

\$SU(2, 2)\$ における旗多様体上の \$K_{\mathbb{C}}\$-orbit と Bruhat cell との共通部分について

落合 啓之 (立教大学・理学部)

(注) 以下の原稿は共同研究の集会においては講演されなかったが、落合啓之氏のご厚意により読者の便宜のために掲載するものである。落合啓之氏にこの場を借りて感謝する(西山享)。

本文では集会の記録ということで \$Sp(2, \mathbb{R})\$ の場合を扱っている。\$SU(2, 2)\$ の場合も同様の、しかしより面倒な計算が実行できる。例えば

	flag の次元	Schubert cell の個数	\$K_{\mathbb{C}}\$-orbit の個数
\$Sp(2, \mathbb{R})\$	4	8	11
\$SU(2, 2)\$	6	24	21

である。今度は Cartan 部分群の共役類は 3 つで、つまり orbit の交わりを記述する表は \$24 \times 21\$ のます目を持つものが 3 枚ある。

1 記号の定義

まず群 \$G = SU(2, 2)\$ に関する基本的な記号を用意することにしよう。以下では通常よく用いられている記号を使うことにして紙面と時間の節約のためとくに説明は加えない。

$$\mathfrak{g} = M(4, \mathbb{C}) \quad G_{\mathbb{C}} = GL(4, \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t\bar{B} & D \end{bmatrix} \in M(4, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = -A \in \mathfrak{u}(2), {}^t\bar{D} = -D \in \mathfrak{u}(2), B \in M(2, \mathbb{C}) \right\}$$

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \in M(4, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = -A \in \mathfrak{u}(2), {}^t\bar{D} = -D \in \mathfrak{u}(2) \right\} = \mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(2)$$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \in U(4) \mid A, D \in U(2) \right\}$$

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{C}) \mid A, D \in GL(2, \mathbb{C}) \right\}$$

$$\vartheta(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (X \in \mathfrak{g}) : \text{Cartan involution,}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & & e^{i\theta_4} \end{bmatrix} \in U(4) \right\} \subset K : \text{Compact Cartan subgroup}$$

$$\mathfrak{t}_0 = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} \sqrt{-1}\theta_1 & & & \\ & \sqrt{-1}\theta_2 & & \\ & & \sqrt{-1}\theta_3 & \\ & & & \sqrt{-1}\theta_4 \end{array} \right] \mid \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{正ルート空間の和} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ & 0 & * & * \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\varepsilon_i : \mathfrak{t} \ni \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & x_3 & \\ & & & x_4 \end{bmatrix} \mapsto x_i \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in \mathfrak{t}^* \quad (1 \leq i \leq 3)$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$: a set of simple roots

$\{\alpha_1, \alpha_3\}$: compact positive roots

$\{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$: non-compact positive roots

Cayley 変換

$$c_{01} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/\sqrt{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, c_{02} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & & -1/\sqrt{2} & \\ & 1/\sqrt{2} & & -1/\sqrt{2} \\ & & 1/\sqrt{2} & \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$c_{01} : \mathfrak{t} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^1, \quad c_{02} : \mathfrak{t} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^2$$

Cartan 部分群 T, H^1, H^2 ([K, p.130])

$$\mathfrak{h}_0^1 = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & & \\ & \sqrt{-1}\theta_2 & & s \\ & & \sqrt{-1}\theta_3 & \\ & s & & \sqrt{-1}\theta_2 \end{bmatrix} \middle| \theta_i, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{h}_0^2 = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\theta_1 & & & s \\ & \sqrt{-1}\theta_2 & & t \\ & s & & \sqrt{-1}\theta_1 \\ & & t & \sqrt{-1}\theta_2 \end{bmatrix} \middle| \theta_i, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

