数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 122-133

非凸技術と一般均衡理論

大阪大学社会経済研究所　神谷和也（Kazuya Kamiya）

数理科学の様々な分野で、多くの結果が集合の凸性に依存していることはよく知られている。経済学もこの例外ではなく、多くの重要な結果が凸性に依存している。本稿の目的は、まず経済学において最も基本的なモデルである一般均衡モデルにおいて、生産可能性集合が凸（収穫逓減）の場合に成立する結果を解説し、次に生産可能性集合が凸でない（あるいは収穫逓増）の場合にこれらの結果がどう変わるかをみる。

経済は、ℓ個の財、m 人の消費者、n 人の生産者から構成されるとする。生産者 jは生産可能性集合 $Y_j \subset R^\ell$を持つとする。すなわち、$y_j \in Y_j$なら、ベクトル y_jが企業 jにとって生産可能ということである。たとえば、$\ell = 2$のとき、$(-2,3) \in Y_j$なら企業jは第１財２単位から第２財３単位を生産できることになる。（投入が負の方向に測られていることに注意。）また、消費者iは、効用関数$u_i : R^\ell_+ \to R$、初期保有$\omega_i \in R^\ell_+$、生産者jに対する所有権θ_{ij} $(\Sigma_{i=1}^m \theta_{ij} = 1,\ \theta_{ij} \geq 0)$を持つとする。$Y_j,\ j = 1, ..., m,$ が凸である場合には経済は以下に述べるようにいくつかの望ましい性質を持つが、Y_jが凸でない場合には必ずしもよい性質を持つとは限らない。

生産可能性集合が凸であるということは、収穫逓減、すなわち生産量を増やすと生産の効率性が下がることに対応している。(図１参照) しかし現実には大量生産が効率的である場合のように、生産量が増えれば効率が上がることもあるし (収穫逓増、図２参照)、ある一定量の固定的な投入をしなければ生産ができないこともありうる。(図３参照。) このような場合には生産可能性集合は非凸になる。本稿の目的は収穫逓増、より一般的には生産可能性集合の非凸性を扱うことである。まず二つの基本概念を定義する。

Walras 均衡：以下の条件を満たす価格 $p^* \in R^\ell_+$、消費ベクトル $x_i^* \in R^\ell_+,\ i = 1, ..., m$ 、生産ベクトル $y_j^* \in Y_j,\ j = 1, ..., n,$ の組を Walras 均衡と定義する。

(i) すべての $i = 1, ..., m,$ について、$p \cdot x_i^* \leq p^* \cdot \omega_i + \Sigma_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*,\ u_i(x_i^*) \geq u_i(x_i)$ for all $x_i \in \{z \in R^\ell_+ \mid p^* \cdot z \leq p^* \cdot \omega_i + \Sigma_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^* \}$。

(ii) すべての $j = 1, ..., n,$ について、$p^* \cdot y_j^* \geq p^* \cdot y_j$ for all $y_j \in Y_j$。

(iii) $\Sigma_{i=1}^m x_i^* \leq \Sigma_{j=1}^n y_j^* + \omega$。(ここで$\omega = \Sigma_{i=1}^m \omega_i$。)

Pareto 最適配分：上の (iii) と以下の条件 (iv) を満たす消費ベクトル $x_i^* \in R^\ell_+,\ i = 1, ..., m,$ と生産ベクトル $y_j^* \in Y_j,\ j = 1, ..., n,$ の組を Pareto 最適配分と定義する。

(iv) すべての$\Sigma_{i=1}^m x_i \leq \Sigma_{j=1}^n y_j + \omega_i$を満たす $x_i \in R^\ell_+,\ i = 1, ..., m,\ y_j^* \in Y_j,\ j = 1, ..., n,$ に対し、$u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$ for all i

