数理解析研究所講究録
第829巻1993年117-121

個人間効用比較の問題をめぐって

慶應義塾大学 経済学部 川又邦雄(Kunio Kawamata)

経済学ではそれぞれ異なった目的をもって行動する個人の間の利害調整に関して、さまざまな「解決法」が考えられてきた。以下では2人の個人の効用を u^1, u^2 とするとき、次のような3つの解について考察する。

(I) Bentham = Harsanyi解

$$W^B = u^1 + u^2$$

を最大にする。

(II) Nash解

$$W^N = u^1 \cdot u^2$$

を最大にする。

(III) Rawls解

$$W^R = \min(u^1, u^2)$$

を最大にする。

それぞれの場合について、u^i ($i=1, 2$) は個人の消費 $x_i \in R$ と所得 $y_i \in R$ の関数として

$$u^i = v(x_i) - c_i(y_i) \qquad (i=1, 2)$$

のように示され、

$$\text{(A1)} \quad \text{(I)} \quad v' > 0, \quad v'' < 0 \qquad v(0) = 0$$

$$\text{(II)} \quad c_i' > 0, \quad c_i'' > 0 \qquad c_i(0) = 0$$

$$\text{(III)} \quad c_1'(y) < c_2'(y) \qquad \text{all} \quad y > 0$$

を満たすものとする。ここで $v(x_i)$ は個人 i が消費 x_i から得る効用を、$c_i(y_i)$ は彼が所得 y_i を得るための不効用を意味する。(A1)(III)の条件は個人1の方がより有能な個人であることを意味している。y_i と x_i の差は税金であって、それを T_i ($i=1, 2$) とおくとき、

$$T_1 + T_2 = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = 0$$

を満たすことを仮定する。

いくつかの前提の下で、上の3つの基準について、次のような問題に解答を与える。

1. u^1 と u^2 はどちらが大きいか。

2. 消費量、生産量および課税額は3つの基準によってどう異なってくるか。

3. 個人1は自分が低い能力の持ち主であると偽ることによって、利益をうることができるであろうか。

ここで$\varepsilon_i(y_i)=y_i c'_i(y_i)/c_i(y_i)$と定義し、

(A2)　$\varepsilon^1(y^1)<\varepsilon^2(y^2)$　for all　$y^1 \geq y^2 > 0$

を仮定する。このとき次の命題を確立することができる。

<u>命題I</u>

仮定(A1)(A2)の下で、有能な個人に対する課税額T_iはBentham = Harsanyi解の場合が最大で、つぎにNash解が続き、Rawls解の場合が最小となる。同様な順序が有能な個人の消費額および生産額にも妥当する。

以上のような命題を証明するための一つの便利な方法として、パラメターの変化が条件付最大化問題の最適解に及ぼす効果についての情報を与えるTopkisの定理の適用がある。

Topkisの定理についての説明

<u>定義</u>

擬順序(反射律、反対称律、推移律を満たす関係)≦が定義されている集合をSとする。いまSに属する2つの元x,

yについて、$x \leqq y$かつ$x \neq y$であるとき$x < y$と記す。また$x \vee y$でxとyの上限を、$x \wedge y$でxとyの下限を記す。

つぎに「$x, y \in S$ならば、$x \wedge y \in S$かつ$x \vee y \in S$となる」とき、Sは束（lattice）であるといい、$T \subset S$が$\vee$および$\wedge$の演算について閉じているとき、TはSの部分束（sublattice）であるという。

つぎに束Sの上で定義された実数値関数が優モジュラ（supermodular）であるとは、すべての$x, y \in S$について

$$f(x \wedge y) + f(x \vee y) \geqq f(x) + f(y)$$

を満たすことをいう。$x \geqq y$でも$y \geqq x$でもないとき上の不等号が強い不等号$>$で置き換えられるなら、fは強義の優モジュラであるという。また$-f$が優モジュラ関数であるとき、fは劣モジュラ（submodular）であるという。強義の劣モジュラ関数の定義も同様になされる。

つぎに$S, S' \subset R^n$とするとき、すべての$x \in S$と$x' \in S'$について$x \vee x' \in S$, $x \wedge x' \in S'$となるとき、SはS'より高いといい、$S \geq S'$と記す。

<u>命題1</u>

$f, g : R^n \to R$が優モジュラ関数であるとすれば、$f + g$は優モジュラ関数となる。またfとgが非負で非減少関数な

らf, gは優モジュラ関数となる。

命題2

R^nで定義されたなめらかな実数値関数fが優モジュラであるための条件はすべての$i \neq j$について$\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \geq 0$（$f$ヘッセ行列の非対角要素が非負）となることである。

定理

$f : R^{n+k} \to R$が優モジュラで、$T(y)$および$T(y')$がR^kの部分束であるとして

$S(y) = \mathrm{argmax}\{ f(y, t) \mid t \in T(y) \}$

$S'(y) = \mathrm{argmax}\{ f(y, t) \mid t \in T'(y) \}$

と定義する。そのとき$y \geq y'$かつ$T(y) \geq T(y')$ならば$S(y) \geq S'(y)$となる。

参考文献

D. Topkis "Minimizing a Submodular Function on a Lattice," Operations Research March-April 1978, 26. 305-21.