

Plancherel formula for line bundles on Hermitian symmetric spaces

東大数理 示野 信一 (Nobukazu Shimeno)

§ 1 Introduction

目標 非コンパクト型のリーマン対称空間の Plancherel 公式 (Harish-Chandra の球函数による理論) を non-trivial line bundle の場合に一般化する。

Notations

G : connected non-compact real semisimple Lie group with finite center

K : a maximal compact subgroup of G

$G = KAN$: Iwasawa decomposition of G

$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$: G, K, A, N に対応する Lie algebra

$g \in G$ に対して $g \in k(g) \exp H(g) N$ ($k(g) \in K, H(g) \in \mathfrak{a}$) とする。

σ^* : σ の dual

$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X \text{ for } \forall H \in \mathfrak{a} \}$ ($\alpha \in \sigma^*$)

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \{ \alpha \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0, \alpha \neq 0 \}$: restricted root 系

$\Sigma^+ \subset \Sigma$: Π に対応する positive system

W : Σ の Weyl 群

$m_\alpha := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\alpha$

$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \in \mathfrak{a}^*$

$\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$: Σ^+ に対応する positive Weyl chamber

$A^+ := \exp \mathfrak{a}^+$

$\mathfrak{a}_+^* := \{ \lambda \in \mathfrak{a}^* : \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Sigma^+ \}$

G/K は Riemannian symmetric space of non-compact type と呼ばれ
 以下に様な例がある。

Ex. 1 $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ ($\mathfrak{a} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

Ex. 2 $Sp(2, \mathbb{R})/U(2)$ ($\dim \mathfrak{a} = 2$)

Harish-Chandra の理論の復習

• 球函数

$\lambda \in \mathfrak{a}_+^* (= \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ に対し

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{-(\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} dk \quad (g \in G)$$

dk は K 上の normalized Haar measure

を球函数と呼ぶ。球函数は、次の 3 つの性質で特徴付けられる。

- 両側 K -不変
- G/K 上の不変微分作用素の固有値 λ の同時固有函数
- $\phi_\lambda(e) = 1$

Lemma $\phi_\lambda = \phi_\mu \Leftrightarrow \lambda \in W \cdot \mu$

Ex 1. の場合、 $\phi_\lambda|_A$ は Gauss の超幾何函数で表せる。

◦ Harish-Chandra series

λ : generic の時、 A^+ 上

$$\phi_\lambda = \sum_{w \in W} c(w\lambda) \Phi_{w\lambda}$$

と展開できる。ここで、 $c(\lambda)$ は Harish-Chandra の c -函数と呼ばれるもので Γ 函数の積、商で具体的に書ける。また、 Φ_λ は A^+ 上定義される不変微分作用素の動径成分の固有函数で、

$\Phi_\lambda \sim a^{\lambda-\rho}$ ($a \rightarrow \infty$ in A^+) という漸近挙動を持つものである。

この展開を ϕ_λ の Harish-Chandra series と呼ぶ。

Ex 1 の場合、 $\alpha_c^* \ni \lambda \mapsto \lambda((1-1)) \in \mathbb{C}$ により、 α_c^* と \mathbb{C} を同一視すると、超幾何函数の接続公式で、H-C series は、

$$c(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \quad \text{となる。}$$

◦ Harish-Chandra 変換

$f \in C_c^\infty(K \backslash G/K)$ に対し

$$\hat{f}(\lambda) := \int_G f(g) \phi_{-\lambda}(g) dg$$

(dg : G 上の Haar measure を適当に normalize したものを)

と定義し、これを f の Harish-Chandra 変換と呼ぶ。この逆変換は次で与えられる。

Theorem (Harish-Chandra)

$$f(g) = \frac{1}{|W|} \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{a}^*} \hat{f}(\lambda) \phi_{\lambda}(g) |\mathfrak{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

§ 2 Harish-Chandra 変換の一般化とその Inversion formula (1-st form)

G に次の仮定を付ける。

仮定 G は simple, connected Lie group Z . G/K は Hermitian symmetric space ($\Rightarrow K$ は 1次元の center を持つ). G の center を $Z(G)$ と書く。

この時、 τ を K の 1次元表現 ($\tau: K \rightarrow \mathbb{C}^\times$, alg. hom.) とすれば、 τ は $\tau_\ell (\ell \in \mathbb{Z})$ と parametrize される。

Ex.1, Ex.2 は其に上の仮定を満たし、 K の 1次元表現は、次の様になる。

Ex.1 の場合 $K = SO(2) \ni \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_\ell} e^{i\ell\theta} \in \mathbb{C}^\times$