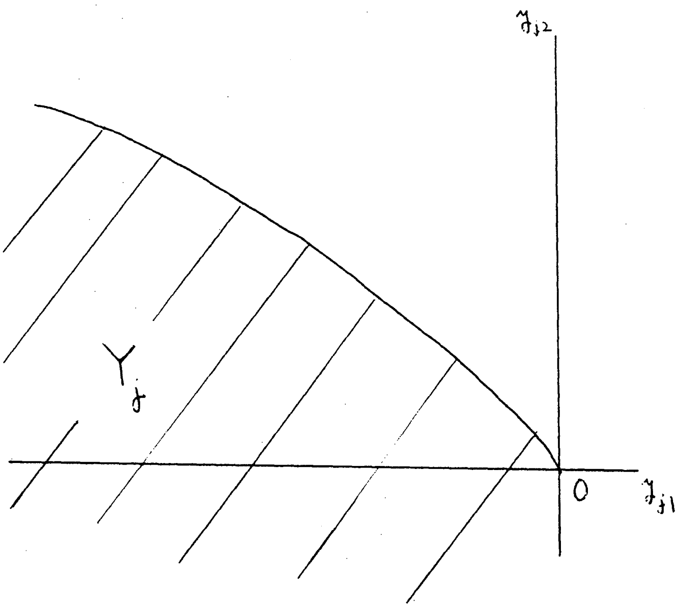


図 1

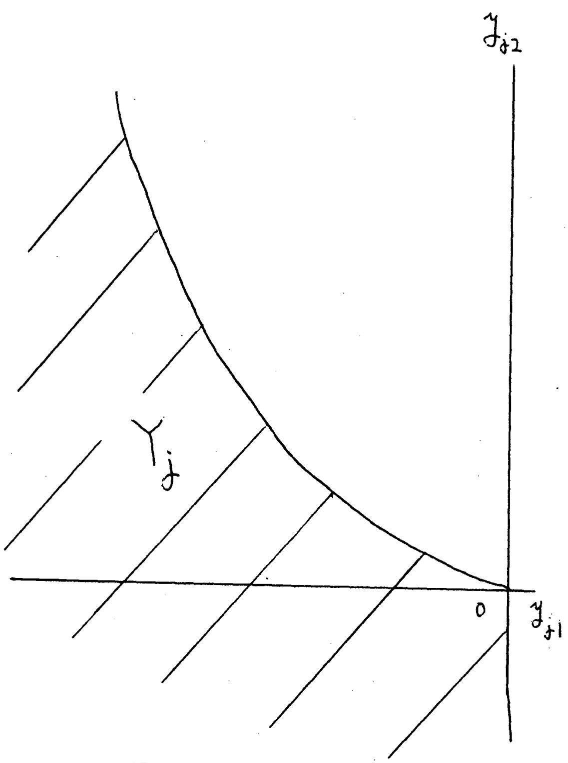


図 2

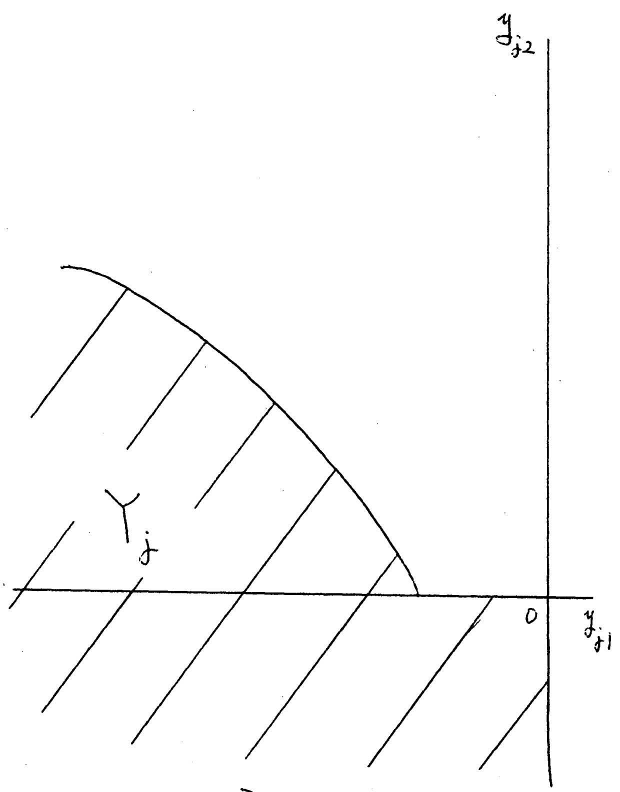


図 3

かつ $u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$ for some i となることはない。

すなわち Walras 均衡とは与えられた価格のもとで、生産者は生産可能性集合上で利潤を最大にし、消費者は所得制約下で効用を最大にし、さらに需要が供給を上まわらない（実行可能）状態である。また Pareto 最適配分とは、消費者全員の効用を下げることなく少なくとも一人の消費者の効用を上げるということが不可能な配分のことである。