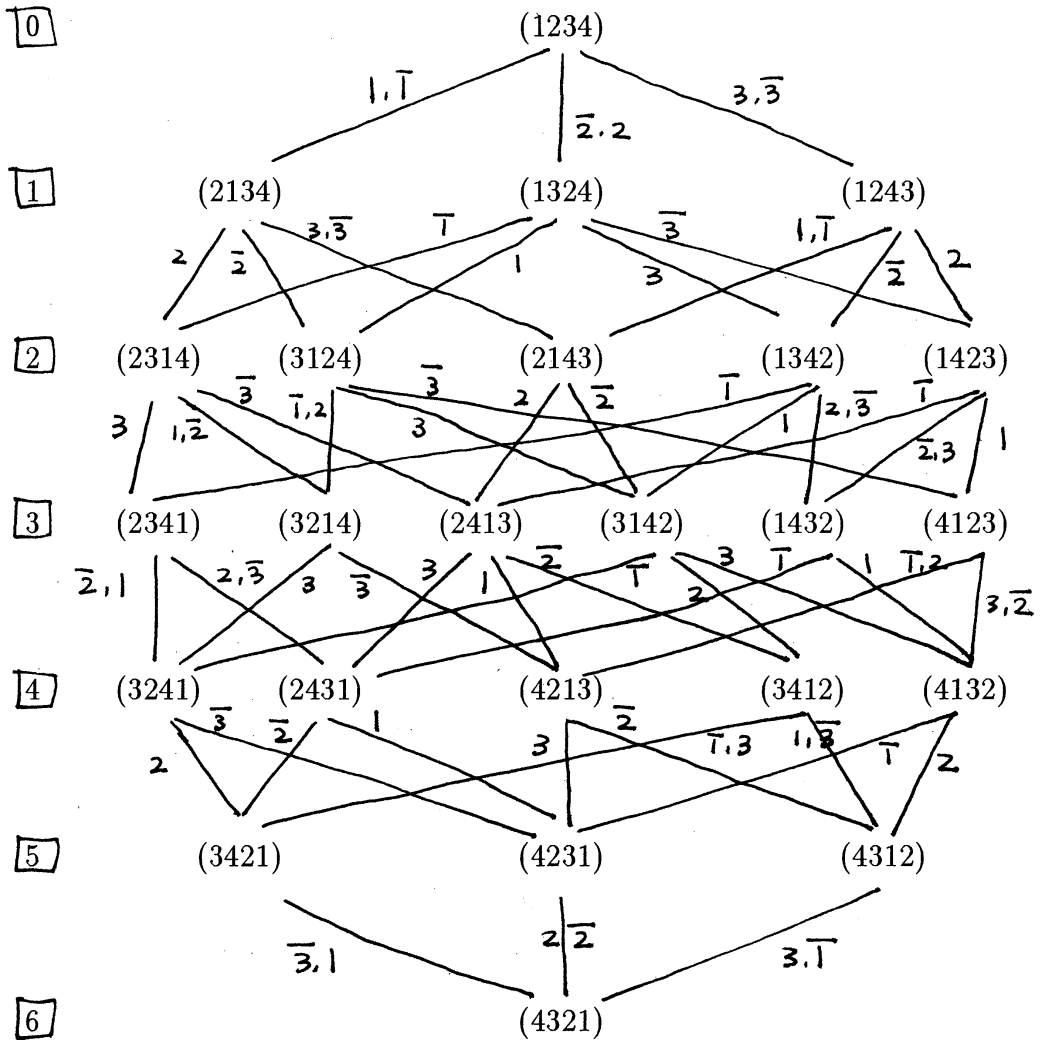
$$\mathfrak{t}_0 \text{ に対する Borel : } B = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix} \right\}$$

 $X = \{\mathbf{V}\}$: flag variety (16 - 10 = 6 次元) $\mathbf{V} = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq V_3 \subsetneq V_4 = \mathbb{C}^4\}$: a flag $\mathbf{V}^{(0)} = \{0 \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subsetneq \mathbb{C}^4\}$: X の base point $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$: standard basis of \mathbb{C}^4

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{C}}/B & \xrightarrow{\sim} & X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & g\mathbf{V}^{(0)} \end{array}$$

2 Bruhat order と Bruhat cell

Weyl 群 $W = \mathfrak{S}_4$ の weak left (or right) Bruhat order は次のようになっている。



ここで $i|$ は i 番目と $i+1$ 番目の数字の入れ替え、 $\bar{i}|$ は i と $i+1$ の入れ替えを示す。

次に Weyl 群の元 $w \in \mathfrak{S}_4$ の Bruhat cell BwB/B の実現を書いておく。

■ Bruhat cell の一覧

$$(1234) \quad \begin{cases} V_1 = \langle e_1 \rangle = V_1^0 \\ V_2 = \langle e_1, e_2 \rangle = V_2^0 \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = V_3^0 \end{cases}$$

$$(2134) \quad \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = V_2^0 \\ V_3 = V_3^0 \end{cases}$$

$$(1324) \quad \begin{cases} V_1 = V_1^0 \\ V_2 = \langle e_3 + \lambda e_2, e_1 \rangle \\ V_3 = V_3^0 \end{cases}$$

$$(1243) \quad \begin{cases} V_1 = V_1^0 \\ V_2 = V_2^0 \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \lambda e_3 \rangle \end{cases}$$

