{u}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})}\alpha$ とおくと

$$\mathcal{R}^1\left(\Theta^L(\alpha/2+\mu, C_+^L)\right) = \Theta^G(\alpha/2+\mu+\rho(\mathfrak{u}), s_{2e_2}C_+^G),$$

$$\mathcal{R}^1\left(\Theta^L(-\alpha/2+\mu, s_\alpha C_+^L)\right) = \Theta^G(-\alpha/2+\mu+\rho(\mathfrak{u}), s_{2e_2}s_\alpha C_+^G)$$

が成り立つ。

2.

$$\mathcal{R}^1\left(\mathrm{Ind}_{T_LAN}^L(\pi_\mu|_{T_L}\otimes(-\rho_A)\otimes 1)\right) \simeq \mathrm{Ind}_{MAN'}^G(\delta\otimes(-\rho_A)\otimes 1)$$

である。ただし $Z_G(A) = MA$, $M \simeq SL^{\pm}(2,\mathbb{R})$, δ は M の離散系列表現である(そのパラメータも容易に特定できるがここでは必要ないので省いた)。とくにこの場合は上の表現は non-unitary, non-tempered であることにも注意しておこう。

上にあげた事実と完全系列 (6.1) により $A(\mu,\pi_\mu) = \mathcal{R}^1(\pi_\mu)$ は一応“わかった”ことになる。これは Johnson [4] による $A(\mu,\pi_\mu)$ の resolution の特別な場合になっているのだが、我々の場合は $\mathbb{R}$-階数が 2 であり、1 次の cohomology を考えればよいので直接 $A(\mu,\pi_\mu)$ の resolution を導いた。

Example 6.5 $L_w = K$ の場合 $A(w\mu,\pi_{w\mu})$ は G の離散系列表現になる。

以下 $A(\pi_{w\mu}, w\mu)$ と書いてこの表現の指標も表わすことにしよう。そうすると、

$$\langle A(\pi_{w\mu}, w\mu)\rangle/\mathbb{C} \subset \langle G \text{ の離散系列の幾つか} \rangle/\mathbb{C} + \langle M \text{ からの standard 表現} \rangle/\mathbb{C}$$

となっていることがわかる。さて最初のテーマであった指標の関係式という主題に立ち戻ろう。次の命題が成り立つ。

Proposition 6.6 $\Theta = \sum_{w\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{t})} c_w A(w\mu,\pi_{w\mu}) \neq 0$ に関して次の 1) 2) は同値である。

a) $\lambda_0 = e_1 - e_2$ のとき、
1) $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$　　2) Θ は T^{20}, T^{01} 上で (P) を満たす。

b) $\lambda_0 = 2e_1$ のとき、
1) $\Theta|_{T^{00}} \equiv 0$　　2) Θ は T^{20}, T^{10} 上で (P) を満たす。

References.

[1] J. Adams and J. Johnson. Endoscopic groups and packets of non-tempered representations. *Comp. Math.*, **64**(1987), 271–309.

[2] T. Hirai. Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups. *Japan. J. Math. (New Series)*, **2**(1976), 27–89.

[3] T. Hirai. Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, IV. Explicit forms of the characters of discrete series representations for $Sp(n, \mathbb{R})$. *Japan. J. Math. (New Series)*, **3**(1977), 1–48.

[4] J. Johnson. Lie algebra cohomology and resolution of certain Harish-Chandra modules. *Math. Ann.*, **267**(1984), 377–393.

[5] S. Mikami. On character identities for $Sp(n, \mathbb{R})$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions. *Japan. J. Math.*, **11**(1985), 361–385.

[6] S. Mikami. $SU(p,q)$ の指標等式について. 数理解析研究所講究録, **598**(1986), 236–256.

[7] D. Shelstad. Orbital integrals and a family of groups attatched to a real reductive group. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **12**(1979), 1–31.

[8] D. Shelstad. L-indistinguishability for real groups. *Math. Ann.*, **259**(1982), 385–430.

[9] M. Sugiura. *Unitary representations and harmonic analysis – An introduction – (Second edition)*. North-Holland/Kodansha, 1990.

[10] D.A. Vogan. *Representations of real reductive Lie groups.* Birkhäuser, 1981.