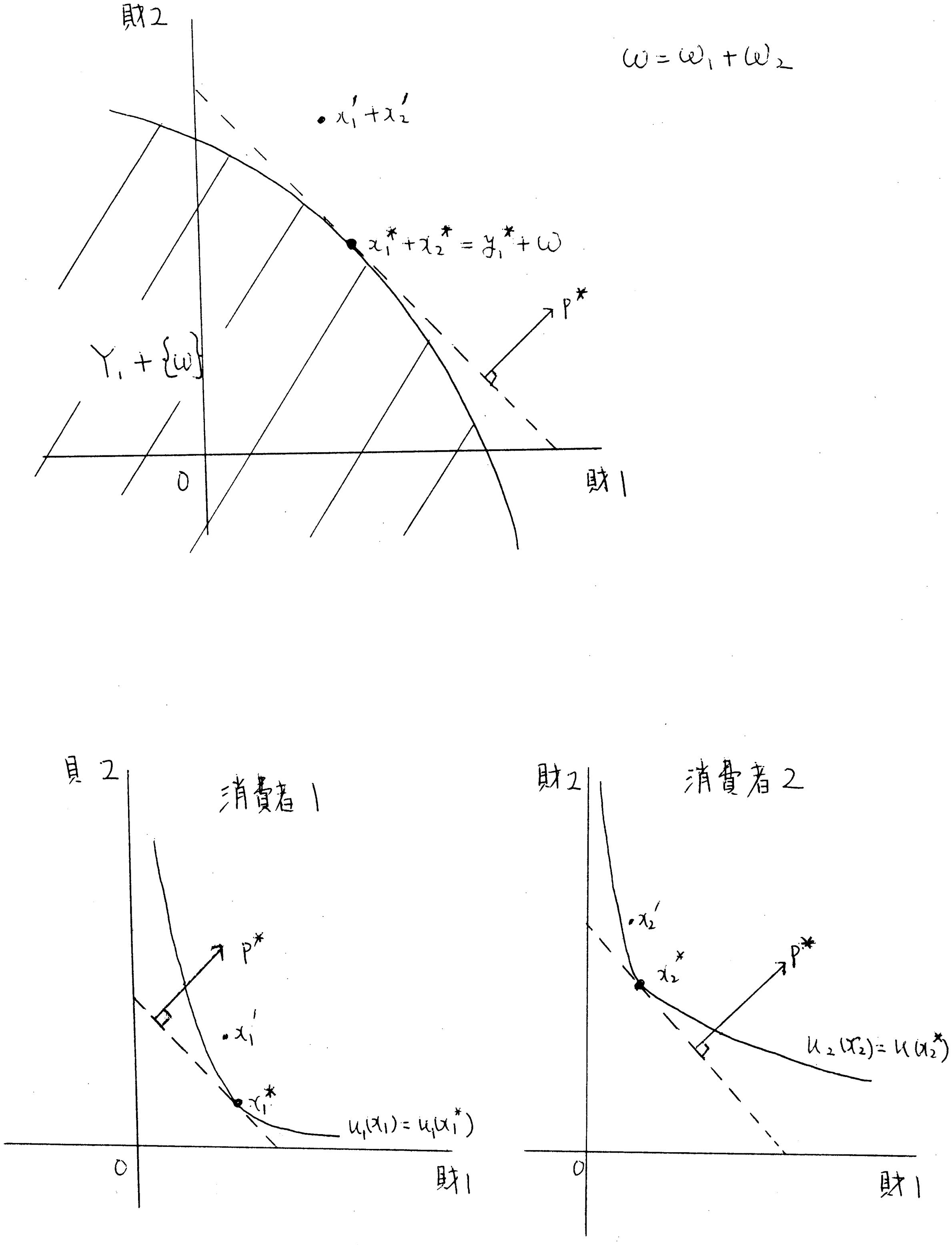
まず生産可能性集合が凸である場合を考える。効用関数が準凹であること、およびその他の付加的条件のもとで以下の定理が成立する。(Debreu [1959] 参照。)

厚生経済学の第一基本定理 : $(p^*, (x_i^*), (y_j^*))$ が Walras 均衡なら $((x_i^*), (y_j^*))$ は Pareto 最適配分である。