$$(2314) \quad \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = \langle e_3 + \mu e_1, e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_3 = V_3^0 \end{cases}$$

$$(3124) \quad \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_1, e_3 + \mu e_2 \rangle \\ V_3 = V_3^0 \end{cases}$$

$$(2143) \quad \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = V_2^0 \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \mu e_3 \rangle \end{cases}$$

$$(1342) \quad \begin{cases} V_1 = V_1^0 \\ V_2 = \langle e_3 + \lambda e_2, e_1 \rangle \\ V_3 = \langle e_4 + \mu e_2, e_3 + \lambda e_2, e_1 \rangle \end{cases}$$

$$(1423) \quad \begin{cases} V_1 = V_1^0 \\ V_2 = \langle e_1, e_4 + \lambda e_2 + \mu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \mu e_3 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(2341) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = \langle e_3 + \mu e_1, e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_3 = \langle e_4 + \nu e_1, e_3 + \mu e_1, e_2 + \lambda e_1 \rangle \end{cases} \\
(3214) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_2 + \nu e_1, e_3 + (\lambda - \mu\nu)e_1 \rangle \\ V_3 = V_3^0 \end{cases} \\
(2413) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = \langle e_4 + \mu e_1 + \nu e_3, e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \nu e_3 \rangle \end{cases} \\
(3142) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_1, e_3 + \mu e_2 \rangle \\ V_3 = \langle e_4 + \nu e_2, e_1, e_3 + \mu e_2 \rangle \end{cases} \\
(1432) \quad & \begin{cases} V_1 = V_1^0 \\ V_2 = \langle e_1, e_4 + \lambda e_2 + \mu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_3 + \nu e_2, e_4 + (\lambda - \mu\nu)e_2 \rangle \end{cases} \\
(4123) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_1, e_4 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \nu e_3 \rangle \end{cases} \\
(3241) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_2 + \nu e_1, e_3 + (\lambda - \mu\nu)e_1 \rangle \\ V_3 = \langle e_4 + \tau e_1, e_2 + \nu e_1, e_3 + (\lambda - \mu\nu)e_1 \rangle \end{cases} \\
(2431) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_2 = \langle e_4 + \mu e_1 + \nu e_3, e_2 + \lambda e_1 \rangle \\ V_3 = \langle e_3 + \tau e_1, e_2 + \lambda e_1, e_4 + (\mu - \nu\tau)e_1 \rangle \end{cases} \\
(4213) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_2 + \tau e_1, e_4 + (\lambda - \mu\tau)e_1 + \nu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_2, e_4 + \nu e_3 \rangle \end{cases} \\
(3412) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_4 + \nu e_1 + \tau e_2, e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_4 + \tau e_2, e_3 + \mu e_2 \rangle \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4132) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_1, e_4 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_3 + \tau e_2, e_4 + (\mu - \nu \tau) e_2 \rangle \end{cases} \\
(3421) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_2 = \langle e_4 + \nu e_1 + \tau e_2, e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle \\ V_3 = \langle e_2 + \sigma e_1, e_4 + (\nu - \sigma \tau) e_1, e_3 + (\lambda - \sigma \mu) e_1 \rangle \end{cases} \\
(4231) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_2 + \tau e_1, e_4 + (\lambda - \mu \tau) e_1 + \nu e_3 \rangle \\ V_3 = \langle e_3 + \sigma e_1, e_2 + \tau e_1, e_4 + (\lambda - \mu \tau - \sigma \nu) e_1 \rangle \end{cases} \\
(4312) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_3 + \tau e_1 + \sigma e_2, e_4 + (\lambda - \nu \tau) e_1 + (\mu - \nu \sigma) e_2 \rangle \\ V_3 = \langle e_1, e_3 + \sigma e_2, e_4 + (\mu - \nu \sigma) e_2 \rangle \end{cases} \\
(4321) \quad & \begin{cases} V_1 = \langle e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \rangle \\ V_2 = \langle e_3 + \tau e_1 + \sigma e_2, e_4 + (\lambda - \nu \tau) e_1 + (\mu - \nu \sigma) e_2 \rangle \\ V_3 = \langle e_2 + \rho e_1, e_3 + (\tau - \sigma \rho) e_1, e_4 + (\lambda - \nu \tau - \rho \mu + \rho \nu \sigma) e_1 \rangle \end{cases}
\end{aligned}$$