Ex.2 の場合 $K = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} : u \in U(2) \right\} \ni \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_\ell} (\det u)^\ell \in \mathbb{C}^\times$

更に、 G が simply connected と仮定する。

(Ex.1 では、 $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (universal cover), $K = \mathbb{R}$)
となる。

すると、parameter λ は \mathbb{R} (unitary), 又は \mathbb{C} (non-unitary) に
よびのびる。

こうする理由は

- 1° 連続parameter は離散parameter より一般的
- 2° 解析をするのに parameter は連続の方がよい

• type τ - λ の球函数

まず、Harish-Chandra の球函数の一般化として、type τ - λ の
球函数を次で定義する。

$$\Phi_{\lambda, \lambda} (g) := \int_{K/Z(G)} \tau_{\lambda} (k^{-1} k(g^{-1}k)) e^{-(\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} dk \quad (g \in G)$$

$$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \lambda \in \mathbb{C}$$

これは、次の3つの性質で特徴付けられる。

- $$\left\{ \begin{array}{l} \circ \Phi_{\lambda, \lambda} (k_1 g k_2) = \tau_{\lambda} (k_1 k_2)^{-1} \Phi_{\lambda, \lambda} (g) \quad (k_1, k_2 \in K, g \in G) \\ \circ G/K \text{ の } \tau_{\lambda} \text{ に同伴した line bundle 上の不変微分作用素の固} \\ \text{有値 } \chi_{\lambda, \lambda} \text{ の同時固有函数} \\ \circ \Phi_{\lambda, \lambda} (e) = 1 \end{array} \right.$$

Lemma $\Phi_{\lambda, \lambda} = \Phi_{\mu, \lambda} \Leftrightarrow \lambda \in W \cdot \mu$

$\Phi_{\lambda, 0} = \Phi_{\lambda}$ が成り立つ。

Ex.1 の場合、 $\Phi_{\lambda, \lambda}|_A$ はやはり Gauss の超幾何函数で表せる。

◦ Harish-Chandra series

$\Phi_{\lambda, \ell}$ について \mathcal{Z} も Harish-Chandra series が得られ \mathcal{Z} 次の様になる。

λ : generic な時. A^+ 上

$$\Phi_{\lambda, \ell} = \sum_{w \in W} c(w\lambda, \ell) \Phi_{w\lambda, \ell}$$

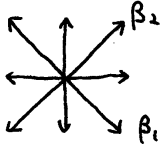
$$\left\{ \begin{array}{l} c(\lambda, \ell) : c\text{-函数 (具体的に計算できる)} \\ c(\lambda, 0) = c(\lambda) \text{ (Harish-Chandra の } c\text{-函数)} \\ \Phi_{\lambda, \ell} : \text{不変微分作用素の動径成分の固有函数} \\ \Phi_{\lambda, \ell} \sim a^{\lambda - \rho} \text{ (} a \rightarrow \infty \text{ in } A^+) \end{array} \right.$$

Ex. 1 の場合

$$c(\lambda, \ell) = \frac{2^{1-\lambda} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1+\ell)) \Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1-\ell))}$$

Ex. 2 の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ に対し $\mathcal{Z}, \Sigma^+ = \{\beta_1, \beta_2, \frac{1}{2}(\beta_2 \pm \beta_1)\}$ とする。



$$\sigma_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda = \frac{x}{2}\beta_1 + \frac{y}{2}\beta_2 \rightarrow (x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{に } \mathcal{Z}, \mathcal{Z}$$

$\sigma_{\mathbb{C}}^*$ と \mathbb{C}^2 を同一視すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}z)}{\Gamma(\frac{1}{2}(z+1))} \\ c_2(z, \ell) = \frac{2^{1-z} \Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}(z+1+\ell)) \Gamma(\frac{1}{2}(z+1-\ell))} \end{array} \right.$$

とし \mathcal{Z} 、

$$c(\lambda, \ell) = c_1(x+y) c_1(y-x) c_2(x, \ell) c_2(y, \ell)$$

と書ける。

• Harish-Chandra 変換

$$\mathcal{D}_\ell(G) := \{ f \in C^\infty(G) : f(k_1 g k_2) = \tau_\ell(k_1 k_2)^{-1} f(g), k_1, k_2 \in K, g \in G \\ f \text{ is modulo } Z(G) \text{ "compact support"} \}$$

とおく. $f \in \mathcal{D}_\ell(G)$ に対し

$$f_\ell^\wedge(\lambda) := \int_{G/Z(G)} f(g) \phi_{-\lambda, -\ell}(g) dg \\ (dg: \text{適当に normalize した Haar measure})$$