厚生経済学の第二基本定理:いかなる Pareto 最適配分 $((x_i^*), (y_j^*))$ も所得を適当に再配分すれば p^* が存在して $(p^*, (x_i^*), (y_j^*))$ が Walras 均衡になる。

存在定理 : Walras 均衡は存在する。

$\ell = 2,\ m = 2,\ n = 1$ として直感的になぜ上の定理が成立するか解説してみよう。図４において $(p^*, x_1^*, x_2^*, y_1^*)$ は Walras 均衡になっている。(効用関数が単調増加であれば、x_i^* は所得制約を等号で満たすことに注意) もし、(x_1', x_2') が $u_1(x_1') > u_1(x_1^*)$ および $u_2(x_2') \geq u_2(x_2^*)$ を満たすなら $p_1^* x_{11}' + p_2^* x_{12}' > p_1^* x_{11}^* + p_2^* x_{12}^*$ および $p_1^* x_{21}' + p_2^* x_{22}' \geq p_1^* x_{21}^* + p_2^* x_{22}^*$ が成立する。ところが図４から $x_1' + x_2'$ は $Y_1 + \{\omega\}$ に属さない。



財2
$\omega = \omega_1 + \omega_2$
$x_1' + x_2'$
$x_1^* + x_2^* = y_1^* + \omega$
p^*
$Y_1 + \{\omega\}$
0
財1
貝 2
消費者1
p^*
x_1'
x_1^*
$u_1(x_1) = u_1(x_1^*)$
0
財1
財2
消費者2
x_2'
x_2^*
p^*
$u_2(x_2) = u(x_2^*)$
0
財1

図 4

したがって第一基本定理が成立する。次に存在定理を説明しよう。図５において基本単体 $\{(v_1, v_2) \in R^2_+ \mid v_1 + v_2 = 1\}$ からそれ自身への関数 $v \to z \to u \to v'$を考える。ここで、$v \to z$は vと原点を結ぶ直線が$\partial Y_1 + \{\omega\}$ と交わる点を v に対応させたものである。次に、zに対し$\partial Y_1 + \{\omega\}$ の zにおける法線ベクトル $p(z)$ を考える。$p(z)$ を価格とすれば、Y_1の凸性より $y_1 \equiv z - \omega \in Y_1$において生産者は利潤を最大にしていることがわかる。また、価格 $p(z)$ に対し総所得は $p(z) \cdot (y_1 + \omega)$ となるから、消費者１、２の需要の和は $\{s \in R^2_+ \mid p(z) \cdot s = p(z) \cdot (y_1 + \omega)\}$ 上にある。この総需要を u とする。最後に u と原点を結ぶ直線が基本単体と交わる点を v'とする。この vから v'への関数の連続性はかなり弱い条件のもとで保証される。したがって、Brouwer の不動点定理より不動点 v^*が存在する。v^*に対応する生産ベクトル $y_1^* = z^* - \omega$, $z^* = u^*$に対応する x_1^*, x_2^*および $p(u^*)$ が Walras 均衡を構成することは明かである。最後に第二基本定理を説明する。まず Pareto 最適配分 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1)$ を選ぶ。次に $G = \{z \in R^2_+ \mid u_1(x_1) > u_1(\hat{x}_1),\ u_2(x_2) > u_2(\hat{x}_2),\ z = x_1 + x_2\}$ とする。$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1)$ の Pareto 最適性より G は $Y_1 + \{\omega\}$ と交わらない。$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \in \partial G \cap (Y_1 + \{\omega\})$ より G と $Y_1 + \{\omega\}$ は$\hat{x}_1 + \hat{x}_2$で接する。この共通の法線ベクトルを$\hat{p}$とし消費者 i の所得を$\hat{p} \cdot \omega_i + \theta_{i1}\hat{p} \cdot \hat{y}_1 + t_i$（$\hat{y}_1 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \omega \in Y_1$, $t_i = \hat{p} \cdot \hat{x}_i - (\hat{p} \cdot \omega_i + \theta_{i1}\hat{p} \cdot \hat{y}_1)$）とすれば $(\hat{p}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1)$ が Walras 均衡になることは明かである。（図６参照。）