3 $K_{\mathbb{C}}$ -orbit

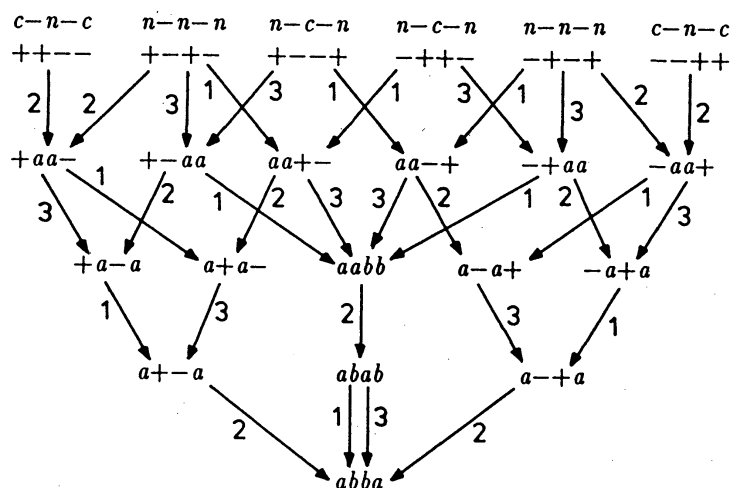
$K_{\mathbb{C}}$ -orbit については大島-松木 [MO] を参照されたい。ここでは各 orbit の特定を次のようにしておこう。 $V = V_+ \oplus V_-$, $V_+ = \langle e_1, e_2 \rangle, V_- = \langle e_3, e_4 \rangle$ と書いておこう。次にある orbit に属する flag $(V_i)_{1 \leq i \leq 4}$ をとり、 $V_i \cap V_{\pm}$ の次元を与えればこれが orbit の invariants になる。以下 9 ページの表にその次元を記す。

このようにして与えた次元では $K_{\mathbb{C}}$ -orbits $abab$ と $abba$ は区別できないが、この二つの orbits は

$$(V_3 \cap V_+) + (V_3 \cap V_-) \supset V_1$$

の成否で区別できる。実際上の条件が成り立たない元をつくる X の部分集合は 3 つの $K_{\mathbb{C}}$ -orbits $a+-a, a-+a, abba$ からなっている。

また下図は orbit の閉包関係を表わす。図は [MO, Fig.7] より引用した。




AIII $\mathfrak{g}^j = \mathfrak{su}(2, 2)$ $GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C}) \backslash GL(4, \mathbb{C}) / B$ 

Fig. 7

$K_{\mathbb{C}}$ -orbit	$V_1 \cap V_+$	$V_1 \cap V_-$	和	$V_2 \cap V_+$	$V_2 \cap V_-$	和	$V_3 \cap V_+$	$V_3 \cap V_-$	和
$++--$	1	0	1	2	0	2	2	1	3
$+--+$	1	0	1	1	1	2	2	1	3
$+-++$	1	0	1	1	1	2	1	2	3
$-++-$	0	1	1	1	1	2	2	1	3
$-+-+$	0	1	1	1	1	2	1	2	3
$--++$	0	1	1	0	2	2	1	2	3
$+aa-$	1	0	1	1	0	1	2	1	3
$+ -aa$	1	0	1	1	1	2	1	1	2
$aa+-$	0	0	0	1	1	2	2	1	3
$aa-+$	0	0	0	1	1	2	1	2	3
$-+aa$	0	1	1	1	1	2	1	1	2
$-aa+$	0	1	1	0	1	1	1	2	3
$+a-a$	1	0	1	1	0	1	1	1	2
$a+a-$	0	0	0	1	0	1	2	1	3
$aabb$	0	0	0	1	1	2	1	1	2
$a-a+$	0	0	0	0	1	1	1	2	3
$-a+a$	0	1	1	0	1	1	1	1	2
$a+-a$	0	0	0	1	0	1	1	1	2
$abab$	0	0	0	0	0	0	1	1	2
$a-+a$	0	0	0	0	1	1	1	1	2
$abba$	0	0	0	0	0	0	1	1	2

4 $K_{\mathbb{C}}$ -orbit と Bruhat cell との共通部分

4.1 表の見方

■ 横軸に B -orbit、縦軸に $K_{\mathbb{C}}$ -orbit をとっている。

B -orbit は対応する Bruhat 分解における Weyl 群の元を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ と書いたときの $i_1 i_2 i_3 i_4$ で表している (§2 参照)。