と定める。

問題 $f \mapsto f_\ell^\wedge(\lambda)$ の逆変換を具体的に求めよ。

以下、この問題を考察する。

$c(\lambda, \ell)$ を具体的に書いてみると

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \exists \eta \in -\mathcal{C}(\mathcal{O}_+^*) \text{ s.t. } c(-\lambda, \ell)^{-1} \text{ が } \operatorname{Re} \lambda \in \eta - \mathcal{C}(\mathcal{O}_+^*) \text{ の pole を持} \\ \text{たない。} \end{array} \right.$$

が分かる。例えば、Ex.1 では $\eta < -|\operatorname{Re} \ell| + 1$ とすればよい。

Lemma 一般に $|\operatorname{Re} \ell|$ が十分小さければ $\eta = 0$ としてよい。

... (*)

Theorem A. (Inversion formula, 1st form)

$$f(a) = \int_{\sqrt{1} \mathcal{O}_+^* + \eta} f_\ell^\wedge(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) c(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda \quad (a \in A^+)$$

右辺は (*) を満たす η の取り方に依らぬ。

Remark (*) が成り立つ場合、 $\sqrt{1} \mathcal{O}_+^*$ が Weyl 群不変だから、変数変換と Harish-Chandra 展開により、上の式は

$$f(a) = \frac{1}{\tau \Gamma} \int_{\sqrt{1} \mathcal{O}_+^*} f_\ell^\wedge(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda$$

となつて定義域を G 上にのぼせる。

Th. A の証明の方針

- 1) $l \in \mathbb{R}$, $|l|$ が十分小的时候は、 $l=0$ の時の Rosenberg の証明 ([1]) が一般化できる。
- 2) l : 一般の場合は、statement の右辺が l に holomorphic に depend することを示して、解析接続する。

§ 3. Inversion formula (2nd form)

以下、 $l \in \mathbb{R}$ とする。Th. A の積分路を $\gamma + \sqrt{l}\sigma^*$ から $\sqrt{l}\sigma^*$ に移動して、留数を計算し、それらを $\phi_{\lambda, l}$ を用いて表す。積分路の移動の際に必要な、被積分函数の無限遠 ($\text{Im } \lambda$ に関し?) の近傍での評価は出来るが、ここでは省略する。以下では、Ex. 1 ($\mathcal{G} = \mathcal{A}(2, \mathbb{R})$)、Ex. 2 ($\mathcal{G} = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$) の場合を説明するが、その議論は、一般の場合にも通用する。

Ex. 1 の場合

§ 2 で書いた $c(\lambda, l)$ の形から、 $c(\lambda, l)^{-1}$ の $\text{Re } \lambda \leq 0$ における poles の集合は、

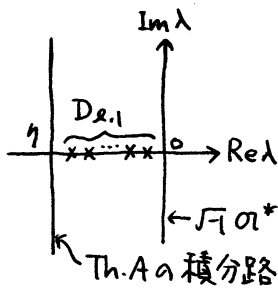
$$D_{\lambda, l} := \{ \lambda = -|l| + 1 + 2j : j \in \mathbb{N}, \lambda < 0 \} \quad \text{但し、} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

となることが分かる。特に、 $|l| \leq 1$ ならば、 $c(\lambda, l)^{-1}$ は $\text{Re } \lambda \leq 0$ において regular。

Theorem B (Ex. 1 の場合)

$$f(q) = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(q) |c(\lambda, \ell)|^{-2} d\lambda \\ + \sum_{x \in D_{\ell, 1}} (-2\pi\sqrt{-1}) \hat{f}_\ell(x) \Phi_{x, \ell}(q) \operatorname{Res}_{\lambda=x} [c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1}], \\ (q \in G)$$

proof) $\sigma_\ell^* \simeq \mathbb{C}$ と同視する。



$\hat{f}_\ell(\lambda)$ は λ について holomorphic, $\Phi_{\lambda, \ell}$ は $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ で regular τ_ℓ の \mathbb{Z} . Th.A の被積分関数 $\hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell} c(-\lambda, \ell)^{-1}$ の possible poles の集合は $D_{\ell, 1}$ (高さ -1). \mathbb{Z}

で Th.A の式は次の様になる。

$$f(a) = \int_{\eta + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) c(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda \\ = \int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) c(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda \\ + \sum_{x \in D_{\ell, 1}} (-2\pi\sqrt{-1}) \operatorname{Res}_{\lambda=x} \{ \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) c(-\lambda, \ell)^{-1} \}$$