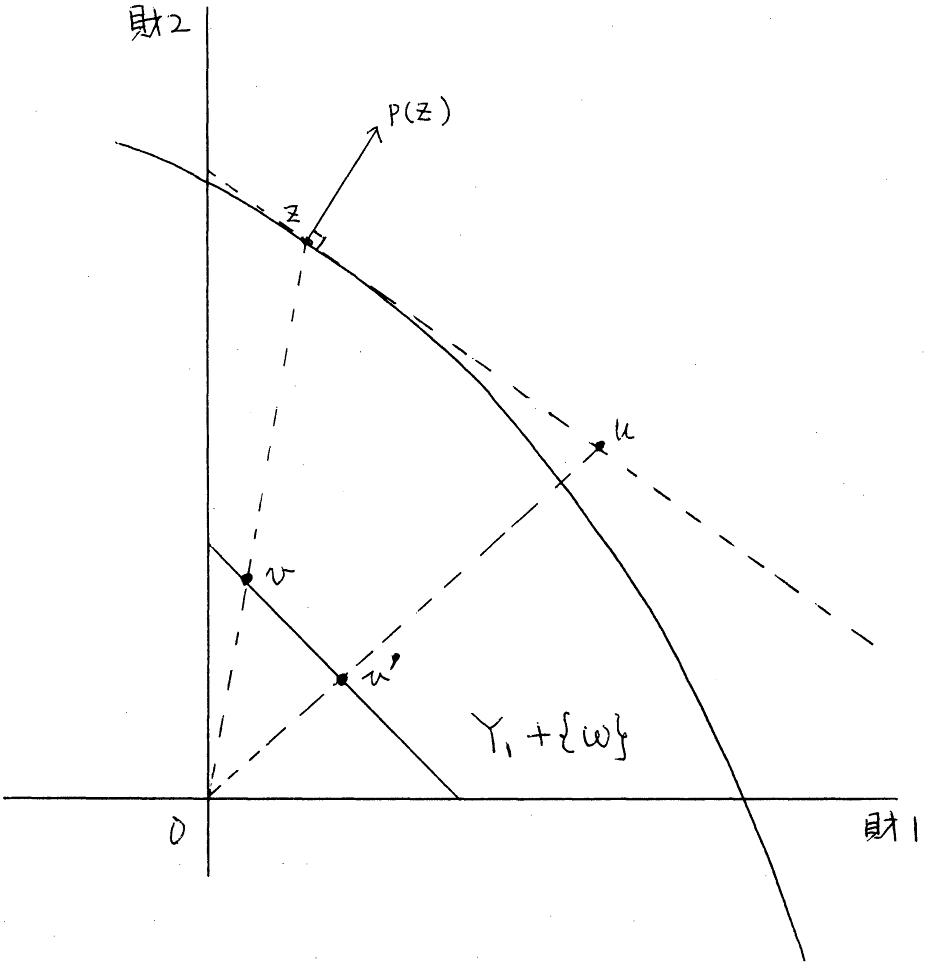
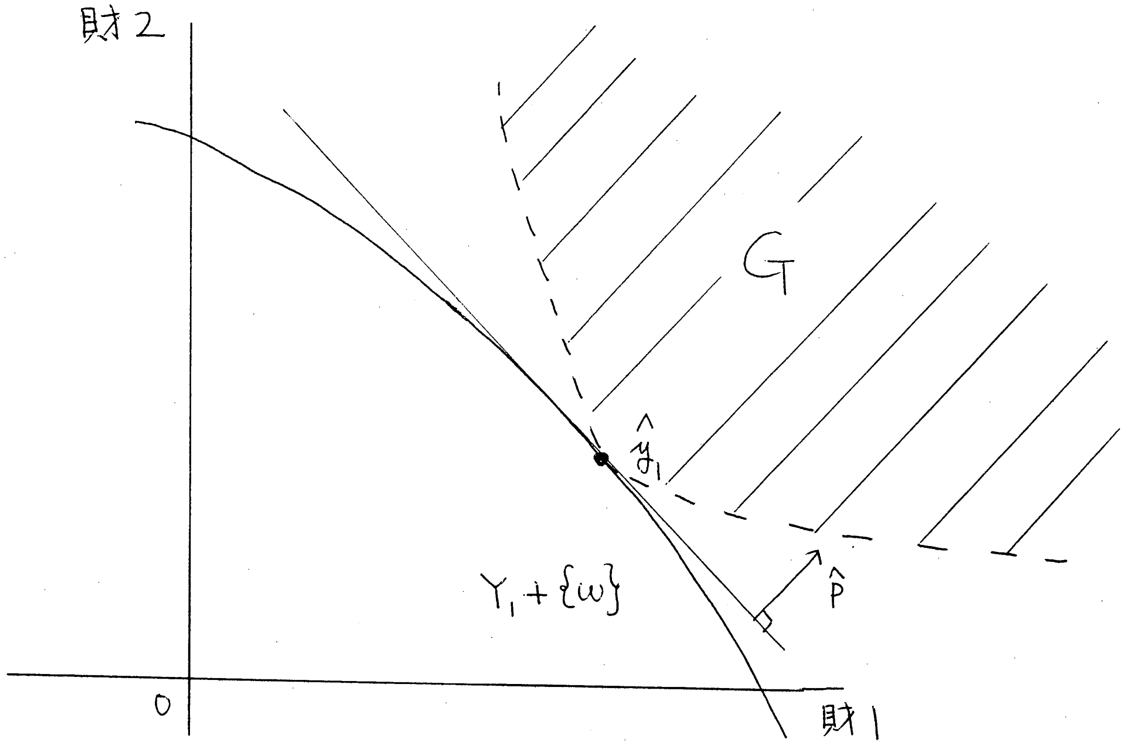