$K_{\mathbb{C}}$ -orbit は松木-大島による clan の表示方法 ([MO]) を用いて表している (§3 参照)。

■ 2重線 (あるいは太線) は段の切れ目を表わす。

つまりブロックを一つ右にいくと対応する B -orbit の次元が一つあがる。

あるいはブロックを一つ下にいくと対応する $K_{\mathbb{C}}$ -orbit の次元が一つあがる。

最右、最下の 4321、および *abba* はそれぞれ open dense orbit で次元は 6 (余次元 0)。

closed (コンパクト) B -orbit は 1234 一つで 0 次元 (余次元 6)。

closed (コンパクト) $K_{\mathbb{C}}$ -orbit は + と - のみからなる 6 つで、2 次元 (余次元 4)。

■ 交わり (表の各箱の中) には対応する B -orbit と $K_{\mathbb{C}}$ -orbit の交わりが書いてある。(あるいはその集合の有限体 \mathbb{F}_q 上のモデルの点の個数が q の多項式として書いてある)。目的の Euler 標数を得るには $q = 1$ とすればよい。

空欄は空集合を意味する。

■ 縦に「加える」と $\mathbb{C}^{\ell(w)}$ 、横に加えると別表のようになるはずである。この事を検算に用いた。(計算に用いても論理的には正しいが計算間違いが次々感染していく可能性が大きい。)

■ 表の目次

* 表 1 compact Cartan 部分群 T

* 表 2 "中間の" Cartan 部分群 H^1

* 表 3 "中間の" Cartan 部分群 H^1 で \mathbb{F}_q 上の元の個数。ここで $Q = q^3 - 2q^2 + q - 1$
あるいは

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_q^3 \mid z \neq 0, z \neq xy - 1\}$$

* 表4 極大 split Cartan 部分群 H^2 。ここでも Q は上のもの。他にも簡単に表しづらい集合は、 F_q 上の元の個数で代用している。

4.2 表1

記号は上のおりとする。Weyl 群のコンパクト Weyl 群による左剰余類 $W_K \backslash W$ の代表元を各剰余類中長さ最小のものにとる。

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \backslash \mathfrak{S}_4 \ni w_1, w_2, \dots, w_6, \quad \tilde{X}_{w_i} = \coprod_{y \in W_K} X_{yw_i} = \coprod_{y \in W_K} Byw_iB = Pw_iB$$

とする。任意の B -orbit X_w に対してそれを含む P -orbit PX_w を再び B -orbit に分けると「最小」のものが一意に存在する。それが $W_K w$ 中の長さ最小の元 w_i に対応する X_{w_i} である。ここで P は $K_{\mathbb{C}}$ と B から生成される parabolic subgroup である。

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A & B \\ 0 & D \end{array} \right] \mid A, B, D \in M(2, \mathbb{C}) \right\}.$$

$K_{\mathbb{C}}$ -orbit でも同じことが期待できて与えられた $K_{\mathbb{C}}$ -orbit S に対して、それを含む P -orbit PS を再び $K_{\mathbb{C}}$ -orbit に分けると「最小」のもの \tilde{S} が一意に存在する。 S に対応する clan から \tilde{S} に対応する clan を求める方法は次のとおり。

「clan 中のペア (aa や bb) の左側を $-$ 、右側を $+$ におきかえる。」

(例) $a+a- \Rightarrow -++-$

両者の対応は「 B -orbit X_w と $K_{\mathbb{C}}$ -orbit S が同じ P -orbit に入る」 \Leftrightarrow 「最小化したもの同士が同じ P -orbit に入る」 \Leftrightarrow 「最小化した clan の $+$ に 1 から p 、 $-$ に $p+1$ から $p+q$ を左から順に入れたものが最小化した w の元になっている」

4.3 表2

4.4 表3

4.5 表4

○をつけたものは松木-大島の埋めこみ $S(E)$ に対応する。特に pt に○のついているものは $S_0(E)$: leading な埋めこみに対応している。これは与えられた $K_{\mathbb{C}}$ -orbit に

対応する Harish-Chandra 加群の主系列への埋め込みが存在するための十分条件ということが知られている ([MO])。

なおこの表では 1234 の一点が open orbit $abba$ に入るようにとってある (共役な Cartan 部分群でも別の位置に置くと表は見づらくなる)。

また

$$(\text{交わりの余次元}) = (B\text{-orbit の余次元}) + (K_{\mathbb{C}}\text{-orbit の余次元}) - (\text{flag の次元})$$

が成り立つ。これは 2 種の orbit が transverse に交わることから従う。

References.

- [MO] T. Matsuki and T. Oshima. Embeddings of discrete series into principal series. in *The Orbit Method in Representation Theory* (ed. M. Duflo et. al.), pp.147–175, Birkhäuser, 1990.
- [K] A.W. Knap. *Representation theory of semisimple groups - An overview based on examples*. Princeton Univ. Press, 1986.