右辺第 1 項は Th.A の Rem. と同様に $\Phi_{\lambda, \ell}$ で書ける。また、 $\lambda \in \mathbb{Z}$

の時、 A^+ 上 $\Phi_{\lambda, \ell} = c(\lambda, \ell) \Phi_{\lambda, \ell} + c(-\lambda, \ell) \Phi_{-\lambda, \ell}$

であり (Harish-Chandra series), ℓ : generic $\tau_\ell \in D_{\ell, 1} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ で、

$x \in D_{\ell, 1}$ に対し $c(-x, \ell) = 0$ だから、

$$\Phi_{x, \ell} = c(x, \ell) \Phi_{x, \ell}$$

$\Phi_{x, \ell}$ は ℓ について holomorphic だから解析接続によつて、この式は任意の ℓ で成立。これを用いて上の式の右辺第 2 項も $\Phi_{x, \ell}$ で書ける。

$$\begin{aligned} \therefore f(a) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{F}_R} \hat{f}_\ell(\lambda) \phi_{\lambda, \ell}(a) |c(\lambda, \ell)|^{-2} d\lambda \\ &\quad + \sum_{\lambda \in D_{\ell, 1}} (-2\pi\sqrt{-1}) \hat{f}_\ell(x) \phi_{x, \ell}(a) \operatorname{Res}_{\lambda=x} \{c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1}\} \\ &\quad (a \in A^+) \end{aligned}$$

$G = K\bar{A}^+K$ により、 G 上にはのぼせり。■

Theorem C (Ex. 1 の場合)

$$|\phi_{\lambda, \ell}| \in L^2(G/Z(G)) \Leftrightarrow \lambda \in D_{\ell, 1} \text{ or } -\lambda \in D_{\ell, 1}$$

この時、対応する $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の relative discrete series の lowest K -type は $(|\lambda| - 1) \operatorname{sgn} \ell$ 。

Ex. 2 の場合

$$D_{\ell, 2} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + |\ell| - 1 \in 2\mathbb{N}, \beta - \alpha - 1 \in 2\mathbb{N}, \beta < 0\} \quad \text{とおく。}$$

Theorem B (Ex. 2 の場合)

$$\begin{aligned} f(g) &= \frac{1}{8} \int_{\mathbb{F}_R} \hat{f}_\ell(\lambda) \phi_{\lambda, \ell}(g) |c(\lambda, \ell)|^{-2} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x \in D_{\ell, 1}} (-2\pi\sqrt{-1}) \operatorname{Res}_{z=x} \{C_2(z, \ell)^{-1} C_2(-z, \ell)^{-1}\} \\ &\quad \quad \times \int_{\mathbb{F}_R} \hat{f}_\ell(\lambda) \phi_{\lambda, \ell}(g) |c_1(x+y) c_1(y-x) c_2(y, \ell)|^{-2} dy \\ &\quad + \sum_{(\alpha, \beta) \in D_{\ell, 2}} (-2\pi\sqrt{-1})^2 \operatorname{Res}_y \operatorname{Res}_x \{c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1}\} \hat{f}_\ell(\lambda) \phi_{\lambda, \ell}(g) \\ &\quad (g \in G) \end{aligned}$$

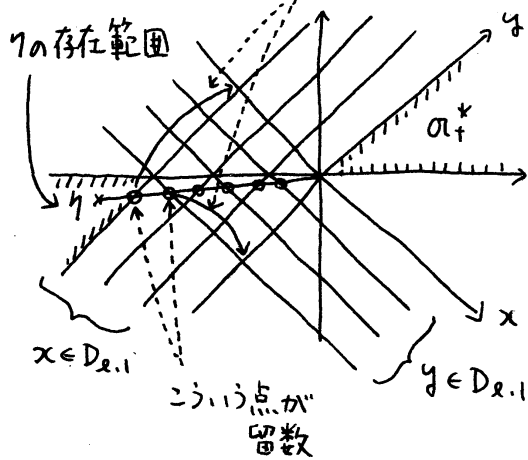
Theorem C (Ex. 2 の場合)

$$|\phi_{\lambda, \ell}| \in L^2(G/Z(G)) \Leftrightarrow \exists \mu \in W \cdot \lambda \text{ s.t. } \mu \in D_{\ell, 2}$$

対応する relative discrete series は holomorphic d.s.