図5


財2
G
$\hat{y}_1$
$\hat{p}$
$Y_1+\{\omega\}$
0
財1

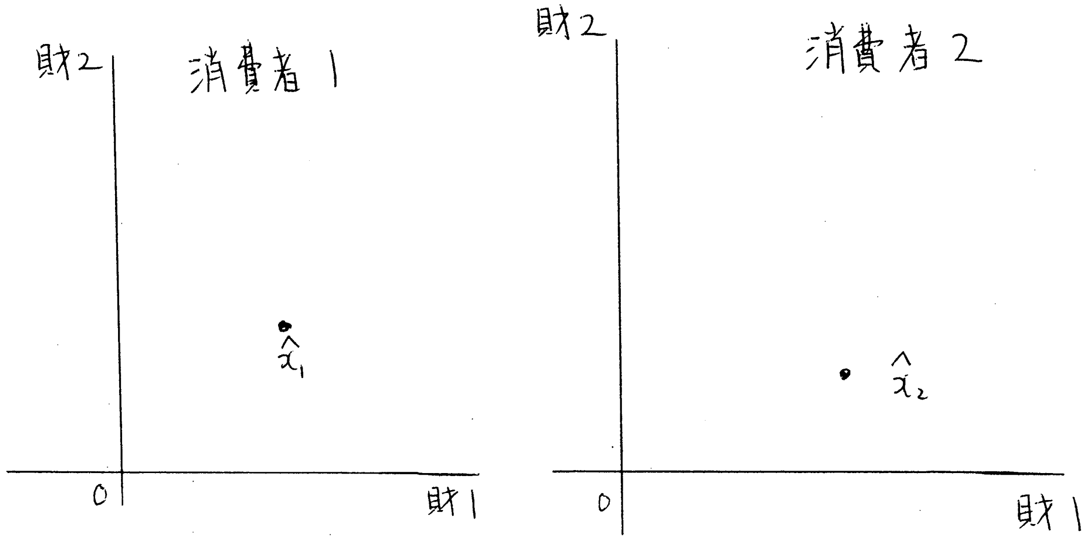

財2
消費者1
$\hat{x}_1$
0
財1
財2
消費者2
$\hat{x}_2$
0
財1

図6

以下、Y_jが凸でない場合を考える。この場合には、厚生経済学の第一基本定理はかなり弱い仮定のもとで成立するが、第二基本定理と存在定理は成立しない。すなわち、上の説明において第一基本定理を導いた論理はそのまま使える。しかし、上の存在定理と第二基本定理の説明において$p(u)$や$\hat{p}$で生産者が利潤を最大にしているとは限らない。実際、存在定理と第二基本定理が成立しない例は簡単に構成できる。

存在定理が成立しないことは非凸の生産可能性集合を持つ生産者を規制することの根拠になっている。(こうした生産者が価格を所与とする行動を取らず、独占的に価格設定者として行動しやすいことも規制のいまひとつの根拠になっている。) そこで均衡概念を変更し、生産者は政府の規制を受けて、利潤を最大にする代わりに限界費用価格を付けるとする。