(lowest K -type は 1次元 とは限らなない)

proof of Th. B) 留数の計算において、更に積分路を移動する(ここでも留数が出る)



← $\lambda = (x, y)$ の実での切り口。

η を $x=y$ という hyperplane の十分近くとると、留数定理より、

$$\begin{aligned} & \int_{\eta + \sqrt{-1}\sigma_f^*} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) C(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda \\ & - \int_{\sqrt{-1}\sigma_f^*} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) C(-\lambda, \ell)^{-1} d\lambda \\ & = (-2\pi\sqrt{-1}) \sum_{z \in D_{2,1}} \left\{ \int_{(z, z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \text{Res}_{x=z} (\hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) C(-\lambda, \ell)^{-1}) d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \int_{(z+z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \text{Res}_{y=z} (\hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}(a) C(-\lambda, \ell)^{-1}) d\lambda \right\} \dots (1) \end{aligned}$$

右辺の2番目の積分は、変数変換により

$$\int_{(z, z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \text{Res}_{x=z} (\hat{f}_\ell(\bar{\lambda}) \Phi_{\bar{\lambda}, \ell}(a) C(-\bar{\lambda}, \ell)^{-1}) d\lambda$$

となす(但し、 $\lambda = (x, y)$ に対して $\bar{\lambda} = (y, x)$)。この式と、 \hat{f}_ℓ の

W-invariance、 $\bar{\lambda} \in W \cdot \lambda$ を用いて、(1)の右辺の Σ の中身は

$$\int_{(z, z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \text{Res}_{x=z} \hat{f}_\ell(\lambda) \{ \Phi_{\lambda, \ell}(a) C(-\lambda, \ell)^{-1} + \Phi_{\bar{\lambda}, \ell}(a) C(-\bar{\lambda}, \ell)^{-1} \} d\lambda \dots (2)$$

となす。ここぞ、 $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ とおいて、

$$\Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}(a) := C_1(y-x) \Phi_{\lambda, \ell}(a) + C_1(x-y) \Phi_{\bar{\lambda}, \ell}(a)$$

とおく。これは、 $\text{Re } x \leq 0, \text{Re } y \leq 0$ での pole をとった感じ。また、

$x+y, x, y \notin \mathbb{Z}$ の時、 $c^{(\alpha_1)}(\lambda) := C(\lambda, \ell) C_1(y-x)^{-1}$ とおくと

$$\Phi_{\lambda, \ell} = \sum_{\bar{w} \in (1, S_{\alpha_1}) \setminus W} C^{(\alpha_1)}(w\lambda) \Phi_{w\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}$$

と展開される (Harish-Chandra 展開)。

$$C(\lambda, \ell) = C_1(y-x) C_1(y+x) C_2(x, \ell) C_2(y, \ell) \quad \Gamma \rightarrow \Gamma \text{ の } \mathbb{Z}^n, (2) \text{ は}$$

$$\int_{(z, z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname{Res}_{\lambda=z} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}(a) C_1(y-x)^{-1} C(-\lambda, \ell)^{-1} dy \quad \dots (3)$$

となる。この積分の積分路を $0 \geq \operatorname{Re} y \geq \operatorname{Re} x$ 内 $\mathbb{Z}^n, (z, z) + \sqrt{-1}\mathbb{R}$

(正確には、 $(z, z) + \{0\} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}$) から、 $(z, 0) + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ に動かす。

$\hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}(a)$ は $\operatorname{Re} x \leq 0, \operatorname{Re} y \leq 0$ で holomorphic であり、

$\operatorname{Res}_{\lambda=z} C_1(y-x)^{-1} C(-\lambda, \ell)^{-1}$ の $\operatorname{Re} y \geq z$ における poles は $(z, y) \in D_{\ell, 2}$

となる y 。したがって、留数定理により、(3) は

$$\int_{(z, 0) + \sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname{Res}_{\lambda=z} \hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}(a) C_1(y-x)^{-1} C(-\lambda, \ell)^{-1} dy$$

$$+ \sum_{(z, w) \in D_{\ell, 2}} (-2\pi\sqrt{-1}) \operatorname{Res}_{y=w} \operatorname{Res}_{\lambda=z} (\hat{f}_\ell(\lambda) \Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}(a) C_1(y-x)^{-1} C(-\lambda, \ell)^{-1})$$

となるが、これは $\Phi_{\lambda, \ell}^{(\alpha_1)}$ による展開を使うと、Ex. 1 の場

合と同様の議論 (ℓ に関する解析接続と変数変換) により、

$\Phi_{\lambda, \ell}$ で表せる。■

References

1. S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.

2. N. Shimeno, Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 37 (1990) 201-234

3. ———, The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K -type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type, preprint