限界費用価格均衡：上の (i),(iii) と以下の条件を満たす価格 $p^* \in R^{\ell}_{+}$、消費ベクトル $x_i^* \in R^{\ell}_{+},\ i = 1,...,m$ 、生産ベクトル $y_j^* \in Y_j,\ j = 1,...,n,$ の組を限界費用価格均衡と定義する。

(v) $p^* \in \ N(y_j^*, Y_j)$ かつ $y_j^* \in \partial Y_j$ for all $j = 1,...,n$ 。ここで $N(y_j^*, Y_j)$ は y_j^*における Y_jの Clarke normal cone 。(Clarke normal cone およびその限界費用価格との関係に関しては Bonnisseau and Cornet [1990] 参照。)

この場合にはかなり弱い条件のもとで以下が成立する。

第二基本定理：いかなるPareto最適配分 $((x_i^*),(y_j^*))$ も適当に所得を再配分すれば p^* が存在して $(p^*,(x_i^*),(y_j^*))$ が限界費用価格均衡になる。(Guesnerie [1975], Khan and Vohra [1987] 参照。)

存在定理：限界費用価格均衡は存在する。(Bonnisseau and Cornet [1990] 参照。)

第二基本定理と存在定理の証明についてはWalras均衡の場合と同じ説明が使える。しかし、第一基本定理に関しては生産者の利潤最大化が仮定されていないため同じ説明が使えない。また限界費用価格均衡配分がPareto最適配分でない例は簡単に作ることができる。政府の規制の根拠が均衡の存在と同時にPareto最適性の達成であるとすれば、限界費用価格均衡も不十分なものだといえる。

価格規制に関しては、限界費用価格以外のものも考えられる。例えば、非凸の生産可能性集合を持つ生産者が常に利潤が0になるように価格をつけさせるという平均費用価格による規制や、利潤を一定率（量）に抑えるという規制も考えられる。一般的には生産者 j が価格ずけ対応 (correspondence) $\varphi_j : \partial Y_j \to R_+^\ell$ を持つと考え、（平均費用価格の場合は $\varphi_j(y_j) = \{p \in R_+^\ell \mid p \cdot y_j = 0\}$ ）、均衡を(i),(iii)および以下の条件を満たす価格 $p^* \in R_+^\ell$、消費ベクトル $x_i^* \in R_+^\ell$, $i = 1,...,m$ 、生産ベクトル $y_j^* \in Y_j$, $j = 1,...,n$, の組と定義する。

(vi) $p^* \in \cap_{j=1}^{n} \varphi_j(y_j),\ y_j \in \partial Y_j$ for all j。

この場合には、かなり弱い条件のもとで均衡が存在することを証明できる。(Cornet [1988] 参照。) しかし、φ_jとしていかなる対応を選んでも第一基本定理は成立せず、また第二基本定理に関しても、φ_jが限界費用価格でないかぎり一般には成立しない。

以上、生産可能性集合が非凸の場合の均衡概念を検討してきたが、現在のところ弱い条件のもとで第一、第二基本定理および存在定理を満たす均衡概念あるいは価格規制は見つかっていない。また、生産者が政府の規制を受けず独占的あるいは寡占的に行動する場合の分析に関しても、多くの問題が残されている。(Arrow and Hahn [1972], Cornet [1988] 参照。)

参考文献

Arrow, K.J. and F.H. Hahn [1972]: *General Competitive Analysis*, Holden-day, San Francisco.

J.M. Bonnisseau and B. Cornet [1990]: "Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria in Economies with Several Nonconvex Firms", *Econometrica*, 58, pp. 661-682.

B. Cornet [1988]: "General Equilibrium Theory and Increasing Returns", *Journal of Mathematical Economics*, 17, pp. 103-118.

G. Debreu [1959], *Theory of Value*, John Wiley, New York.

R. Guesnerie [1975]: "Pareto-optimality in Nonconvex Economies", *Econometrica*, 43, pp. 1-29.

M.A. Khan and R. Vohra [1987]: "An Extension of the Second Welfare Theorem to Economies with Non-convexities and Public Goods", *Quarterly Journal of Economics*, 102, pp. 223-241.